ЛЕКЦИЯ 4

Формы кручения и кривизны. — Структурные уравнения Картана в полярных координатах. — Существование аффинных локальных отображений. — Локально симметрические пространства аффинной связности. — Локальные геодезические симметрии. — Полусимметрические пространства.

Формы кручения и кривизны Как мы знаем (см. лекцию IV.19), вместо тензора кривизны удобно рассматривать *формы кривизны*

$$\Omega^i_j = \sum_{k<l} R^i_{j,kl} dx^k \wedge dx^l = \frac{1}{2} R^i_{j,kl} dx^k \wedge dx^l.$$

Переход к формам Ω^i_j адекватен из-за кососимметричности компонент $R^i_{j,kl}$ по индексам k и l.

Напомним (см. лекцию IV.19), что формы кривизны Ω^i_j связности ∇ на векторном расслоении ξ являются дифференциальными формами над тривиализирующей окрестностью U и выражаются через формы ω^i_j связности ∇ согласно структурному уравнению Картана

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega, \quad \Omega = \|\Omega^i_j\|, \quad \omega = \|\omega^i_j\|. \tag{1}$$

Формы же ω^i_j определяются (см. лекцию IV.13) формулой

$$\nabla s_j = \omega^i_j \otimes s_i, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

где $s_1, \ldots, s_n$ — базис модуля сечений $\Gamma\xi$ расслоения ξ над U (тривиализация расслоения ξ над U).

В случае аффинной связности за базис $s_1, \ldots, s_n$ обычно принимается голономный базис

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x^n} \tag{2}$$

модуля векторных полей $\mathfrak{a}\mathcal{X} = \Gamma\tau_{\mathcal{X}}$ над U, отвечающий данной карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$. Однако, довольно часто удобно не связывать себе руки свойством голономности и вместо базиса (2) рассматривать произвольный базис

$$X_1, \quad \ldots, \quad X_n \tag{3}$$

модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ над U. Специфику же расслоения $\tau_{\mathcal{X}}$ лучше всего в этом случае учесть, выражая дифференциальные формы ω_j^i и Ω_j^i через базис

$$\theta^1, \quad \ldots, \quad \theta^n \tag{4}$$

модуля $\Omega^1\mathcal{X}$ над U, сопряженный с базисом (3). (По определению $\theta^i(X_j) = \delta_j^i$; для базиса (2) $\theta^i = dx^i$.) Таким образом, работая с базисом (3), мы полагаем

$$\omega_j^i = \Gamma_{kj}^i\theta^k \quad \text{на } U \tag{5}$$

и

$$\Omega_j^i = \sum_{k<l} R_{j,kl}^i\theta^k \wedge \theta^l. \tag{6}$$

Функции Γ_{kj}^i (функции $R_{j,kl}^i$) называются при этом коэффициентами аффинной связности ∇ (компонентами тензора кривизны R) *в базисе* (3).

Подчеркнем, что функции Γ_{kj}^i являются коэффициентами связности ∇ в смысле лекции IV.10 (а функции $R_{j,kl}^i$ — компонентами тензора R в смысле лекции IV.19) только в случае, когда базис (3) голономен (имеет вид (2)).

Задача 1. Докажите следующие формулы:

$$\begin{gathered}\Gamma_{kj}^i = \theta^i(\nabla_{X_k}X_j), \quad \omega_j^i(X) = \theta^i(\nabla_X X_j), \\ R_{j,kl}^i = \theta^i(R(X_k, X_l)X_j),\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}R &= R_{j,kl}^i X_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k \otimes \theta^l = \\ &= \sum_{k<l} R_{j,kl}^i X_i \otimes \theta^j \otimes (\theta^k \wedge \theta^l) = (X_i \otimes \theta^j) \otimes \Omega_j^i.\end{aligned} \tag{8}$$

Аналогичным образом, функции

$$T_{jk}^i = \theta^i(T(X_j, X_k))$$

называются компонентами тензора кручения T в базисе (3). При этом

$$T = T_{jk}^i X_i \otimes \theta^j \otimes \theta^k = \sum_{j<k} T_{jk}^i X_i \otimes (\theta^j \wedge \theta^k) = X_i \otimes \Theta^i, \tag{9}$$

где
$$\Theta^i = \sum_{j<k} T^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k = \frac{1}{2} T^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k \tag{10}$$
— *формы кручения* связности ∇ в базисе (3).

