ЛЕКЦИЯ 6

Инвариантная конструкция канонической связности. — Морфизмы симметрических пространств как аффинные отображения. — Левоинвариантные связности на группе Ли. — Связности Картана. — Левая связность Картана. — Правоинвариантные векторные поля. — Правая связность Картана.

Инвариантная конструкция канонической связности

Каноническую связность на симметрическом пространстве $\mathcal{X}$ (или, точнее, — соответствующие ковариантные производные) можно описать и инвариантным образом, не используя координат.

Каждая гладкая функция F на $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ и любая точка $q \in \mathcal{X}$ определяют на $\mathcal{X}$ гладкую функцию

$$F_q^{\mathrm{I}}\colon\ p \mapsto F(p,q), \qquad p \in \mathcal{X}$$

(*след функции F на q-уровне*). Пользуясь этим, мы можем каждому векторному полю X на $\mathcal{X}$ сопоставить векторное поле X^{I} на $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, определив его действие на произвольной функции $F \in \mathsf{F}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ формулой

$$(X^{\mathrm{I}}F)(p,q) = (XF_q^{\mathrm{I}})(p), \qquad (p,q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}.$$

(Мы интерпретируем здесь векторные поля как дифференцирования алгебры функций; см. лекцию III.16.) Аналогично определяется поле X^{II}:

$$(X^{\mathrm{II}}F)(p,q) = (XF_p^{\mathrm{II}})(q), \qquad (p,q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X},$$

где F_p^{II} — функция $q \mapsto F(p,q)$ на $\mathcal{X}$.

Так как для каждой функции f на $\mathcal{X}$ композиция $f \circ \mu$, где μ — умножение в $\mathcal{X}$ (см. замечание 1 лекции 5), является функцией на $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, то эта конструкция позволяет для любых двух полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ и любой функции $f \in \mathsf{F}\mathcal{X}$ построить на $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ функцию

$$X^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{II}}(f \circ \mu) = Y^{\mathrm{II}}X^{\mathrm{I}}(f \circ \mu).$$

Композиция $X^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{II}}(f \circ \mu) \circ \Delta$ этой функции с диагональным отображением $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $p \mapsto (p,p)$, будет, следовательно, функцией на $\mathcal{X}$. Мы определим оператор $X \cdot Y\colon \mathsf{F}\mathcal{X} \to \mathsf{F}\mathcal{X}$, положив

$$(X \cdot Y)f = X^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{II}}(f \circ \mu) \circ \Delta \tag{1}$$

для любой функции $f \in \mathsf{F}\mathcal{X}$.

Найдем выражение этого оператора в координатах.

Пусть $(U, x^1, \ldots, x^n)$ — произвольная карта многообразия $\mathcal{X}$. Как мы знаем (см. лекцию III.15), функции

$$x^1 \circ \mathrm{pr}_1, \quad \ldots, \quad x^n \circ \mathrm{pr}_1, \quad x^1 \circ \mathrm{pr}_2, \quad \ldots, \quad x^n \circ \mathrm{pr}_2$$

являются координатами на произведении $U \times U \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Мы обозначим координаты $x^1 \circ \mathrm{pr}_1, \ldots, x^n \circ \mathrm{pr}_1$ символами $x^1, \ldots, x^n$, а координаты $x^1 \circ \mathrm{pr}_2, \ldots, x^n \circ \mathrm{pr}_2$ — символами $y^1, \ldots, y^n$. Тогда для векторного поля $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ на U поля X^{I} и X^{II} на $U \times U$ будут задаваться формулами

$$X^{\mathrm{I}} = X^i(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad X^{\mathrm{II}} = X^i(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial y^i},$$

а умножение μ будет записываться в координатах вектор-функцией $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ с компонентами

$$\mu^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x^i - y^i + b^i_{jk}(\boldsymbol{x})(y^j - x^j)(y^k - x^k) + \ldots$$

