ЛЕКЦИЯ 7

Категории. — Функторы. — Функтор Ли. — Ядро и образ гомоморфизма групп Ли. — Теорема Кембелла — Хаусдорфа. — Многочлены Дынкина. — Групускулы Ли. — Биективность функтора Ли.

Категории Основная цель этой лекции — изложить процедуру восстановления группы Ли по ее алгебре Ли. Кроме того, пользуясь случаем, мы излагаем здесь иекоторые общематематические понятия, которые нами уже неоднократно упоминались en passant.

Опыт построения математических теорий уже сравнительно давно показал, что наряду с объектами теории — являющимися обычно множествами, снабженными той или иной структурой, — равноправную, а иногда и более важную роль играют отображения, сохраняющие эту структуру: в алгебре — гомоморфизмы, в топологии — непрерывные отображения, в теории многообразий — гладкие отображения. Оказывается, что учет этого обстоятельства позволяет дать абстрактную экспликацию интуитивного понятия поля действия математической теории.

Пусть $\mathbf{C}$ — класс, являющийся дизъюнктным объединением двух классов $\operatorname{Ob}\mathbf{C}$ и $\operatorname{Ar}\mathbf{C}$. Элементы класса $\operatorname{Ob}\mathbf{C}$ называются *объектами*, а элементы класса $\operatorname{Ar}\mathbf{C}$ — *стрелками* или *морфизмами*.

Предполагается, что каждому морфизму $f \in \operatorname{Ar}\mathbf{C}$ сопоставлено два объекта A, B, что записывается формулой $f\colon A \to B$ (или $A \xrightarrow{f} B$). Все морфизмы вида $f\colon A \to B$ с данными A и B образуют множество, которое обозначается символом $\mathbf{C}(A, B)$ или $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ (употребляется также обозначение $\operatorname{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B)$). О морфизмах из $\mathbf{C}(A, B)$ говорят, что они являются *морфизмами из A в B*.

Далее, предполагается, что для любых трех объектов $A, B, C \in \operatorname{Ob}\mathbf{C}$ задано отображение

$$\mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(B, C) \to \mathbf{C}(A, C),$$

сопоставляющее любым двум морфизмам $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ морфизм из A в C, обозначаемый символом $g \circ f$ (обратите внимание на порядок записи!) и называемый *композицией* морфизмов f и g. Операция $\circ$ должна обладать свойством ассоциативности, т. е. для любых объектов A, B, C, D и любых морфизмов $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$ должно иметь место равенство

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Наконец, предполагается, что для любого объекта $A = \mathrm{Ob}\,\mathbf{C}$ в множестве $\mathbf{C}(A, A)$ (обозначаемом также символом $\mathrm{End}_{\mathbf{C}} A$) указан некоторый элемент id_A, обладающий тем свойством, что для любых объектов B и C и любых морфизмов $f\colon A \to B$ и $g\colon C \to A$ имеют место равенства

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \quad \mathrm{id}_A \circ g = g.$$

Морфизм id_A называется *тождественным морфизмом* объекта и часто обозначается также символом 1_A. Впрочем, обычно вместо id_A (и 1_A) пишут просто id (или, соответственно, 1).

Класс $\mathbf{C}$, обладающий описанной структурой, называется *категорией.*

Примеры категорий.

1) Категория LIN($\mathbf{K}$) конечномерных линейных пространств над полем $\mathbf{K}$ и их линейных отображений.

2) Категория TOP топологических пространств и их непрерывных отображений.

3) Категория DIFF гладких многообразий и их гладких отображений.

4) Категория GROUPS всех групп и всех их гомоморфизмов.

5) Категория LIE всех групп Ли и всех их гомоморфизмов (гладких отображений $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$, сохраняющих умножение).

6) Категория lie = lie($\mathbb{R}$) всех конечномерных алгебр Ли над полем $\mathbb{R}$ и всех их гомоморфизмов.

