ЛЕКЦИЯ 5

Глобально симметрические пространства. — Ростки гладких отображений. — Распространение аффинных отображений. — Теорема единственности. — Редукция локально симметрических пространств к глобально симметрическим пространствам. — Свойства симметрий в глобально симметрических пространствах. — Симметрические пространства. — Примеры симметрических пространств. — Совпадение классов симметрических и глобально симметрических пространств.

Глобально симметрические пространства

Из предложения 2 лекции 3 следует, что для любой точки $p \in \mathcal{X}$ связного локально симметрического пространства $\mathcal{X}$ существует не более одного аффинного отображения $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$, совпадающего на некоторой нормальной окрестности точки p с локально геодезической симметрией s_p. Это отображение — когда оно существует — называется *геодезической симметрией* в точке p и обозначается прежним символом s_p.

***Определение* 1**. Пространство аффинной связности $\mathcal{X}$ называется *глобально симметрическим пространством*, если оно связно и для любой точки $p \in \mathcal{X}$ существует — по доказанному единственная — геодезическая симметрия $s_p \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$.

Конечно, каждое глобально симметрическое пространство локально симметрично (и потому его тензор кривизны ковариантно постоянен).

Обратное утверждение имеет место в следующей формулировке.

Теорема 1. *Каждое геодезически полное, связное и односвязное локально симметрическое пространство $\mathcal{X}$ глобально симметрично.*

Задача 1. Докажите, что *любое глобально симметрическое пространство геодезически полно.* [Указание. Каждая определенная на конечном интервале геодезическая может быть продолжена посредством подходящей симметрии].

Таким образом, в теореме 1 не является необходимым лишь условие односвязности.

Ростки гладких отображений Для доказательства теоремы 1 нам удобно ввести одно понятие общематематического характера. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — многообразия и p — точка многообразия $\mathcal{X}$. Введем в рассмотрение множество всевозможных гладких отображений вида $f\colon U \to \mathcal{Y}$, где U — произвольная окрестность точки p в многообразии $\mathcal{X}$. Элементы $f_1\colon U_1 \to \mathcal{Y}$, $f_2\colon U_2 \to \mathcal{Y}$ этого множества называются *эквивалентными*, если существует такая окрестность U точки p, что $U \subset U_1 \cap U_2$ и $f_1|_U = f_2|_U$. Соответствующие классы эквивалентности $[f]_p$ называются *ростками в точке* $p \in \mathcal{X}$ *гладких отображений из* $\mathcal{X}$ *в* $\mathcal{Y}$. Множество всех таких ростков мы будем обозначать символом $G_p(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, а дизъюнктное объединение всех множеств $G_p(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $p \in \mathcal{X}$, — символом $G(\mathcal{X},\mathcal{Y})$:

$$G(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \coprod_{p\in\mathcal{X}} G_p(\mathcal{X},\mathcal{Y}).$$

Определим — очевидно, корректно — надъективные отображения

$$\alpha\colon G(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \to \mathcal{X}, \quad \beta\colon G(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \to \mathcal{Y}$$

формулами

$$\alpha[f]_p = p, \quad \beta[f]_p = f(p).$$

Каждое отображение $f\colon U \to \mathcal{Y}$ открытого множества $U \subset \mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ определяет над U сечение

$$\sigma_f\colon p \mapsto [f]_p, \qquad p \in U,$$

отображения α. Легко видеть, что пополненное пустым подмножеством множество $\{\sigma_f U\}$ всех подмножеств множества $G(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ вида $\sigma_f U$ замкнуто относительно пересечений. [Действительно, если для отображений $f\colon U \to \mathcal{Y}$, $g\colon V \to \mathcal{Y}$ пересечение $\sigma_f U \cap \sigma_g V$ непусто, то существуют точки $p \in U \cap V$, для которых $[f]_p = [g]_p$. Множество W всех таких точек открыто и

$$\sigma_f U \cap \sigma_g V = \sigma_h W,$$

где $h = f|_W$ (с равным правом можно считать, что $h = g|_W$).] Поэтому (см. лекцию III.7) множество $\{\sigma_f U\}$ является базой некоторой топологии на $G(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

В дальнейшем мы всегда будем считать $G(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ топологическим пространством, снабженным этой топологией.

Ясно, что тогда *отображения α и β непрерывны.* (Заметим, что $f = \beta \circ \sigma_f$ на U для любого $f\colon U \to \mathcal{Y}$.)