(это в точности формулы (7) лекции 5, в которых x_0^i заменено на x^i, а x^i на y^i). Поэтому

$$X^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{II}}(f \circ \mu) = X^i(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j(\boldsymbol{y})\frac{\partial \mu^k}{\partial y^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right) =$$

$$= X^i(\boldsymbol{x})Y^j(\boldsymbol{y})\left(\frac{\partial^2 \mu^k}{\partial x^i \partial y^j}\frac{\partial f}{\partial x^k} + \frac{\partial \mu^l}{\partial x^i}\frac{\partial \mu^k}{\partial y^j}\frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^k}\right),$$

где

$$\frac{\partial \mu^l}{\partial x^i} = 2\delta^l_i - 2b^l_{ij}(y^j - x^j) + \ldots,$$

$$\frac{\partial \mu^k}{\partial y^j} = -\delta^k_j + 2b^k_{ij}(y^i - x^i) + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 \mu^k}{\partial x^i \partial y^j} = -2b^k_{ij} + \ldots,$$

и, следовательно,

$$X^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{II}}(f\circ\mu)\circ\Delta = X^iY^j\left(-2b_{ij}^k\frac{\partial f}{\partial x^k} - 2\delta_i^l\delta_j^k\frac{\partial^2 f}{\partial x^l\partial x^k}\right) = $$
$$= -2X^iY^j\left(b_{ij}^k\frac{\partial f}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right),$$

т. е.

$$X\cdot Y = -2X^iY^j\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j} + b_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right) \quad \text{на } U. \tag{2}$$

(Таким образом, мы видим, что $X\cdot Y$ является дифференциальным оператором в т о р о г о п о р я д к а.)

Чтобы получить дифференциальный оператор первого порядка (векторное поле), мы заметим, что

$$XY = X^iY^j\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j} + X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Поэтому

$$XY + \frac{1}{2}X\cdot Y = \left(X^i\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - b_{ij}^kX^iY^j\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

и, значит (см. формулу (8) лекции 5 и формулу (4) лекции 1),

$$\nabla_X Y = XY + \frac{1}{2}X\cdot Y \tag{3}$$

(на U, а потому — в силу произвольности окрестности U — и на всем $\mathcal{X}$).

Формулу (3) — с учетом формулы (1) — можно принять за о п р е д е л е н и е канонической связности на $\mathcal{X}$.

З а д а ч а 1. Докажите, что оператор кривизны канонической связности действует по формуле

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}(X\cdot(Y\cdot Z) - Y\cdot(X\cdot Z)), \qquad X,Y,Z\in\mathfrak{a}\mathcal{X}, \tag{4}$$

правая часть которой определяется очевидным образом.

[У к а з а н и е. Докажите предварительно, что $X(Y\cdot Z) = XY\cdot Z + Y\cdot XZ$.]

Морфизмы как аффинные отображения

Сравним теперь морфизмы и аффинные отображения симметрических пространств.

***Предложение* 1.** *Отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ симметрических пространств тогда и только тогда является морфизмом, когда оно представляет собой аффинное отображение (по отношению к каноническим связностям на $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$).*

Доказательство. Если отображение f аффиино, то для любой точки $p \in \mathcal{X}$ отображения $f \circ s_p$ и $s_{f(p)} \circ f$ также аффинны (поскольку каждая симметрия является по отношению к канонической связности аффинным отображением). С другой стороны, так как $(ds_p)_p = -\mathrm{id}$ и $(ds_{f(p)})_{f(p)} = -\mathrm{id}$, то

$$d(f \circ s_p)_p = -(df)_p = d(s_{f(p)} \circ f)_p,$$

и, значит, согласно предложению 2 лекции 3 эти отображения совпадают:

$$f \circ s_p = s_{f(p)} \circ f,$$

т. е. f является морфизмом.

Пусть теперь $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — произвольный морфизм симметрнческих пространств.

Задача 2. Докажите, что *если поля $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \mathfrak{a}\mathcal{Y}$ f-связаны с полями $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$, то оператор $\widehat{X} \cdot \widehat{Y}$ f-связан с оператором $X \cdot Y$ (т. е.*

$$(\widehat{X} \cdot \widehat{Y})\varphi \circ f = (X \cdot Y)(\varphi \circ f)$$

для любой гладкой функции φ на $\mathcal{Y}$).