Выражение компонент T^i_{jk} через коэффициенты связности Γ^i_{jk} в случае произвольного базиса (3) усложняется и приобретает вид
$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]} - c^i_{jk}, \tag{11}$$
где c^i_{jk} — коэффициенты выражений полей $[X_j, X_k]$ через поля (3):
$$[X_j, X_k] = c^i_{jk} X_i.$$
(Действительно, по определению
$$T(X_j, X_k) = \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_k} X_j - [X_j, X_k]$$
и, следовательно, $\theta^i(T(X_j, X_k)) = \theta^i(\nabla_{X_j} X_k) - \theta^i(\nabla_{X_k} X_j) - \theta^i([X_j, X_k])$.)

Умножив формулу (11) на $\theta^j \wedge \theta^k$ и произведя суммирование по $j < k$, мы слева получим форму кручения Θ^i. Справа же первый член будет равен
$$\sum_{j<k} \Gamma^i_{[jk]}\theta^j \wedge \theta^k = \frac{1}{2}\Gamma^i_{[jk]}\theta^j \wedge \theta^k =$$
$$= \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k - \frac{1}{2}\Gamma^i_{kj}\theta^j \wedge \theta^k = \Gamma^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k = \omega^i_k \wedge \theta^k.$$
Что же касается второго члена
$$-\sum_{j<k} c^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k,$$
то, как легко видеть, он равен дифференциалу $d\theta^i$ формы θ^i. [Действительно, если
$$d\theta^i = \sum_{j<k} a^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k,$$

то $a^i_{jk} = (d\theta^i)(X_j, X_k)$. С другой стороны, как мы знаем (см., например, формулу (6) лекции III.19),

$$(d\theta^i)(X_j, X_k) = X_j\theta^i(X_k) - X_k\theta^i(X_j) - \theta^i[X_j, X_k].$$

Но так как $\theta^i(X_k) = \delta^i_k = \mathrm{const}$, то $X_j\theta^i(X_k) = 0$ и, аналогично, $-X_k\theta^i(X_j) = 0$. Кроме того,

$$\theta^i[X_j, X_k] = \theta^i(c^p_{jk}X_p) = c^i_{jk}.$$

Следовательно, $a^i_{jk} = -c^i_{jk}$.]

Таким образом,

$$\Theta^i = d\theta^i + \omega^i_j \wedge \theta^j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

или, в матричной записи,

$$\Theta = d\theta + \omega \wedge \theta, \tag{12'}$$

где Θ и θ — матрицы-столбцы

$$\Theta = (\Theta^1, \ldots, \Theta^n)^\top, \quad \theta = (\theta^1, \ldots, \theta^n)^\top.$$

Уравнение (12′) называется *структурным уравнением Картана для форм кручения.*

В голономном базисе (2) оно сводится к равенствам $\Theta^i = \omega^i_j \wedge dx^j$, равносильным формулам (15) лекции 2.

Структурные уравнения Картана в полярных координатах

В случае, когда U является нормальной окрестностью точки $p_0 \in \mathcal{X}$, каждая точка $p \in U$ может быть соединена с точкой p_0 геодезическим сегментом вида $t \mapsto \exp_{p_0} tA$, где $A \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Мы будем обозначать этот сегмент символом $\gamma_{p_0 p}$.

Базис $X_1, \ldots, X_n$ модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ над U называется *адаптированным*, если для любой точки $p \in U$ базис $(X_1)_p, \ldots, (X_n)_p$ линеала $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ получается из базиса $(X_1)_{p_0}, \ldots, (X_n)_{p_0}$ линеала $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ параллельным переносом вдоль отрезка $\gamma_{p_0 p}$.