Задача 2. Покажите, что

а. *Отображение α является локальным гомеоморфизмом.* (Каждая точка $[f] \in G(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ обладает окрестностью, которую α гомеоморфно отображает на окрестность точки $p = \alpha[f]$.)

б. *Каждый слой $G(\mathcal{X},\mathcal{Y})_p = \alpha^{-1}(p)$ отображения α является дискретным подпространством пространства $G(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.*

в. *Топологическое пространство $G(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ не хаусдорфово* (хотя — напомним — многообразия $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ мы предполагаем хаусдорфовыми).

Свойство **в** показывает, что — несмотря на свойства **а** и **б** — отображение α накрытием не является. Однако, оно вполне может быть накрытием на некоторых подпространствах пространства $G(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Распространение аффинных отображений Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ являются пространствами аффинной связности одной и той же размерности n. Тогда в пространстве $G(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ будет определено подпространство $A(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, состоящее из ростков аффинных отображений $U \to \mathcal{Y}$.

Лемма 1. *Если $f\colon U \to \mathcal{Y}$ и $g\colon V \to \mathcal{Y}$ — такие аффинные отображения, что для некоторой точки*

$$[f]_{p_0} = [g]_{p_0},$$

то $f = g$ на компоненте пересечения $U \cap V$, содержащей точку p_0.

Доказательство. Немедленно следует из предложения 2 лекции 3. $\square$

Лемма 2. *Пусть пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ связны, локально симметричны и имеют одну и ту же кривизну. Пусть, кроме того, пространство $\mathcal{Y}$ геодезически полно. Тогда пространство $A(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ непусто и на каждой его компоненте отображение*

$$\alpha\colon A(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \to \mathcal{X}, \quad [f]_p \mapsto p,$$

является накрытием.

Доказательство. Достаточно доказать, что для каждой точки $p_0 \in \mathcal{X}$ существует окрестность, ровно накрытая отображением α (см. определение в лекции IV.2).

Оказывается, что *этим свойством обладает окрестность U, являющаяся нормальной окрестностью каждой своей точки.* Действительно, рассмотрим всевозможные множества вида $\sigma_f U$, где f — произвольное аффинное отображение $U \to \mathcal{Y}$. Все эти множества открыты, содержатся в $\alpha^{-1}U$, и в силу леммы 1 любые два из них либо совпадают, либо не пересекаются. (Заметим, что окрестность U, обладая свойством звездности, связна.) Кроме того, каждое из этих множеств отображение α гомеоморфно отображает на U (докажите!). Поэтому нужно лишь показать, что эти множества исчерпывают все множество $\alpha^{-1}U$ в $A(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, т. е. что для любого ростка $[g]_p \in A(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, где $p \in U$, существует такое аффинное отображение $f\colon U \to \mathcal{Y}$, что $[g]_p \in \sigma_f U$ (и, значит, такое, что $[g]_p = [f]_p$).

Пусть $q = g(p)$, и пусть $\varphi\colon \mathsf{T}_p\mathcal{X} \to \mathsf{T}_q\mathcal{Y}$ — дифференциал отображения g в точке p. Так как отображение g (определенное в некоторой окрестности V точки p, которую мы можем считать связной) аффинно, то отображеиие φ переводит тензор $R_p^{\mathcal{X}}$ в тензор $R_q^{\mathcal{Y}}$. Следовательно, согласно утверждению задачи 4 лекции 4 существует такое аффинное отображение $f\colon U \to \mathcal{Y}$, что $f(p) = q$ и $(df)_p = \varphi$. Для завершения доказательства остается заметить, что согласно лемме 1 это отображение совпадает на окрестности V с отображением g. $\square$

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — связные, локально симметрические пространства, и пусть U — связное открытое подмножество пространства $\mathcal{X}$. Если пространство $\mathcal{X}$ односвязно, а пространство $\mathcal{Y}$ геодезически полно, то для любого аффинного отображения $f\colon U \to \mathcal{Y}$ существует такое аффинное отображение $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, что*

$$f = F|_U.$$

Доказательство. Множество $\sigma_f U \subset A(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, являясь непрерывным образом связного множества U, связно. Поэтому оно содержится в однозначно определенной компоненте $A_f(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ пространства $A(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Отображение

$$\alpha\colon A_f(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \to \mathcal{X},$$