Поскольку аналогнчное свойство, очевидным образом, имеет место и для оператора XY, это в силу формулы (3) доказывает, что отображение f удовлетворяет условию **А** из предложения 1 лекции 3, и, значит, это отображенне аффинно. □

Левоинвариантные связности на группе Ли

Интересные примеры связностей возникают в теории групп Ли. Пусть $\mathcal{G}$ — произвольная группа Ли.

***Определение* 1.** Связность ∇ на группе Ли $\mathcal{G}$ называется *левоинвариантной*, если для любых двух левоинвариатных векторных полей X и Y (элементов алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}\mathcal{G}$) поле $\nabla_X Y$ также левоинвариантно (принадлежит алгебре Ли $\mathfrak{g}$).

Задача 3. Покажите, что *связность* ∇ *на группе Ли* $\mathcal{G}$ *тогда и только тогда левоинвариантна, когда каждый левый сдвиг*

$$L_a\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \quad p \mapsto ap, \qquad a, p \in \mathcal{G},$$

является аффиннитетом. [Указание. См. свойство А аффинных отображений из предложения 1 лекции 3.]

Для каждой левоинвариантной связности ∇ формула

$$\alpha(X, Y) = \nabla_X Y, \qquad X, Y \in \mathfrak{g},$$

определяет некоторое отображение

$$\alpha\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}. \tag{5}$$

Это отображение, очевидно, $\mathbb{R}$-билинейно, т. е. является умножением на линейном пространстве $\mathfrak{g}$.

Задача 4. Покажите, что *каждый базис*

$$X_1, \quad \ldots, \quad X_n \tag{6}$$

алгебры $\mathfrak{g}$ *(над полем* $\mathbb{R}$*) является также базисом модуля* $\mathfrak{a}\mathcal{G}$ *(над алгеброй* $\mathsf{F}\mathcal{G}$*).* [Указание. Для каждой точки $a \in \mathcal{G}$ векторы $(X_1)_a, \ldots, (X_n)_a$ составляют базис линеала $\mathsf{T}_a\mathcal{G}$.]

Поэтому каждая левоинвариантная связность на $\mathcal{G}$ однозначно определяется полями $A_{ij} = \alpha(X_i, X_j)$: если $X = f^i X_i$ и $Y = g^j X_j$, где $f^i, g^j \in \mathsf{F}\mathcal{G}$, то

$$\nabla_X Y = f^i [(X_i g^j) X_j + g^j A_{ij}]. \tag{7}$$

При этом, как показывает автоматическая проверка, для любых полей $A_{ij} \in \mathfrak{g}$, $i, j = 1, \ldots, n$, формула (7) определяет левоинвариантное ковариантное дифференцирование на $\mathcal{G}$, для которого $\alpha(X_i, X_j) = A_{ij}$.

Следовательно, *соответствие*

$$\text{связность } \nabla \iff \text{умножение } \alpha$$

является биективным соответствием между левоинвариантными связностями на группе Ли $\mathcal{G}$ *и умножениями* α *на алгебре Ли* $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}\mathcal{G}$.

Ясио, что каждое умножение (5) единственииым образом представляется в виде

$$\alpha = \alpha' + \alpha'',$$

где α' — коммутатнвное (симметрическое), а α'' — антикоммутатнвное (кососимметрическое) умножения: достаточио положить

$$\alpha'(X,Y) = \frac{\alpha(X,Y)+\alpha(Y,X)}{2}, \quad \alpha''(X,Y) = \frac{\alpha(X,Y)-\alpha(Y,X)}{2}$$

для любых полей $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Задача 5. Покажите, что *умножение α тогда и только тогда антикоммутативно (т. е. $\alpha' = 0$), когда $\alpha(X,X) = 0$ для любого поля $X \in \mathfrak{g}$*. [Указание. Рассмотрите поле $\alpha(X+Y, X+Y)$.]