Задача 2. Докажите, что *для любого базиса* $A_1, \ldots, A_n$ *линеала* $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ *существует один и только один* *адаптированный базис* $X_1, \ldots, X_n$ *модуля* $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ *над* U, *для которого*

$$(X_1)_{p_0} = A_1, \quad \ldots, \quad (X_n)_{p_0} = A_n. \tag{13}$$

[Указание. Конструкция векторных полей $X_1, \ldots, X_n$ очевидна. Доказательства требует лишь их гладкость.]

Мы будем говорить, что базис $X_1, \ldots, X_n$ *адаптирован к базису* $A_1, \ldots, A_n$.

Пусть $\theta^1, \ldots, \theta^n$ — базис над U модуля $\Omega^1\mathcal{X}$, сопряженный с адаптированным базисом $X_1, \ldots, X_n$ модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$, и пусть, как и выше,

$$\Theta^i = \sum_{j<k} T^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k, \quad \Omega^i_j = \sum_{k<l} R^i_{j,kl}\theta^k \wedge \theta^l$$

— соответствующие формы кручения и кривизны.

Здесь оказывается целесообразным технический трюк, состоящий в том, что мы вводим в рассмотрение переопределенные *полярные координаты* $t, x^1, \ldots, x^n$. По определению точка $p \in U$ имеет координаты $t, x^1, \ldots, x^n$, если $p = \exp_{p_0}(tx^iA_i)$.

Таким образом,

а. Если $t, x^1, \ldots, x^n$ — координаты точки p, то для любого $\lambda \neq 0$ числа $t\lambda^{-1}, \lambda x^1, \ldots, \lambda x^n$ также будут координатами точки p; при $p \neq p_0$ это единственный произвол в выборе координат $t, x^1, \ldots, x^n$.

б. Если $x^1, \ldots, x^n$ — нормальные координаты точки p, отвечающие базису $A_1, \ldots, A_n$, то числа $1, x^1, \ldots, x^n$ будут полярными координатами этой точки.

в. Точка p_0 имеет координаты $t, 0, \ldots, 0$, где t — любое, и $0, x^1, \ldots, x^n$, где $x^1, \ldots, x^n$ — любые.

Если $U^{(0)}$ — подмножество пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, состоящее из точек $(t, \boldsymbol{x}) = (t, x^1, \ldots, x^n)$, для которых точка $\exp_{p_0}(tx^iA_i)$ определена и принадлежит U, то формула

$$h(t, \boldsymbol{x}) = \exp_{p_0}(tx^iA_i) \tag{14}$$

будет определять гладкое отображение $h\colon U^{(0)} \to U$ и, значит, для любой формы α на U будет определена форма $h^*\alpha$

на $U^{(0)}$. О форме $h^*\alpha$ мы будем говорить, что она является *выражением формы α в координатах* $t, x^1, \ldots, x^n$ и, как правило, будем обозначать ее прежним символом α. [Заметим, что ограничение формы $h^*\alpha$ при $t = 1$ равно α.]

Пусть, в частности,

$$\theta^i = g^i dt + \beta^i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

— выражение формы θ^i в координатах $t, x^1, \ldots, x^n$, где β^i — форма, не зависящая от dt, а g^i — некоторая функция на $U^{(0)}$. Коэффициенты формы β^i зависят, вообще говоря, от t, и при $t = 1$ эта форма является не чем иным, как формой θ^i.

Что же касается функции g^i, то она представляет собой значение формы θ^i (или, точнее, формы $h^*\theta^i$) на векторном поле $\dfrac{\partial}{\partial t}$, и чтобы ее вычислить в точке $(t, \boldsymbol{x})$, надо рассмотреть геодезический сегмент $\gamma = \gamma_{p_0 p}$, соединяющий в U точку p_0 с точкой $p = h(t, \boldsymbol{x})$. Так как касательный вектор $\dot\gamma(t)$ к геодезической γ параллелен вдоль γ вектору $\dot\gamma(0) = x^i A_i$, и так как, по построению, векторы $(X_i)_{\gamma(t)}$ получаются из векторов A_i параллельным переносом вдоль γ, то $\dot\gamma(t) = x^i (X_i)_{\gamma(t)}$, и потому

$$\theta^i(\dot\gamma(t)) = x^i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