будучи по лемме 2 накрытием, является в силу односвязности пространства $\mathcal{X}$ гомеоморфизмом. Поэтому формула

$$F = \beta \circ \alpha^{-1}$$

корректно определяет непрерывное отображение $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A_f(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] & \mathcal{X} \arrow[d, "F"] \\
U \arrow[u, "\sigma_f"] \arrow[r, "f"] & \mathcal{Y}
\end{tikzcd}$$

Так как $\beta \circ \sigma_f = f$, а $\alpha \circ \sigma_f = i$, где i — вложение $U \to \mathcal{X}$, то

$$F|_U = F \circ i = \beta \circ \alpha^{-1} \circ \alpha \circ \sigma_f = f.$$

Кроме того, так как отображение α биективно, то для любой точки $p \in \mathcal{X}$ существует такое (единственное с точностью до эквивалентности) аффинное отображение $h\colon V \to \to \mathcal{Y}$, где V — некоторая связная окрестность точки p, что $[h]_p \in A_f(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Так как окрестность V связна, то для любой точки $q \in V$ росток $[h]_q = \sigma_h(q)$ принадлежит $A_f(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, и потому

$$h(q) = \beta[h]_q = (F \circ \alpha)[h]_q = F(q).$$

Это доказывает, что вблизи каждой точки $p \in \mathcal{X}$ отображение F совпадает с некоторым аффинным отображением. Поэтому отображение F также аффинно. $\square$

Заметим, что согласно лемме 1 *отображение F единственно.*

Задача 3. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и U — те же, что в предложении 1. Пусть, кроме того, $\mathcal{S}$ — произвольное многообразие и $f\colon \mathcal{S} \times U \to \mathcal{Y}$ — такое гладкое отображение, что для любого $s \in \mathcal{S}$ отображение $f^s\colon p \mapsto f(s,p)$, $p \in U$, аффинно. Согласно предложению 1 существует — единственное! — отображение $F\colon \mathcal{S} \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, обладающее тем свойством, что для любого $s \in \mathcal{S}$ отображение $F^s\colon p \mapsto F(s,p)$, $p \in \mathcal{X}$, аффинно и совпадает на U с отображением f^s. Докажите, что *отображение F гладко.*

Теперь мы уже можем доказать и теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Достаточно применить предложение 1 к случаю, когда $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, а f представляет собой локальную геодезическую симметрию. □

Теорема единственности

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{X}$ — односвязное глобально симметрическое пространство. Тогда для любого геодезически полного локально симметрического пространства $\mathcal{Y}$ той же кривизны, любых точек $p_0 \in \mathcal{X}$, $q_0 \in \mathcal{Y}$ и произвольного изоморфизма*

$$\varphi\colon \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \to \mathsf{T}_{q_0}\mathcal{Y}$$

касательных пространств, переводящего тензор $R^{\mathcal{X}}$ в точке p_0 в тензор $R^{\mathcal{Y}}$ в точке q_0, существует единственное аффинное отображение

$$f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y},$$

для которого $f(p_0) = q_0$ и $(df)_{p_0} = \varphi$.

Доказательство. Достаточно сопоставить предложение 1 с предложением 2 лекции 4. □

Следствие 1 (Теорема единственности). *Односвязные глобально симметрические пространства одной и той же кривизны аффинно изоморфны.* □

Редукция локально симметрических пространств к глобально симметрическим пространствам

Так как свойство локальной симметричности имеет локальный характер, то *если в аффинном накрытии $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ одно из пространств $\widetilde{\mathcal{X}}$ или $\mathcal{X}$ локально симметрично, то второе пространство также локально симметрично.*

Аналогично, поскольку кривая γ в $\widetilde{\mathcal{X}}$ тогда и только тогда представляет собой геодезическую, когда геодезической является ее проекция $\pi \circ \gamma$, то же самое верно и для (нелокального!) свойства геодезической полноты, т. е. *если в аффинном накрытии $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ одно из пространств $\widetilde{\mathcal{X}}$ или $\mathcal{X}$ геодезически полно, то второе пространство также геодезически полно.*

Сопоставляя эти утверждения и вспоминая, что для любого связного многообразия $\mathcal{X}$ существует накрытие $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ с односвязным многообразием $\widetilde{\mathcal{X}}$ (см. теорему 1 лекции IV.5), мы в силу теоремы 1 немедленно получим, что *для каждого связного и геодезически полного локально симметрического пространства существует глобально симметрическое накрывающее пространство (которое можно выбрать даже в классе односвязных пространств).*

Задача 4. Докажите, что *если пространство $\mathcal{Y}$ связно, то предусмотренное теоремой 2 отображение f является накрытием.*

Поскольку для любого локально (и, в частности, глобально) симметрического пространства $\tilde{\mathcal{X}}$ и любой его дискретно действующей группы Γ аффинных автоморфизмов многообразие орбит $\mathcal{X} = \tilde{\mathcal{X}}/\Gamma$ естественным образом определяется как локально симметрическое пространство (тогда и только тогда геодезически полное, когда геодезически полно пространство $\tilde{\mathcal{X}}$), мы получаем отсюда следующее предложение.