Из утверждения задачи 4 следует, что каждое $\mathsf{F}\mathcal{G}$-линейиое отображеиие

$$T\colon\ \mathfrak{a}\mathcal{G} \times \mathfrak{a}\mathcal{G} \to \mathfrak{a}\mathcal{G}$$

(тензор типа (2,1) на $\mathcal{G}$) однозначно определяется его значениями $T(X,Y)$ на полях $X, Y \in \mathfrak{g}$. В частности, это верно для тензора кручения произвольной левоинвариантной связности ∇. Но так как для этого теизора

$$\begin{aligned} T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = \alpha(X,Y) - \alpha(Y,X) - [X,Y] = \\ = 2\alpha''(X,Y) - [X,Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

то, следовательно, *левоинвариантная связность ∇ на группе Ли $\mathcal{G}$ тогда и только тогда симметрична, когда*

$$\alpha''(X,Y) = \frac{1}{2}[X,Y]$$

для любых полей $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Связности Картана При заданной на $\mathcal{G}$ связиости для каждого вектора $A \in \mathsf{T}_e\mathcal{G}$ через точку e группы $\mathcal{G}$ проходят две кривые, имеющие в этой точке касательный вектор A, — однопараметрическая подгруппа β_A и геодезическая γ_A.

***Определение* 2.** Левоинвариантная связность ∇ на группе Ли $\mathcal{G}$ называется *связностью Картана*, если для любого вектора $A \in \mathsf{T}_e\mathcal{G}$ кривые β_A и γ_A совпадают:

$$\beta_A = \gamma_A, \qquad A \in \mathsf{T}_e\mathcal{G}.$$

Задача 6. Докажите, что *для любой точки $a \in \mathcal{G}$ и любого вектора $A \in \mathsf{T}_a\mathcal{G}$ геодезической $\gamma_{a,A}$ связности Картана, проходящей при $t = 0$ через точку a и имеющей в этой точке касательный вектор A, является кривая $R_a \circ \beta_{A_0}$: $t \mapsto \beta_{A_0}(t)a$, где $A_0 = (dR_{a^{-1}})_a A$.*

В частности, отсюда следует, что *по отношению к произвольной связности Картана каждая группа Ли геодезически полна.*

Как мы знаем (см. лекцию IV.14), каждая однопараметрическая подгруппа $\beta = \beta_A$ представляет собой интегральную кривую левоинвариантного векторного поля $X \in \mathfrak{g}$, для которого $X_e = A$, т. е. ограничение поля X на β является полем касательных векторов $t \mapsto \dot\beta(t)$. Следовательно,

$$\frac{\nabla}{dt}\dot\beta(t) = (\nabla_X X)_{\beta(t)} = \alpha(X, X)_{\beta(t)} \qquad \text{для любого } t \in \mathbb{R};$$

откуда вытекает (поскольку левоинвариантное поле в том и только том случае тождественно равно нулю, когда оно равно нулю хотя бы в одной точке), что *подгруппа β_A тогда и только тогда является геодезической левоинвариантной связности ∇, когда $\alpha(X, X) = 0$.*

Значит (см. задачу 5), *левоинвариантная связность ∇ тогда и только тогда является связностью Картана, когда отвечающее этой связности умножение α антикоммутативно.*

Проще всего задать такое умножение формулой

$$\alpha(X, Y) = \lambda[X, Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{g},$$

где λ — некоторое число. Тензор кручения соответствующей связности будет принимать на полях $X, Y \in \mathfrak{g}$ значение

$$T(X, Y) = (2\lambda - 1)[X, Y], \qquad X, Y \in \mathfrak{g},$$

а для тензора кривизны будет иметь место формула

$$R(X, Y)Z = (\lambda^2 - \lambda)[[X, Y], Z], \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

При $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$ мы получаем отсюда, что *на любой группе Ли $\mathcal{G}$ существуют две естественные связности Картана, тензор кривизны которых тождественно равен нулю. Для первой связности*

$$\nabla_X Y = [X, Y] \quad \textit{при} \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \tag{8}$$

а для второй

$$\nabla_X Y = 0 \quad \textit{при} \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{9}$$

Для тензоров кручения этих связностей имеет место формула

$$T(X, Y) = \varepsilon[X, Y] \quad \textit{при} \quad X, Y \in \mathfrak{g},$$

где $\varepsilon = 1$ для связности (8) *и $\varepsilon = -1$ для связности* (9).