С другой стороны, так как $\gamma(t) = h(t, \boldsymbol{x})$, то $\gamma^*\theta^i = g^i dt$ и, значит,

$$g^i(t, \boldsymbol{x}) = (\gamma^*\theta^i)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,\boldsymbol{x})} = \theta^i(\dot\gamma(t)).$$

Этим доказано, что *выражение формы θ^i в координатах $t, x^1, \ldots, x^n$ имеет вид*

$$\theta^i = x^i dt + \beta^i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где β^i — форма, не зависящая от dt (и такая, что $\beta^i\big|_{t=1} = \theta^i$).

Аналогично, значение в точке $(t, \boldsymbol{x})$ коэффициента при dt в выражении формы ω^i_j через координаты $t, x^1, \ldots, x^n$ равно

$$(\gamma^*\omega^i_j)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,\boldsymbol{x})} = \omega^i_j(\dot\gamma(t)) = \theta^i_{\gamma(t)}\left(\frac{\nabla (X_j)_{\gamma(t)}}{dt}\right)$$

(см. вторую из формул (7)), и, значит, поскольку поле $t \mapsto (X_j)_{\gamma(t)}$ на кривой γ ковариантно постоянно, это значение равно нулю. Следовательно, *выражение формы* ω^i_j *через* $t^1, x^1, \ldots, x^n$ *не содержит* dt.

Напомним (см. лекцию III.20), что для любой формы α, не содержащей dt символом $\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}$, мы обозначаем форму, получающуюся из формы α дифференцированием по t всех ее коэффициентов. С внешним дифференциалом $d\alpha$ эта форма связана (см. формулу (6) лекции III.20) соотношением

$$d\alpha = \partial\alpha + dt \wedge \frac{\partial\alpha}{\partial t},$$

где $\partial\alpha$ — дифференциал формы α, вычисленный в предположении, что t постоянно (и, значит, подобно форме α не содержащий dt).

В частности,

$$d\beta^i = \partial\beta^i + dt \wedge \frac{\partial\beta^i}{\partial t},$$

и потому

$$d\theta^i = dx^i \wedge dt + dt \wedge \frac{\partial\beta^i}{\partial t} + \partial\beta^i.$$

В силу структурного уравнения Картана (12′) отсюда следует, что выражение формы кручения Θ^i через $t, x^1, \ldots, x^n$ имеет вид

$$\Theta^i = \left(dx^i - \frac{\partial\beta^i}{\partial t} + \omega^i_j x^j\right) \wedge dt + \ldots,$$

где многоточие обозначает члены, не содержащие dt. Так как, с другой стороны,

$$\Theta^i = \frac{1}{2} T^i_{jk}(x^j dt + \beta^j) \wedge (x^k dt + \beta^k) =$$
$$= \frac{1}{2}(T^i_{jk}\beta^j x^k - T^i_{jk} x^j \beta^k) \wedge dt + \ldots = -T^i_{jk} x^j \beta^k \wedge dt + \ldots,$$

где T^i_{jk} обозначает функции $h^*T^i_{jk} = T^i_{jk} \circ h$ от $t, x^1, \ldots, x^n$, то, следовательно,

$$dx^i - \frac{\partial\beta^i}{\partial t} + \omega^i_j x^j = -T^i_{jk} x^j \beta^k,$$

т. е.

$$\frac{\partial\beta^i}{\partial t} = dx^i + x^j \omega^i_j + T^i_{jk} x^j \beta^k, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Аналогично, в координатах $t, x^1, \ldots, x^n$ структурное уравнение Картана (1) для форм кривизны имеет вид

$$\sum_{k<l} R^i_{j,kl}(x^k dt+\beta^k)\wedge(x^l dt+\beta^l) = \left(\partial\omega^i_j+dt\wedge\frac{\partial\omega^i_j}{\partial t}\right)+\omega^i_k\wedge\omega^k_j,$$

т. е. вид

$$dt\wedge R^i_{j,kl}x^k\beta^l+\ldots = dt\wedge\frac{\partial\omega^i_j}{\partial t}+\ldots,$$

где, как и выше, многоточие обозначает члены, не содержащие dt. Следовательно,

$$\frac{\partial\omega^i_j}{\partial t} = R^i_{j,kl}x^k\beta^l, \qquad i,j=1,\ldots,n. \tag{16}$$

Уравнения (15) и (16) вместе составляют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов форм β^i и ω^i_j, рассматриваемых как функции от t (при фиксированных $x^1, \ldots, x^n$).