Предложение 2. *Связные и геодезически полные локально симметрические пространства — это в точности пространства аффинной связности, изоморфные пространствам вида $\mathcal{X}/\Gamma$, где $\mathcal{X}$ — односвязное геодезически полное глобально симметрическое пространство, а Γ — дискретно действующая группа его аффинных автоморфизмов.* □

Таким образом, описание всех геодезически полных локально (и, в частности, глобально) симметрических пространств сводится к описанию всех односвязных геодезически полных глобально симметрических пространств и к классификации всех дискретно действующих групп их аффинных автоморфизмов.

Свойства симметрий в глобально симметрических пространствах

В основе теории глобально симметрических пространств лежит следующее предложение.

Предложение 3. *В каждом глобально симметрическом пространстве $\mathcal{X}$ симметрии*

$$s_p\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad p \in \mathcal{X},$$

обладают следующими свойствами.

а. *Отображение*

$$\mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (p,q) \mapsto s_p q, \tag{1}$$

гладко.

б. *Каждая симметрия s_p является инволютивным преобразованием, т. е. $s_p \circ s_p = \mathrm{id}$.*

в. *Точка p является изолированной неподвижной точкой симметрии s_p, т. е. $s_p p = p$ и существует такая окрестность U точки p, что $s_p q \neq q$ для любой точки $q \in U \setminus \{p\}$.*

г. *Для любых двух точек $p, q \in \mathcal{X}$ имеет место равенство*

$$s_q \circ s_p \circ s_q = s_{p'}, \quad \text{где } p' = s_q p.$$

Доказательство. Пусть U — открытое множество пространства $\mathcal{X}$, являющееся нормальной окрестностью каждой своей точки. Тогда отображение

$$U \times U \to \mathcal{X}, \quad (p, q) \mapsto s_p q,$$

очевидным образом гладко. Поэтому согласно утверждению задачи 3 отображение (1) гладко на $U \times \mathcal{X}$. Поскольку множества U покрывают $\mathcal{X}$, это доказывает свойство **а**.

Свойство **б** вытекает в силу предложения 2 лекции 3 из инволютивности центральной симметрии $A \mapsto -A$, $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$.

Свойство **в** следует из того, что в окрестности U симметрия s_p является локальной геодезической симметрией

$$\exp_{p_0} A \mapsto \exp_{p_0}(-A).$$

Для доказательства свойства **г** рассмотрим составное отображение $f = s_q \circ s_p \circ s_q$ и точку $p' = s_q p$. Так как $s_q p' = p$, то $f(p') = (s_q \circ s_p)(p) = s_q p = p' = s_{p'} p'$. Аналогично, $(df)_{p'} A = -A = (ds_{p'})_{p'} A$ для любого вектора $A \in \mathsf{T}_{p'}\mathcal{X}$. Следовательно, согласно предложению 2 лекции 3 $f = s_{p'}$. □

Симметрические пространства

Предложение 3 служит мотивировкой следующего определения.

Определение 2. Связное хаусдорфовое гладкое многообразие $\mathcal{X}$ называется *симметрическим пространством*, если каждой точке $p \in \mathcal{X}$ сопоставлен диффеоморфизм

$$s_p\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

и эти диффеоморфизмы обладают свойствами а–г из предложения 3.

Подчеркнем, что в этом определении никаких дифференциально-геометрических понятий не используется. Оно предложено Лоосом (который, впрочем, условия связности не накладывает).

Гладкое отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ симметрических пространств называется их *морфизмом*, если для любой точки $p \in \mathcal{X}$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s_p"'] & \mathcal{Y} \arrow[d, "s_q"] \\ \mathcal{X} \arrow[r, "f"] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

где $q = f(p)$. Ясно, что все симметрические пространства и все их морфизмы образуют категорию (тождественное отображение и композиция двух морфизмов являются морфизмами; см. ниже лекцию 7).