Кроме того, мы видим, что *на любой группе Ли $\mathcal{G}$ существует единственная симметрическая связность Картана. Для этой связности*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] \quad \textit{при} \quad X, Y \in \mathfrak{g} \tag{10}$$

и

$$R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z] \quad \textit{при} \quad X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \tag{11}$$

Задача 7. Докажите, что *для связностей* (8) *и* (9) *тензор кручения T ковариантно постоянен:*

$$\nabla T = 0.$$

[Указание. Воспользуйтесь общей формулой (9) лекции 2 (при $r = 2$).]

Связность (10) является полусуммой связностей (8) и (9) и на этом основании называется иногда *средней связностью.*

Тот факт, что однопараметрические подгруппы являются геодезическими связности Картана, объясняет отмеченный в замечании 1 лекции 1 феномен.

Задача 8. Являясь симметрическим пространством (см. пример-задачу 1 лекции 5), группа $\mathcal{G}$ обладает канонической связностью. Покажите, что *этой связностью является средняя связность* (10).

В частности, отсюда следует, что *тензор кривизны связности* (10) *ковариантно постоянен:*

$$\nabla R = 0.$$

Задача 9. Выведите это свойство непосредственно из формулы (11).

Левая связность Картана Ясно, что условие $\nabla_X Y = 0$ тогда и только тогда выполнено для всех полей $X \in \mathfrak{a}\mathcal{G}$, когда оно выполнено для всех левоинвариантных полей $X \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$. Поэтому если мы имеем дело со связностью (9), то поле $Y = f^i X_i$ (где $X_1, \dots, X_n$ — базис (6), а $f^1, \dots, f^n \in \mathsf{F}\mathcal{G}$) тогда и только тогда ковариантно постоянно (условие $\nabla_X Y = 0$ выполнено для всех полей $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$), когда $Xf^i = 0$ для любого $i = 1, \dots, n$ и любого поля $X \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$. Но если $Xf^i = 0$ для любого поля $X \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$, то, очевидно, $Xf^i = 0$ для любого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{G}$ (см. задачу 4), и потому $f^i = \text{const}$, т. е. $Y \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$. Это доказывает, что *поля $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{G}$, ковариантно постоянные относительно связности* (9), *— это в точности левоинвариантные поля $Y \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$.*

В частности, отсюда следует, что для любого пути $u\colon I \to \mathcal{G}$, соединяющего точку p с точкой q, параллельный перенос Π_u, отвечающий связности (9), обладает тем свойством, что $\Pi_u X_p = X_q$ для любого поля $X \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$. Но ясно, во-первых, что это свойство однозначно характеризует линейное отображение $\Pi_u\colon \mathsf{T}_p\mathcal{G} \to \mathsf{T}_q\mathcal{G}$ и, во-вторых, что им обладает также линейное отображение $(dL_a)_p\colon \mathsf{T}_p\mathcal{G} \to \mathsf{T}_q\mathcal{G}$, где $a = qp^{-1}$. Поэтому $\Pi_u = (dL_a)_p$ и, значит, Π_u не зависит от выбора пути u. Это означает, что *по отношению к связности* (9) *группа Ли $\mathcal{G}$ является пространством с абсолютным параллелизмом* (даже если группа $\mathcal{G}$ не односвязна!). Параллельными переносами относительно этой связности являются дифференциалы левых сдвигов L_a.

На этом основании связность (9) называется обычно *левой* связностью Картана на группе Ли $\mathcal{G}$.