Начальные условия для этих уравнений имеют вид

$$\beta^i|_{t=0}=0, \qquad \omega^i_j|_{t=0}=0. \tag{17}$$

(Действительно, так как $h(0,\boldsymbol{x})=p_0$ для любого $\boldsymbol{x}$, то

$$(dh)_{(0,\boldsymbol{x})}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{(0,\boldsymbol{x})}=0, \qquad k=1,\ldots,n,$$

и, значит, каждая форма вида $h^*\alpha$ равна нулю на векторах $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right)_{(0,\boldsymbol{x})}$. При $\alpha=\theta^i$ это дает первое равенство (17), а при $\alpha=\omega^i_j$ — второе).

Уравнения (15) и (16) называются *структурными уравнениями Картана в полярных координатах.*

С их помощью можно легко ответить на поставленный в лекции 3 вопрос об условиях, обеспечивающих аффинность данного диффеоморфизма $f\colon \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$. При этом нам будет удобно ограничиться вначале локальной ситуацией и несколько видоизменить постановку вопроса.

Существование аффинных локальных отображений

Пусть $p_0\in\mathcal{X}$, $q_0\in\mathcal{Y}$, и пусть

$$\varphi\colon \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}\to\mathsf{T}_{q_0}\mathcal{Y} \tag{18}$$

— произвольный изоморфизм линеала $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ на линеал $\mathsf{T}_{q_0}\mathcal{Y}$. Из того, что нормальные окрестности составляют фундаментальную систему окрестностей, непосредственно следует, что в линеалах $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ и $\mathsf{T}_{q_0}\mathcal{Y}$ существуют такие нормальные окрестности нуля $U^{(0)}$ и $V^{(0)}$, что $V^{(0)} = \varphi U^{(0)}$.

Пусть $U = \exp_{p_0} U^{(0)}$ и $V = \exp_{q_0} V^{(0)}$ — соответствующие нормальные окрестности точек p_0 и q_0 в многообразиях $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Выбрав базис $A_1, \dots, A_n$ линеала $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$, обозначим через $x^1, \dots, x^n$ и $y^1, \dots, y^n$ нормальные координаты в окрестностях U и V, отвечающие базисам $A_1, \dots, A_n$ и $B_1 = \varphi A_1, \dots, B_n = \varphi A_n$ линеалов $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ и $\mathsf{T}_{q_0}\mathcal{Y}$. Тогда отображение

$$f\colon U \to V \tag{19}$$

по равенству координат (задаваемое формулами $y^1 = x^1, \dots \dots, y^n = x^n$) будет диффеоморфизмом окрестности U на окрестность V, удовлетворяющим соотношению $(df)_{p_0} = \varphi$.

Пусть, далее, $X_1, \dots, X_n$ — базис модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ над U, адаптированный к базису $A_1, \dots, A_n$, а $Y_1, \dots, Y_n$ — базис модуля $\mathfrak{a}\mathcal{Y}$ над V, адаптированный к базису $B_1, \dots, B_n$.

Наконец, пусть T^i_{jk} и $R^i_{j,kl}$ — компоненты тензоров $T^{\mathcal{X}}$ и $R^{\mathcal{X}}$ в базисе $X_1, \dots, X_n$, а $\widehat{T}^i_{jk}$ и $\widehat{R}^i_{j,kl}$ — компоненты тензоров $T^{\mathcal{Y}}$ и $R^{\mathcal{Y}}$ в базисе $Y_1, \dots, Y_n$, в которых произведена подстановка $y^1 = x^1, \dots, y^n = x^n$ (т. е. композиции этих компонент с диффеоморфизмом $f\colon U \to V$).