И т. д. и т. п.

О категориях TOP и DIFF мы уже говорили в лекции III.7. Категории LIE и lie уже рассматривались в Семестре V (См. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1982), но обозначались они по иному.

Обратим внимание на то, что в примерах 1)–6) объектами являются множества, снабженные той или иной структурой, а стрелками — отображения множеств. Подчеркнем, что, вообще говоря, от категории этого не требуется. В случае же, когда объекты являются множествами, а стрелки — их отображениями, для проверки того, что мы имеем дело с категорией, достаточно убедиться, что тождественные отображения и композиции морфизмов являются морфизмами.

Функторы Среди разнообразных математических конструкций (сопоставляющих объектам одной категории объекты другой — или той же самой — категории) выделяются конструкции, воспринимаемые нами как «естественные». Интуитивно они характеризуются тем, что не содержат никаких элементов произвола. Однако, формализовать это свойство, по-видимому, не легко. Около пятидесяти лет тому назад Маклейн и Эйленберг заметили, что естественные конструкции над объектами всегда могут быть распространены на морфизмы, и предложили положить это свойство в основу формальной экспликации понятия естественной конструкции.

Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ — две категории. Отображение

$$\Phi\colon \operatorname{Ob}\mathbf{C} \to \operatorname{Ob}\mathbf{D} \tag{1}$$

называется *естественной конструкцией*, если существует отображение

$$\Phi\colon \operatorname{Ar}\mathbf{C} \to \operatorname{Ar}\mathbf{D}, \tag{1'}$$

удовлетворяющее одному из следующих двух наборов условий: либо

а если $f\colon A \to B$, то $\Phi(f)\colon \Phi(A) \to \Phi(B)$;

б если $f = \mathrm{id}_A$, то $\Phi(f) = \mathrm{id}_{\Phi(A)}$;

в если $f = h \circ g$, то $\Phi(f) = \Phi(h) \circ \Phi(g)$,

либо

а′ если $f\colon A \to B$, то $\Phi(f)\colon \Phi(B) \to \Phi(A)$;

б′ если $f = \mathrm{id}_A$, то $\Phi(f) = \mathrm{id}_{\Phi(A)}$;

в′ если $f = h \circ g$, то $\Phi(f) = \Phi(g) \circ \Phi(h)$.

Об отображении (1′), удовлетворяющем условиям **а**, б, **в** или а′, б′, **в′**, говорят, что оно обладает *свойством функториальности*, а об отображениях (1) и (1′) вместе, — что они составляют *функтор* (когда выполнены условия **а**, б, **в**) или *кофунктор* (когда выполнены условия а′, б′, **в′**) из категории $\mathbf{C}$ в категорию $\mathbf{D}$. При этом отображение (1) называется *объектной частью*, а отображение (1′) — *стрелочной частью* функтора (кофунктора) Φ. Таким образом, конструкция естественна, если она является объектной частью некоторого функтора или кофунктора.

Заметим, что стрелочная часть (ко)функтора однозначно определяет его объектную часть.

Функторы называются также *ковариантными функторами*, а кофункторы — *контравариантными функторами*.

Свойство функториальности у нас уже фактически многократно встречалось. Например, им обладают соответствия $f \mapsto f^*$ из лекции III.18, с. 296, и соответствие $\varphi \mapsto \varphi^*$ из лекции III.20, с. 311. См. также в лекции IV.4, с. 61, соответствие $h \mapsto h_*$, и в лекции IV.23, с. 409, соответствие $f \to f^\bullet$. [К о н т р о л ь н ы й в о п р о с. Естественна ли конструкция $\mathcal{X} \mapsto \mapsto \mathbf{T}\mathcal{X}$ из лекции III.15, с. 252?]