Правоинвариантные векторные поля Векторное поле Y на группе Ли $\mathcal{G}$ называется *правоинвариантным*, если для любых элементов $a, b \in \mathcal{G}$ выполнено равенство

$$(dR_{a^{-1}b})Y_a = Y_b \tag{12}$$

где $R_{a^{-1}b}\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ — правый сдвиг $x \mapsto xa^{-1}b$ на элемент $a^{-1}b$.

Диффеоморфизм обращения ν: $x \mapsto x^{-1}$ переводит правые сдвиги в левые и, значит, правоинвариантные поля в левоинвариантные. Поэтому свойства правоинвариантных полей полностью аналогичны свойствам полей левоинвариантных. В частности

а. *Проходящие через точку e траектории правоинвариантных векторных полей — это в точности однопараметрические подгруппы группы $\mathcal{G}$ (проходящие через точку e траектории левоинвариантных полей).*

б. *Правоинвариантные векторные поля составляют подалгебру $\mathfrak{r}\mathcal{G}$ алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathcal{G}$ всех гладких векторных полей на $\mathcal{G}$.*

в. *Отображение $Y \mapsto Y_e$ является изоморфизмом линеала $\mathfrak{r}\mathcal{G}$ на касательное пространство $\mathsf{T}_e\mathcal{G}$ (с обратным изоморфизмом $B \mapsto Y$, $B \in \mathsf{T}_e\mathcal{G}$, где $Y_a = (dR_a)_e B$ для любой точки $a \in \mathcal{G}$).*

г. *Каждый базис*

$$Y_1, \quad \ldots, \quad Y_n \tag{13}$$

линеала $\mathfrak{r}\mathcal{G}$ (над полем $\mathbb{R}$) является базисом (над алгеброй $\mathsf{F}\mathcal{G}$) модуля $\mathfrak{a}\mathcal{G}$.

Задача 10. Докажите утверждения а–г непосредственно, без ссылки на теорию левоинвариантных полей.

Задача 11. Докажите, что *алгебра $\mathfrak{r}\mathcal{G}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{l}\mathcal{G}$.* [Указание. Изоморфизм задается отображением ν^*: $\mathfrak{a}\mathcal{G} \to \mathfrak{a}\mathcal{G}$, где ν: $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ — диффеоморфизм обращения $x \mapsto x^{-1}$.]

Для любых векторов $A, B \in \mathsf{T}_e\mathcal{G}$ мы положим

$$[A, B]_l = [X, Y]_e,$$

где X, Y — такие левоинвариантные векторные поля на $\mathcal{G}$, что $X_e = A$, $Y_e = B$. (Операция $[\ ,\ ]_l$ является не чем иным, как операцией $[\ ,\ ]$ алгебры Ли $\mathfrak{l}\mathcal{G}$, перенесенной в линеал $\mathsf{T}_e\mathcal{G}$ посредством изоморфизма $\mathfrak{l}\mathcal{G} \to \mathsf{T}_e\mathcal{G}$; см. лекцию IV.13.) Аналогично в $\mathsf{T}_e\mathcal{G}$ переносится операция Ли и из алгебры Ли $\mathfrak{r}\mathcal{G}$:

$$[A, B]_r = [X, Y]_e,$$

где X, Y — правоинвариантные векторные поля на $\mathcal{G}$, для которых $X_e = A$, $Y_e = B$.

Задача 12. Покажите, что

$$[A, B]_r = -[A, B]_l.$$

Предложение 2. *Векторное поле Y на группе Ли $\mathcal{G}$ тогда и только тогда правоинвариантно, когда для* *любого левоинвариантного поля $X \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$ имеет место равенство*

$$[X, Y] = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Напомним (см. формулу (14) лекции III. 17), что для любого векторного поля $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{G}$ и любой гладкой функции $f \in \mathsf{F}\mathcal{G}$ функция Yf может быть определена формулой

$$(Yf)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\varphi_p(t)) - f(p)}{t}, \qquad p \in \mathcal{G},$$