Подчеркнем, что, таким образом, все функции $\widehat{T}^i_{jk}, \widehat{R}^i_{j,kl}$ являются, подобно $T^i_{jk}, R^i_{j,kl}$, функциями на U.

Предложение 1. *Отображение* (19) *тогда и только тогда является аффинным отображением, когда на U имеют место равенства*

$$\widehat{T}^i_{jk} = T^i_{jk}, \qquad \widehat{R}^i_{j,kl} = R^i_{j,kl}. \tag{20}$$

(Обратите внимание, что, вообще говоря, равенства (20) выражают нечто совсем иное, чем равенства (6) лекции 3 (при $\mathcal{X} = U$ и $\mathcal{Y} = V$)).

Доказательство. Аффинность отображения (19) означает, что пространства аффинной связности $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ отличаются лишь обозначением координат. Поэтому если отображение (19) аффинно, то оно переводит базис $X_1, \ldots, X_n$ в базис $Y_1, \ldots, Y_n$, и потому равенства (20) в точности равносильны равенствам (6) лекции 3. Таким образом, если отображение (19) аффинно, то равенства (20) справедливы.

Обратно, если имеют место равенства (20), то структурные уравнения (15) и (16) для связностей $\nabla^{\mathcal{X}}$ и $\nabla^{\mathcal{Y}}$ отличаются только обозначениями координат (переходят друг в друга при подстановке $y^1 = x^1, \ldots, y^n = x^n$). Поэтому их решения β^i и ω^i_j, удовлетворяющие начальным условиям (17), также отличаются лишь обозначениями координат. Применительно к формам ω^i_j при $t = 1$ это означает, что для форм связностей $\nabla^{\mathcal{X}}$ и $\nabla^{\mathcal{Y}}$ имеет место равенство $\omega^{\mathcal{X}} = f^*\omega^{\mathcal{Y}}$. Следовательно, отображение (19) аффинно. $\square$

Конечно, громоздкий характер условий (20) оставляет желать лучшего. Их можно усовершенствовать, наложив на рассматриваемые связности те или иные дополнительные условия.

Локально симметрические пространства аффинной связности

***Определение* 1.** Пространство аффинной связности $\mathcal{X}$ называется *локально симметрическим*, если

1) связность на $\mathcal{X}$ симметрична (тензор кручения T равен нулю);

2) тензор кривизны R ковариантно постоянен:

$$\nabla R = 0 \qquad (\text{покомпонентно: } \nabla_s R^i_{j,kl} = 0).$$

Задача 3. Покажите, что *при* $\nabla R = 0$ *параллельный перенос* Π_γ *вдоль произвольного пути* $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ *сохраняет тензор кривизны*, т. е. для любых векторов $A, B \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$, $p_0 = \gamma(0)$, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \arrow[r, "R_{p_0}(A{,}B)"] \arrow[d, "\Pi_\gamma"'] & \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \arrow[d, "\Pi_\gamma"] \\ \mathsf{T}_{p_1}\mathcal{X} \arrow[r, "R_{p_1}(\Pi_\gamma A{,}\Pi_\gamma B)"] & \mathsf{T}_{p_1}\mathcal{X} \end{tikzcd}$$

где $p_1 = \gamma(1)$.

Обратно, *если эта диаграмма коммутативна для любой геодезической γ, то $\nabla R = 0$.*

Мы будем говорить, что пространства аффинной связности $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ имеют *одну и ту же кривизну в точках $p_0 \in \mathcal{X}$ и $q_0 \in \mathcal{Y}$*, если существует изоморфизм

$$\varphi\colon \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \to \mathsf{T}_{q_0}\mathcal{Y}, \tag{21}$$

переводящий тензор $R^{\mathcal{X}}$ в точке p_0 в тензор $R^{\mathcal{Y}}$ в точке q_0, т. е. если для любых векторов $A, B \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \arrow[r, "R^{\mathcal{X}}_{p_0}(A{,}B)"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathsf{T}_{q_0}\mathcal{Y} \arrow[r, "R^{\mathcal{Y}}_{q_0}(\varphi A{,}\varphi B)"] & \mathsf{T}_{q_0}\mathcal{Y}
\end{tikzcd}$$

Из утверждения задачи 3 непосредственно вытекает, что *каждое связное локально симметрическое пространство $\mathcal{X}$ имеет во всех своих точках одну и ту же кривизну.*

Мы будем говорить, что связные локально симметрические пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ *имеют одну и ту же кривизну,* если для некоторых (а потому и любых) точек $p_0 \in \mathcal{X}$ и $q_0 \in \mathcal{Y}$ они имеют одну и ту же кривизну в точках p_0 и q_0.