Функтор Ли Рассмотрим вопрос об естественности конструкции

$$\text{группа Ли } \mathcal{G} \implies \text{алгебра Ли } \mathfrak{l}\mathcal{G}. \tag{2}$$

[Весь дальнейший материал этой лекции может быть найден в Семестре V (см., в частности, лекции V.3 — V.12), но — как уже было сказано в предисловии — мы дадим здесь независимое изложение (правда, опустив наиболее трудные доказательства).]

Пусть $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ — произвольный гомоморфизм групп Ли. Напомним (см. лекцию 3), что поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{G}$, $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{H}$ называются *f-связанными*, если

$$Y_{f(a)} = (df)_a X_a$$

для любой точки $a \in \mathcal{G}$.

Предложение 1. *Для любого левоинвариантного поля $X \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$ существует единственное левоинвариантное поле $Y \in \mathfrak{l}\mathcal{H}$, которое f-связано с полем X.*

Доказательство. Если поле Y существует, то $Y_e = (df)_e X_e$ и $Y_b = (dL_b)_e Y_e$ для любой точки $b \in \mathcal{H}$, т. е.

$$Y_b = (dL_b)_e (df)_e X_e, \qquad b \in \mathcal{H}. \tag{3}$$

Это доказывает единственность поля Y.

Для доказательства существования поля Y мы определим его формулой (3), т. е. формулой

$$Y_b = d(L_b \circ f)_e X_e, \qquad b \in \mathcal{H}.$$

Ясно, что это поле левоинвариантно (принадлежит $\mathfrak{l}\mathcal{H}$). Кроме того, так как $L_{f(a)} \circ f = f \circ L_a$ для любой точки $a \in \mathcal{G}$ (ибо $f(ax) = f(a)f(x)$), то

$$Y_{f(a)} = d(f \circ L_a)_e X_e = (df)_a (dL_a)_e X_e = (df)_a X_a,$$

и, значит, поле Y f-связано с полем X. □

Обозначив поле Y через $\mathfrak{l}(f)X$, мы, следовательно, получим некоторое — очевидно, линейное — отображение

$$\mathfrak{l}(f)\colon \mathfrak{l}\mathcal{G} \to \mathfrak{l}\mathcal{H},$$

являющееся согласно утверждению задачи 5 лекции III.17 гомоморфизмом алгебр Ли. Поскольку соответствие $f \mapsto \mathfrak{l}(f)$ обладает, как легко видеть, свойствами **а**, **б**, и **в**, это доказывает, что *конструкция* (2) *естественна*.

При отождествлении алгебр $\mathfrak{l}\mathcal{G}$ и $\mathfrak{l}\mathcal{H}$ с касательными пространствами $\mathsf{T}_e\mathcal{G}$ и $\mathsf{T}_e\mathcal{H}$ (см. лекцию IV.13) гомоморфизм $\mathfrak{l}(f)$ будет не чем иным, как дифференциалом

$$(df)_e\colon \mathsf{T}_e\mathcal{G} \to \mathsf{T}_e\mathcal{H} \tag{4}$$

отображения f в точке e.

Построенный функтор $\mathcal{G} \mapsto \mathfrak{l}\mathcal{G}$, $f \mapsto \mathfrak{l}(f)$ из категории LIE в категорию lie называется *функтором Ли* (*левым*).

Задача 1. Докажите, что *при интерпретации элементов алгебр Ли $\mathfrak{l}\mathcal{G}$ и $\mathfrak{l}\mathcal{H}$ как однопараметрических подгрупп (см. лекцию IV.14)) гомоморфизм $\mathfrak{l}(f)$ задается соответствием*

$$\beta \mapsto f\circ\beta, \qquad \beta\colon \mathbb{R}\to\mathcal{G}. \tag{5}$$

[Указание. Формула (5) означает, что для любого гомоморфизма $f\colon \mathcal{G}\to\mathcal{H}$ групп Ли имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathfrak{l}(f)"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "f"] & \mathcal{H}, \end{tikzcd} \tag{6}$$

где $\mathfrak{g}=\mathfrak{l}\mathcal{G}$, $\mathfrak{h}=\mathfrak{l}\mathcal{H}$.]