Замечание 1. Отображение (1) является не чем иным, как некоторым умножением на $\mathcal{X}$. Поэтому симметрические пространства можно определить как связные хаусдорфовые гладкие многообразия $\mathcal{X}$, на которых задано такое гладкое умножение

$$\mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (p, q) \mapsto p \cdot q, \qquad (1')$$

что

1) $p \cdot p = p$, и существует такая окрестность U точки p, что $p \cdot q \neq q$ для любой точки $q \in U \setminus \{p\}$;

2) $p \cdot (p \cdot q) = q$;

3) $q \cdot (p \cdot (q \cdot r)) = (q \cdot p) \cdot r$.

С этой точки зрения морфизмы симметрических пространств — это просто их гомоморфизмы в общеалгебраическом смысле (гладкие отображения $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, для которых $f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q)$, $p, q \in \mathcal{X}$). В частности, это доказывает, что *морфизм симметрических пространств тогда и только тогда представляет собой изоморфизм, когда он является диффеоморфизмом.*

Примеры симметрических пространств

Пример-задача 1. Проверьте, что *каждая связная группа Ли $\mathcal{G}$ является симметрическим пространством с симметриями*

$$s_p q = pq^{-1}p, \qquad p, q \in \mathcal{G}. \tag{2}$$

[Указание. Существует такая окрестность U единицы e группы $\mathcal{G}$, что $q^2 = e$, $q \in U$, только при $q = e$.]

При $\mathcal{G} = \mathbb{R}^n$ симметрии (2) — это обычные центральные симметрии $\boldsymbol{x} \mapsto 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}$.

Пример-задача 2. Рассмотрим в $(n+1)$-мерном линейном пространстве $\mathcal{V}$ невырожденное (вообще говоря, не положительно определенное) скалярное умножение $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{xy}$ (в другой терминологии — см. лекцию II.12а — псевдоевклидову структуру на $\mathcal{V}$). Пусть $R \neq 0$, и пусть $\mathcal{X}$ — произвольная компонента сферы $\{\boldsymbol{x}\,;\, \boldsymbol{x}^2 = R\}$ пространства $\mathcal{V}$ (в стандартной евклидовой структуре на $\mathcal{V}$ это либо эллипсоид, либо пола гиперболоида). Покажите, что $\mathcal{X}$ *является симметрическим пространством с симметриями*

$$s_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = \frac{2\boldsymbol{xy}}{R}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}. \tag{3}$$

(В евклидовом пространстве это симметрии относительно прямых.)

Пример-задача 3. Пусть, как всегда, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, и пусть $G_{\mathbb{K}}(m, n)$ — многообразие всех m-мерных подпространств пространства $\mathbb{K}^n$ (см. задачу 1 лекции III.11). Покажите, что $G_{\mathbb{K}}(m, n)$ *является симметрическим пространством, симметрии которого индуцированы симметриями $\sigma_{\mathcal{P}}$ пространства $\mathbb{K}^n$ относительно подпространств $\mathcal{P} \in G_{\mathbb{K}}(m, n)$* (симметрня $\sigma_{\mathcal{P}}$ оставляет на месте все векторы из $\mathcal{P}$, а каждый вектор, ортогональный $\mathcal{P}$, заменяет на противоположный).

Пример-задача 4. Пусть $\mathcal{G}$ — связная группа Ли, $\sigma\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ — ее инволютивный автоморфизм, $\operatorname{Fix}(\sigma)$ — подгруппа группы $\mathcal{G}$, состоящая из всех элементов $a \in \mathcal{G}$, для которых $\sigma a = a$, а $\mathcal{G}_\sigma$ — подмножество группы $\mathcal{G}$, состоящее из всех элементов вида $a\sigma(a)^{-1}$, $a \in \mathcal{G}$. Так как подгруппа $\operatorname{Fix}(\sigma)$, очевидно, замкнута и, значит, является подгруппой Ли (см. теорему 1 лекции IV.15), то факторпространство

$\mathcal{G}/\operatorname{Fix}(\sigma)$ обладает естественной гладкостью (см. задачу 4 лекции IV.15). Поскольку же отображение $a \mapsto a\sigma(a)^{-1}$, $a \in \mathcal{G}$, индуцирует, как легко видеть, биективное отображение $\mathcal{G}/\operatorname{Fix}(\sigma) \to \mathcal{G}_\sigma$, эта гладкость естественным образом переносится в $\mathcal{G}_\sigma$. Проверьте, что *гладкое многообразие $\mathcal{G}_\sigma$ является симметрическим пространством с симметриями*

$$s_p q = c\sigma(c)^{-1}, \tag{4}$$

где $p = a\sigma(a)^{-1}$, $q = b\sigma(b)^{-1}$ и $c = a\sigma(a^{-1}b)$.