Предложение 2. *Если локально симметрические пространства аффинной связности $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ имеют одну и ту же кривизну, то любые их точки $p_0 \in \mathcal{X}$ и $q_0 \in \mathcal{Y}$ обладают аффинно изоморфными окрестностями U и V. Более того, для любого изоморфизма* (21) *(т. е. изоморфизма, переводящего $R^{\mathcal{X}}_{p_0}$ в $R^{\mathcal{Y}}_{q_0}$) существует такой аффиннитет*

$$f\colon U \to V, \tag{22}$$

что $f(p_0) = q_0$ и $(df)_{p_0} = \varphi$.

Доказательство. За отображение (22) мы примем отображение (19), построенное по изоморфизму (21).

В силу предложения 1 нам достаточно, поэтому, лишь проверить условие $\widehat{R}^i_{j,kl} = R^i_{j,kl}$ (см. формулы (20); условие $\widehat{T}^i_{jk} = T^i_{jk}$ выполнено автоматически в силу симметричности связностей $\nabla^{\mathcal{X}}$ и $\nabla^{\mathcal{Y}}$).

Но условие ковариантного постоянства тензорного поля равносильно, очевидно, тому, что его компоненты в произвольном адаптированном базисе являются константами. Поэтому для локально симметрических пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ функции $R^i_{j,kl}$ и $\widehat{R}^i_{j,kl}$ постоянны на U. Следовательно, равенство $\widehat{R}^i_{j,kl} = R^i_{j,kl}$ будет иметь место на всей окрестности U, если оно имеет место в точке p_0.

Поскольку же выполнение этого равенства в точке p_0 в точности равносильно тому, что пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ имеют в точках p_0 и q_0 одну и ту же кривизну, это доказывает предложение 2. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Предложение 2 сохранит силу (вместе с доказательством), если условие $T = 0$ для связностей $\nabla^{\mathcal{X}}$ и $\nabla^{\mathcal{Y}}$ заменить более слабым условием $\nabla T = 0$.

Отображение (22) в инвариантной записи задается формулой

$$f(\exp_{p_0} A) = \exp_{q_0} \varphi A, \qquad A \in U^{(0)}. \tag{23}$$

Если многообразие $\mathcal{Y}$ геодезически полно, то эта формула имеет смысл для точек $\exp_{p_0} A$ п р о и з в о л ь н о й нормальной окрестности U точки p_0 (но получающееся отображение $f\colon U \to \mathcal{Y}$, вообще говоря, не инъективно).

Локальные геодезические симметрии

Применим предложение 2 к случаю, когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $p_0 = q_0$, $U = V$, а φ представляет собой центральную симметрию $A \mapsto -A$, т. е. к случаю, когда отображение $f\colon U \to U$ задается формулой

$$\exp_{p_0} A \mapsto \exp_{p_0}(-A). \tag{24}$$

Отображение (24) называется *локальной геодезической симметрией* в точке p_0.

Мы будем обозначать симметрию (24) символом s_{p_0}.

Предложение 3. *Пространство аффинной связности $\mathcal{X}$ тогда и только тогда локально симметрично, когда для любой точки $p_0 \in \mathcal{X}$ локальная геодезическая симметрия (24) является аффинным отображением.*

Доказательство. Так как валентность (число индексов) тензора кривизны четна, то симметрия s_{p_0} переводит его в себя. Поэтому если пространство $\mathcal{X}$ локально симметрично, то как показано при доказательстве предложения 2 локальная симметрия (24) является аффинным отображением.