Аналогично строится *правый функтор Ли* $\mathcal{G}\mapsto \mathfrak{r}\mathcal{G}$, $f\mapsto \mathfrak{r}(f)$

Задача 2. Покажите, что при соответствующих отождествлениях гомоморфизм $\mathfrak{r}(f)$ задается теми же формулами (4) и (5). (Переход от $\mathfrak{l}\mathcal{G}$ к $\mathfrak{r}\mathcal{G}$ меняет лишь направление движения на однопараметрических подгруппах; ср. задачу 11 лекции 6.)

Ядро и образ гомоморфизма групп Ли

Ядро $\operatorname{Ker} f$ произвольного гомоморфизма $f\colon \mathcal{G}\to\mathcal{H}$ групп Ли, являясь замкнутой подгруппой группы Ли $\mathcal{G}$, будет подгруппой Ли этой группы (см. теорему 1 лекции IV.15). Ее алгебра Ли состоит из таких полей $X\in\mathfrak{g}$, что для всех t имеет место равенство $f(\exp tX)=e$, т. е. — см. диаграмму (6) — равенство $\exp(t\mathfrak{l}(f)X)=e$. Поскольку равенство $\exp tY=e$ имеет место для всех t тогда и только тогда, когда $Y=0$, этим доказано, что *алгеброй Ли ядра гомоморфизма f служит ядро гомоморфизма* $\mathfrak{l}(f)$:

$$\mathfrak{l}(\operatorname{Ker} f)=\operatorname{Ker}\mathfrak{l}(f).$$

Аналогично, пусть $\operatorname{Im} f$ — образ гомоморфизма f (являющийся абстрактной, но в отличие от ядра, вообще говоря, незамкнутой подгруппой группы $\mathcal{H}$), и пусть $\mathcal{J}$ — связная подгруппа Ли группы $\mathcal{H}$, отвечающая подалгебре $\operatorname{Im}\mathfrak{l}(f)=\mathfrak{l}(f)\mathcal{G}$ алгебры Ли $\mathfrak{h}=\mathfrak{l}\mathcal{H}$. Так как подгруппа $\mathcal{J}$ порождается элементами вида $\exp\mathfrak{l}(f)X=f(\exp X)$, $X\in\mathfrak{g}$, а компонента единицы $\mathcal{G}_e$ группы $\mathcal{G}$ — элементами $\exp X$, то f отображает $\mathcal{G}_e$ на $\mathcal{J}$. Так как

$$\mathcal{G}=\coprod_{a\in A} a\mathcal{G}_e,$$

где A — семейство представителей смежных классов группы $\mathcal{G}$ по подгруппе $\mathcal{G}_e$, то, следовательно,

$$\operatorname{Im} f = \coprod_{b \in B} b\mathcal{J},$$

где B — семейство представителей смежных классов абстрактной группы $\operatorname{Im} f$ по ее подгруппе $\mathcal{J}$. Мы перенесем гладкость с $\mathcal{J}$ на $b\mathcal{J}$, $b \in B$ посредством биективного отображения L_b: $x \mapsto bx$, $x \in \mathcal{J}$, а затем введем в $\operatorname{Im} f$ топологию (и гладкость), считая все гладкие многообразия $b\mathcal{J}$ компонентами связности группы $\operatorname{Im} f$. Ясно, что тем самым мы корректно введем на $\operatorname{Im} f$ структуру гладкой подгруппы группы Ли $\mathcal{H}$, по отношению к которой отображение $\mathcal{G} \to \operatorname{Im} f$, $a \mapsto f(a)$, $a \in \mathcal{G}_0$, будет гладко. Таким образом, *образ* $\operatorname{Im} f$ *любого гомоморфизма* f: $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ *групп Ли является подгруппой Ли группы Ли* $\mathcal{H}$.