(Симметрии (4) являются не чем иным, как ограничениями симметрий (2) на $\mathcal{G}_\sigma$.)

Покажите также, что $\mathcal{G}_\sigma$ *является замкнутым подмногообразием группы $\mathcal{G}$.*

Пример-задача 5. Рассмотрим в условиях примера-задачи 4 произвольную подгруппу $\mathcal{H}$ группы $\mathcal{G}$, удовлетворяющую соотношениям

$$\operatorname{Fix}(\sigma)_e \subset \mathcal{H} \subset \operatorname{Fix}(\sigma). \tag{5}$$

Покажите, что

а. *Подгруппа $\mathcal{H}$ замкнута* (и потому является подгруппой Ли, а факторпространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ — гладким многообразием).

б. *Факторпространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ является симметрическим пространством с симметриями*

$$s_p q = a\sigma(a^{-1}b)\mathcal{H}, \qquad p = a\mathcal{H},\ q = b\mathcal{H}. \tag{6}$$

Мы будем обозначать это пространство символом $(\mathcal{G}/\mathcal{H})_\sigma$. При $\mathcal{H} = \operatorname{Fix}(\sigma)$ оно изоморфно пространству $\mathcal{G}_\sigma$ из примера-задачи 4.

В лекции 9 мы увидим, что пространства вида $(\mathcal{G}/\mathcal{H})_\sigma$ по существу исчерпывают все симметрические пространства.

Совпадение классов симметрических и глобально симметрических пространств

Согласно предложению 3 *каждое глобально симметрическое пространство является симметрическим пространством.* Оказывается, верно и обратное.

Предложение 4. *Каждое симметрическое пространство $\mathcal{X}$ обладает симметрической связностью ∇, по отношению к которой оно является глобально симметрическим пространством с симметриями s_p. Эта связность единственна.*

Таким образом, казалось бы очень общее определенне 2 не дает фактнческн ннчего нового.

Связность ∇ нз предложення 4 называется *канонической связностью* на снмметрнческом пространстве $\mathcal{X}$.

Для доказательства предложення 4 нам понадобнтся следующая лемма.

Лемма 3. *Для любой точки p_0 симметрического пространства $\mathcal{X}$ в линеале $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ имеет место равенство*

$$(ds_{p_0})_{p_0} = -\mathrm{id}.$$

Доказательство. Так как отображение s_{p_0} ннволютивно н $s_{p_0}p_0 = p_0$, то лннейный оператор $(ds_{p_0})_{p_0}$ также инволютивен, н, значит, лннеал $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ является прямой суммой подпространств, на одном нз которых оператор $(ds_{p_0})_{p_0}$ тождественен, а на другом равен $-\mathrm{id}$. Поэтому для доказательства леммы 3 достаточно доказать, что если для вектора $A \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ имеет место равенство $(ds_{p_0})_{p_0}A = A$, то $A = 0$.

Введя в $\mathcal{X}$ пронзвольную аффннную связность ∇' (впрочем, достаточно связность ∇' ввестн лишь в некоторой окрестности точкн p_0), рассмотрим связность

$$\nabla = \frac{\nabla' + s_{p_0}^* \nabla'}{2}$$

(см. лекцию IV.18). Для этой связностн $s_{p_0}^* \nabla = \nabla$, т. е. по отношенню к ∇ отображенне s_{p_0} аффннно. Поэтому каждую геодезнческую $t \mapsto \exp_{p_0} tA$ связностн ∇, проходящую при $t = 0$ через точку p_0, отображение s_{p_0} переводит в геодезическую $t \mapsto \exp_{p_0} tB$, где $B = (ds_{p_0})_{p_0}A$. В частностн, при $B = A$ отображение s_{p_0} оставляет на месте все точки $\exp_{p_0} tA$, что при $A \neq 0$ противоречит изолированности его неподвижной точки p_0. Следовательно, $A = 0$. $\square$

Замечание 2. Использованное в этом доказательстве рассуждение доказывает также, что если в симметрическое пространство $\mathcal{X}$ введена связность ∇, по отношению к которой все симметрии s_p, $p \in \mathcal{X}$, являются аффинными отображениями, то локально эти симметрии будут геодезическими симметриями и, значит, пространство $\mathcal{X}$ — глобально симметрическим пространством.