Обратно, пусть для всех точек p_0 пространства аффинной связности $\mathcal{X}$ локальная симметрия s_{p_0} является аффинным отображением (некоторой нормальной окрестности U точки p_0 на себя). Так как аффинные отображения переводят тензор кручения в тензор кручения, а тензор кривизны — в тензор кривизны (см. формулы (6) лекции 3), то на U имеют место равенства $s_{p_0}^* T = T$ и $s_{p_0}^* R = R$. По определению это означает, что

$$(ds_{p_0})_p T_p(A, B) = T_q((ds_{p_0})_p A, (ds_{p_0})_p B)$$

и

$$(ds_{p_0})_p \circ R_p(A, B) = R_q((ds_{p_0})_p A, (ds_{p_0})_p B) \circ (ds_{p_0})_p$$

для любой точки $p \in U$ и любых векторов $A, B \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$, где $q = s_{p_0} p$.

При $p_0 = p$ из первого равенства следует, что

$$-T_{p_0}(A, B) = T_{p_0}(-A, -B) = T_{p_0}(A, B)$$

и, значит, что $T = 0$ (в точке p_0, а потому — в силу произвольности этой точки — и на всем $\mathcal{X}$).

С другой стороны, равенство $s_{p_0} p = q$ по определению означает, что существует такая геодезическая γ, заданная на отрезке $[-1, 1]$, что $p = \gamma(-1)$, $p_0 = \gamma(0)$, $q = \gamma(1)$. При этом, так как симметрия s_{p_0} является аффинным отображением, то (см. свойство Г из предложения 1 лекции 3) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{T}_p\mathcal{X} & \xrightarrow{(ds_{p_0})_p} & \mathsf{T}_q\mathcal{X} \\ {\scriptstyle \Pi_{\gamma_0}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Pi_{s_{p_0}\circ\gamma_0}} \\ \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} & \xrightarrow{(ds_{p_0})_{p_0}} & \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \end{array}$$

где γ_0 — отрезок $\gamma|_{[-1,0]}$ геодезической γ. Но, ясно, что $s_{p_0} \circ \gamma_0 = \gamma_1^{-1}$, где γ_1 — дополнительный отрезок $\gamma|_{[0,1]}$ геодезической γ. Кроме того, по определению

$$(ds_{p_0})_{p_0} A = -A$$

для любого вектора $A \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$. Поскольку $\Pi_\gamma = \Pi_{\gamma_1} \circ \Pi_{\gamma_0}$, этим доказано, что

$$(ds_{p_0})_p = -\Pi_\gamma \quad \text{на } \mathsf{T}_p\mathcal{X}.$$

Следовательно, для любых векторов $A, B \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$

$$\Pi_\gamma \circ R_p(A, B) = R_q(\Pi_\gamma A, \Pi_\gamma B) \circ \Pi_\gamma$$

и, значит (см. задачу 3), $\nabla R = 0$ (на U, а потому и на всем $\mathcal{X}$). $\square$

Предложение 3 объясняет, почему пространства аффинной связности с $T = 0$ и $\nabla R = 0$ называются локально симметрическими.

Полусимметрические пространства Условие $\nabla R = 0$ означает, что $\nabla_X R = 0$ для любого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$. Поэтому согласно формуле (18) лекции 2

$$R(X, Y)R = 0 \tag{25}$$

для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$. [Здесь $R(X, Y)$ рассматривается как дифференцирование алгебры тензорных полей на $\mathcal{X}$; см. лекцию 2.]

Таким образом, *тензор кривизны любого локально симметрического пространства удовлетворяет условию* (25).

Пространства аффинной связности, обладающие этим свойством (и такие, что $T = 0$), называются *полусимметрическими*).

Согласно формуле (21) лекции 2 (примененной к тензору $S = R$), условие (25) равносильно тождеству

$$R(X,Y) \circ R(U,V) - R(U,V) \circ R(X,Y) = \\ = R(R(X,Y)U,V) + R(U,R(X,Y)V), \quad (26)$$

которое должно иметь место для любых векторных полей $X, Y, U, V \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$.

Преимущество условий (25) и (26) перед условием $\nabla R = 0$ состоит в их алгебраическом характере.