При этом $(\operatorname{Im} f)_e = \mathcal{J}$ и, значит, *алгеброй Ли подгруппы* $\operatorname{Im} f$ *служит подалгебра* $\operatorname{Im} \mathfrak{l}(f)$ *алгебры Ли* $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}\mathcal{H}$:

$$\mathfrak{l}(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im} \mathfrak{l}(f).$$

[Заметим, что подпространством топологического пространства $\mathcal{H}$ подгруппа $\operatorname{Im} f$, вообще говоря, н е я в л я е т с я.]

Мы знаем (см. задачу 4 лекции IV.15), что для любой замкнутой подгруппы $\mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{G}$ в факторпространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ естественным образом вводится гладкая структура, по отношению к которой каноническое отображение

$$\mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}, \quad a \mapsto a\mathcal{H}, \qquad a \in \mathcal{G}, \tag{7}$$

гладко. С другой стороны, согласно общим теоретико-групповым результатам, если подгруппа $\mathcal{H}$ инвариантна, то относительно операции

$$a\mathcal{H} \cdot b\mathcal{H} = ab\mathcal{H}, \qquad a, b \in \mathcal{G}, \tag{8}$$

множество $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ является группой, а отображение (7) гомоморфизмом.

З а д а ч а 3. Покажите, что

а. *Относительно умножения* (8) *гладкое многообразие* $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ *является группой Ли (и, значит, отображение* (7) *— гомоморфизмом групп Ли).*

6. *Алгеброй Ли группы Ли $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ служит фактор-алгебра* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{l}(\mathcal{G}/\mathcal{H}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{l}\mathcal{G}, \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{l}\mathcal{H}.$$

[Напомним — из курса алгебры, — что для любой алгебры $\mathcal{A}$ и любого ее (двустороннего) идеала $\mathcal{B}$ факторпространство $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ является алгеброй относительно операции $(x+\mathcal{B})(y+ +\mathcal{B}) = xy+\mathcal{B}$, $x, y \in \mathcal{A}$. Эта алгебра называется *фактор-алгеброй* алгебры $\mathcal{A}$ по идеалу $\mathcal{B}$. В случае, когда $\mathcal{A}$ является алгеброй Ли, алгебра $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ также будет алгеброй Ли.]

Группа Ли $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ называется *факторгруппой* группы Ли $\mathcal{G}$ по ее инвариантной замкнутой подгруппе $\mathcal{H}$.

Задача 4. Покажите, что *каноническое отображение*

$$\mathcal{G}/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f, \qquad a\operatorname{Ker} f \mapsto f(a),$$

является изоморфизмом групп Ли.

Теорема Кембелла — Хаусдорфа В своем месте (см. замечание 1 лекции IV.14) мы уже отмечали, что по операции Ли [,] в алгебре Ли $\mathfrak{l}\mathcal{G} = \mathsf{T}_e\mathcal{G}$ можно полиостью восстановить умножение в группе Ли $\mathcal{G}$. Опишем это восстановление подробнее.

Одночленом Ли степени n от X, Y называется выражение вида

$$[\ldots[[X_1, X_2], X_3], \ldots, X_n],$$

где каждое X_i, $i = 1, \ldots, n$, есть либо X, либо Y, а *многочленом Ли от X, Y* (над полем $\mathbb{Q}$) — конечная формальная сумма

$$\mathfrak{f} = \sum a_i\varphi_i,$$

где φ_i — одночлены Ли, а a_i — рациональные числа. Если все одночлены Ли φ_i, для которых $a_i \neq 0$, имеют одну и ту же степень n, то многочлен Ли $\mathfrak{f}$ называется *однородным*, а n называется его *степенью*.

Формальным рядом Ли называется бесконечная формальная сумма вида

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 + \mathfrak{f}_1 + \ldots + \mathfrak{f}_n + \ldots, \tag{9}$$

где $\mathfrak{f}_n$ — однородный многочлен Ли степени n.