Имея все это в виду, мы можем теперь непосредственно приступить к доказательству предложения 4.

Доказательство предложения 4. Рассмотрим произвольную карту $(U, x^1, \ldots, x^n)$ многообразия $\mathcal{X}$. Из леммы 3 следует, что для любой точки $p_0 \in U$ симметрия s_{p_0} на окрестности U задается в карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ функциями вида

$$y^i = 2x_0^i - x^i + (b_{jk}^i)_0 (x^j - x_0^j)(x^k - x_0^k) + o(|x - x_0|^2), \quad (7)$$

$i = 1, \ldots, n$, где $x_0^1, \ldots, x_0^n$ — координаты точки p_0, а $(b_{jk}^i)_0$ — некоторые числа, гладко зависящие от точки p_0, т. е. являющиеся значениями в точке p_0 гладких функций b_{jk}^i, $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$, определенных в окрестности U. (В условной, но наглядной записи $b_{jk}^i = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 s_p^i}{\partial x^j \partial x^k}$ на U.)

Заметим, что в силу инволютивности x^i выражается через y^j точно так же, как y^i через x^j:

$$x^i = 2x_0^i - y^i + (b_{jk}^i)_0 (y^j - x_0^j)(y^k - x_0^k) + \ldots$$

(здесь — и в дальнейшем — мы заменяем o-член многоточием).

Пусть связность ∇ существует, и пусть Γ_{kj}^i — коэффициенты связности ∇ в карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$, а $(\Gamma_{kj}^i)_0$ — их значения в точке p_0. Так как относительно связности ∇ отображение s_{p_0} аффинно, то (см. свойство Б из предложения 1 лекции 3) на U имеет место тождество

$$\Gamma^i_{kj} \circ s_{p_0} = \frac{\partial y^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial y^k}\frac{\partial x^s}{\partial y^j}\Gamma^r_{ts} + \frac{\partial y^i}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial y^k \partial y^j}.$$

В частности

$$(\Gamma^i_{kj})_0 = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^r}\right)_0\left(\frac{\partial x^t}{\partial y^k}\right)_0\left(\frac{\partial x^s}{\partial y^j}\right)_0(\Gamma^r_{ts})_0 + \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^r}\right)_0\left(\frac{\partial^2 x^r}{\partial y^k \partial y^j}\right)_0 =$$
$$= (-\delta^i_r)(-\delta^t_k)(-\delta^s_j)(\Gamma^r_{ts})_0 + (-\delta^i_r)(2b^r_{kj})_0 = -(\Gamma^i_{kj})_0 - 2(b^i_{kj})_0,$$

и, значит,

$$(\Gamma^i_{kj})_0 = -(b^i_{kj})_0.$$

В силу произвольности точки $p_0 \in U$ этим доказано, что

$$\Gamma^i_{kj} = -b^i_{kj} \quad \text{на } U. \tag{8}$$

Таким образом, коэффициенты связности ∇ выражаются через коэффициенты рядов (7), задающих симметрии s_p. Поэтому связность ∇ единственна.

Для доказательства существования связности ∇ мы определим в каждой карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ функции Γ^i_{kj} формулой (8). Предложение 4 будет доказано, если мы покажем, что

а. *Эти функции являются коэффициентами некоторой связности*, т. е. (см. формулы (3) лекции 1) для любой другой карты $(U', x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ на пересечении $U \cap U'$ имеет место равенство

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^i_{kj} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\partial x^{j'}}, \tag{9}$$

где $\Gamma^{i'}_{k'j'}$ — функции (8), построенные для карты $(U', x^{1'}, \ldots$ $\ldots, x^{n'})$.