где $\varphi_p\colon\ t \mapsto \varphi_p(t)$ — траектория поля Y, проходящая при $t = 0$ через точку p. В случае, когда поле Y правоинвариантно, траектория φ_p задается формулой

$$\varphi_p(t) = \beta(t)p = L_{\beta(t)}p,$$

где $\beta\colon\ t \mapsto \beta(t)$ — траектория, проходящая при $t = 0$ через точку e (т. е. некоторая однопараметрическая подгруппа). Поэтому в этом случае

$$Yf = \lim_{t\to 0} \frac{f \circ L_{\beta(t)} - f}{t},$$

где предел понимается как поточечный предел функций на группе $\mathcal{G}$. В частности, применив эту формулу к функции Xf, где $X \in \mathfrak{a}\mathcal{G}$, мы получим, что

$$YXf = \lim_{t\to 0} \frac{(Xf) \circ L_{\beta(t)} - Xf}{t}.$$

С другой стороны, так как оператор X перестановочен, очевидно, с поточечным пределом, то

$$XYf = \lim_{t\to 0} \frac{X(f \circ L_{\beta(t)}) - Xf}{t}.$$

Но если поле X левоинвариантно, то $(Xf) \circ L_{\beta(t)} = X(f \circ L_{\beta(t)})$, и, значит, в этом случае $XYf = YXf$, т. е. $[X, Y]f = 0$. Этим доказано, что любое правоинвариантное поле удовлетворяет условию (14).

Обратно, пусть Y — произвольное поле на группе $\mathcal{G}$, удовлетворяющее условию (14). Выбрав в линеале $\mathfrak{r}\mathcal{G}$ базис (9), представим поле Y в виде $f^i Y_i$, где $f^i \in \mathsf{F}\mathcal{G}$. Тогда для любого поля $X \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$ будет иметь место равенство

$$[X, Y] = (Xf^i)Y_i + f^i[X, Y_i] = (Xf^i)Y_i$$

(ибо по уже доказанному $[X, Y_i] = 0$). Поскольку $[X, Y] = 0$, это возможно только при $Xf^i = 0$, т. е. при $f^i = \mathrm{const}$. Следовательно, $Y \in \mathfrak{r}\mathcal{G}$. $\square$

Правая связность Картана Теперь легко видеть, что *векторное поле Y на группе Ли $\mathcal{G}$ тогда и только тогда ковариантно постоянно относительно связности* (8), *когда оно правоинвариантно.* Действительно, если $X \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$, то ковариантная производная $\nabla_X Y$ относительно связности (8) произвольного поля $Y = f^i X_i$, где $X_1, \ldots, X_n$ — базис (6), а $f^1, \ldots, f^n \in \mathsf{F}\mathcal{G}$, будет выражаться формулой

$$\nabla_X Y = (Xf^i)X_i + f^i[X, X_i] = [X, f^i X_i] = [X, Y],$$

и, значит, $\nabla_X Y = 0$ тогда и только тогда, когда $[X, Y] = 0$. С другой стороны, в силу утверждения задачи 4 равенство $\nabla_X Y = 0$ тогда и только тогда имеет место для любого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{G}$, когда оно имеет место при $X \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$. $\square$

Поэтому (см. выше аналогичное рассуждение для связности (9)) *по отношению к связности* (8) *группа Ли $\mathcal{G}$ является пространством с абсолютным параллелизмом, параллельными переносами в котором служат дифференциалы правых сдвигов R_a.*

На этом основании связность (8) называется *правой* связностью Картана на группе Ли.

Задача 13. Докажите, что

а *отображение $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ тогда и только тогда аффинно по отношению к одной из связностей Картана* (8), (9), (10), *когда оно аффинно по отношению к каждой из них;*

б *левые и правые сдвиги L_a, $R_a\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ являются аффиннитетами по отношению к каждой из связностей* (8), (9), (10).

Замечание 1. Как уже отмечалось, для связности (9) равенство $\nabla_X Y = 0$ тогда и только тогда имеет место для любого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{G}$, когда $Y \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$. Аналогично, для связности (8) равенство $\nabla_X Y = [X, Y]$ тогда и только тогда имеет место для любого поля $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{G}$, когда $X \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$.