Если X и Y — элементы некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (над произвольным полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль), то для любого многочлена Ли $\mathfrak{f}$ от X, Y определено его *значение* $\mathfrak{f}(X, Y)$, являющееся элементом алгебры $\mathfrak{g}$. Для ряда (9) это дает бесконечный ряд

$$\mathfrak{f}_1(X, Y) + \ldots + \mathfrak{f}_n(X, Y) + \ldots$$

в $\mathfrak{g}$. Если (при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) этот ряд сходится, то его сумма обозначается символом $\mathfrak{f}(X, Y)$ и называется *значением* ряда (9) на элементах X, Y.

Допуская общепринятую вольность, мы будем употреблять символ $\mathfrak{f}(X, Y)$ и для обозначения ряда $\mathfrak{f}$.

Теорема 1. *Существует такой формальный ряд Ли*

$$\mathfrak{z}(X, Y) = \mathfrak{z}_1(X, Y) + \ldots + \mathfrak{z}_n(X, Y) + \ldots, \qquad (10)$$

что для любой группы Ли $\mathcal{G}$ и любых элементов $X, Y \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$, принадлежащих некоторой нормальной окрестности U_0 нуля алгебры Ли $\mathfrak{l}\mathcal{G} = \mathfrak{g}$, значение $\mathfrak{z}(X, Y)$ ряда (10) *определено и имеет место равенство*

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp \mathfrak{z}(X, Y). \qquad (11)$$

Эта теорема известна как теорема Кембелла — Хаусдорфа.

Доказывать ее мы здесь не будем. См. Семестр V.

Многочлены Дынкина

Начальные члены ряда (10) имеют вид

$$\begin{aligned} &\mathfrak{z}_1(X, Y) = X + Y, \quad \mathfrak{z}_2(X, Y) = \frac{1}{2}[X, Y], \\ &\mathfrak{z}_3(X, Y) = \frac{1}{12}([[X, Y], Y] - [[X, Y], X]). \end{aligned} \qquad (12)$$

Первые две формулы составляют содержание теоремы 1 лекции IV.14. Тем же методом можно найти и следующие члены, но с ростом степени вычисления стремительно усложняются. Тем не менее, оказывается, что можно указать явную формулу для $\mathfrak{z}_n(X, Y)$. Эта формула принадлежит Дынкину и имеет вид

$$\mathfrak{z}_n(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum \frac{[X^{p_1} Y^{q_1} \ldots X^{p_k} Y^{q_k}]}{p_1! q_1! \ldots p_k! q_k!}, \qquad (13)$$

где внутреннее суммирование распространено на все целые неотрицательные показатели $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$, для которых

$$p_1 + q_1 > 0, \quad \ldots, \quad p_k + q_k > 0,$$
$$(p_1 + q_1) + \ldots + (p_k + q_k) = n,$$

и где положено

$$[X^{p_1} Y^{q_1} \ldots X^{p_k} Y^{q_k}] =$$
$$= [\ldots\underbrace{[X, X], X, \ldots, X]}_{p_1} \underbrace{Y], \ldots, Y]}_{q_1}, \ldots, \underbrace{X], \ldots, X]}_{p_k}, \underbrace{Y], \ldots, Y]}_{q_k}.$$

Замечание 1. Считая переменные X и Y некоммутирующими, рассмотрим формальный ряд $\ln(e^X e^Y)$, где

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}, \quad e^Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y^n}{n!}, \quad \ln Z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (Z-1)^n.$$

Пусть

$$\ln(e^X e^Y) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(X, Y),$$

где $z_n(X, Y)$ — некоторые однородные многочлены степени n от некоммутирующих переменных X, Y, и пусть $[z_n(X, Y)]$ — многочлен Ли, получающийся из многочлена $z_n(X, Y)$ при подстановках

$$X^{p_1} Y^{q_1} \ldots X^{p_k} Y^{q_k} \implies [X^{p_1} Y^{q_1} \ldots X^{p_k} Y^{q_k}].$$

Оказывается, что

$$\partial_n(X, Y) = \frac{1}{n}[z_n(X, Y)].$$

См. Семестр V.