б. *Симметрии s_{p_0} являются по отношению к этой связности аффинными отображениями.*

Пусть на $U \cap U'$

$$x^{i'} = x^{i'}_0 + c^{i'}_i(x^i - x^i_0) + c^{i'}_{jk}(x^j - x^j_0)(x^k - x^k_0) + \ldots$$

и

$$x^i = x_0^i + c^i_{i'}(x^{i'} - x_0^{i'}) + c^i_{j'k'}(x^{j'} - x_0^{j'})(x^{k'} - x_0^{k'}) + \ldots,$$

где

$$c^{i'}_i = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_0, \quad c^{i'}_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}\right)_0,$$

$$c^i_{i'} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)_0, \quad c^i_{j'k'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}\right)_0.$$

Тогда, как мы знаем, матрицы $\|c^{i'}_i\|$ и $\|c^i_{i'}\|$ взаимно обратны. Кроме того, как показывает очевидное вычисление,

$$c^{i'}_{jk} = -c^{i'}_i c^i_{j'k'} c^{j'}_j c^{k'}_k.$$

В карте $(U', x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ отображение s_{p_0} задается формулами

$$y^{i'} = 2x_0^{i'} - x^{i'} + (b^{i'}_{j'k'})_0 (x^{j'} - x_0^{j'})(x^{k'} - x_0^{k'}) + \ldots,$$

где $b^{i'}_{j'k'}$ — функции b^i_{jk}, построенные для карты $(U', x^{1'}, \ldots$ $\ldots, x^{n'})$. С другой стороны,

$$y^{i'} = x_0^{i'} + c^{i'}_i (y^i - x_0^i) + c^{i'}_{jk}(y^j - x_0^j)(y^k - x_0^k) + \ldots$$

и, значит,

$$\begin{aligned} y^{i'} &= x_0^{i'} + c^{i'}_i \left(-(x^i - x_0^i) + (b^i_{jk})_0 (x^j - x_0^j)(x^k - x_0^k) + \ldots\right) + \\ &\qquad + c^{i'}_{jk}(x^j - x_0^j)(x^k - x_0^k) + \ldots = \\ &= x_0^{i'} + c^{i'}_i [-c^i_{j'}(x^{j'} - x_0^{j'}) - c^i_{j'k'}(x^{j'} - x_0^{j'})(x^{k'} - x_0^{k'}) - \ldots + \\ &\qquad + (b^i_{jk})_0 c^j_{j'} c^k_{k'} (x^{j'} - x_0^{j'})(x^{k'} - x_0^{k'}) + \ldots] + \\ &\qquad\qquad + c^{i'}_{jk} c^j_{j'} c^k_{k'} (x^{j'} - x_0^{j'})(x^{k'} - x_0^{k'}) + \ldots \end{aligned}$$

Поэтому

$$(b^{i'}_{j'k'})_0 = -c^{i'}_i c^i_{j'k'} + c^{i'}_i (b^i_{jk})_0 c^j_{j'} c^k_{k'} + c^{i'}_{jk} c^j_{j'} c^k_{k'}.$$

Поскольку

$$c^{i'}_{jk} c^j_{j'} c^k_{k'} = -c^{i'}_i c^i_{p'q'} c^{p'}_j c^{q'}_k c^j_{j'} c^k_{k'} = -c^{i'}_i c^i_{j'k'},$$

этим доказано, что

$$(b^{i'}_{j'k'})_0 = c^{i'}_i c^j_{j'} c^k_{k'} (b^i_{jk})_0 - 2c^{i'}_i c^i_{j'k'}.$$

Для завершения доказательства утверждения **а** остается заметить, что с точностью до обозначений это и есть соотношение (9), написанное в точке p_0.

Пусть теперь $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — изоморфные симметрические пространства и $\varphi\colon\ \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — произвольный изоморфизм. Легко видеть, что *по отношению к (построенным выше) каноническим связностям на $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ изоморфизм φ является аффиннитетом.*

Действительно, пусть $(U, x^1, \ldots, x^n)$ и $(V, y^1, \ldots, y^n)$ — такие карты многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, что $\varphi U = V$ и изоморфизм φ на U задается формулами

$$y^1 = x^1, \quad \ldots, \quad y^n = x^n \tag{10}$$

(действует по равенству координат). Тогда для любой точки $p_0 \in U$ симметрии s_{p_0} и s_{q_0}, где $q_0 = \varphi(p_0)$, будут выражаться в картах $(U, x^1, \ldots, x^n)$ и $(V, y^1, \ldots, y^n)$ одними и теми же формулами (отличающимися лишь обозначениями координат). Поэтому для обеих симметрий функции b^i_{jk} также будут совпадать и, значит, в картах U и V канонические связности будут иметь одни и те же коэффициенты (точнее, коэффициенты одной связности будут переходить в коэффициенты другой связности при подстановках (10)). Следовательно, отображение φ аффинно.

При $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ и $\varphi = s_{p_0}$ это дает утверждение **б**.

Тем самым предложение 4 полностью доказано. $\square$