Это позволяет легко запомнить формулу Дынкина (и дает намек на ее доказательство).

Обратим внимание на то, что формула (13) содержит, вообще говоря, много неприведенных подобных членов (в том числе равных нулю). Например, при $n = 3$ эта формула дает (члены, равные нулю, мы не выписываем)

$$\partial_3(X, Y) = \frac{1}{3}\left(\frac{[[X, Y], Y]}{1!2!} - \frac{1}{2}\left(\frac{[[Y, X], Y]}{0!1!1!1!} + \frac{[[Y, X], X]}{0!1!2!0!} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{[[X, Y], Y]}{1!0!0!2!} + \frac{[[X, Y], Y]}{1!1!0!1!} + \frac{[[X, Y], X]}{1!1!1!0!}\right) +$$
$$\left.+ \frac{1}{3}\left(\frac{[[Y, X], Y]}{0!1!1!0!0!1!} + \frac{[[Y, X], X]}{0!1!1!0!1!0!} + \frac{[[X, Y], Y]}{1!0!0!1!0!1!} + \frac{[[X, Y], X]}{1!0!0!1!1!0!}\right)\right),$$

и формула для $\ni_3(X, Y)$ из (12) получается отсюда только после приведения подобных членов.

Групускулы Ли

Задача 5. Докажите, что:

а *в любой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует такая окрестность нуля U, что элемент $\ni(X, Y)$ определен для любых $X, Y \in U$;*

б *имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \ni(X, \ni(Y, Z)) &= \ni(\ni(X, Y), Z), \\ \ni(X, -X) &= \ni(-X, X) = 0, \\ \ni(X, 0) &= \ni(0, X) = X \end{aligned}$$

(*предполагается, что все участвующие в этих формулах элементы определены*). [Указание. Воспользуйтесь замечанием 1.]

Утверждение задачи 5 означает, что при $\ni(X, Y) \in U$ формула

$$X \cdot Y = \ni(X, Y) \tag{14}$$

определяет в U умножение, которое удовлетворяет всем групповым тождествам, когда они имеют смысл. (При этом элемент 0 является единицей, а обратный элемент определяется формулой $X^{-1} = -X$.) Множество U, обладающее такого рода структурой, называется, вообще, *групускулой Ли* (или *локальной группой Ли*). Таким образом, задача 5 дает нам способ построения групускулы Ли $U = U(\mathfrak{g})$ по любой алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Конструкция алгебры $\mathfrak{l}\mathcal{G}$ дословно проходит для любой групускулы Ли и доставляет нам алгебру Ли, которая называется *алгеброй Ли этой групускулы.*

Задача 6. Покажите, что алгебра Ли групускулы Ли $U(\mathfrak{g})$ изоморфна исходной алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Построение групускулы Ли с данной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ было впервые осуществлено — другим методом — самим Ли. Тот факт, что эта групускула вложима в группу Ли, т. е. изоморфна (в понятном смысле) групускуле, являющейся окрестностью единицы некоторой группы Ли (имеющей, следовательно, алгебру Ли $\mathfrak{g}$), был — как мы уже упоминали в лекции IV.15 — доказан существенно позже Картаном.

(Подобно теореме 1, мы оставляем теорему Картана без доказательства. См. Семестр V, лекция 10.)

Обратим внимание, что задаваемое формулой (14) произведение является вещественно аналитической функцией множителей (т. е. координаты произведения в произвольном базисе алгебры $\mathfrak{g}$ являются вещественно аналитическими функциями координат множителей). С этим связан тот факт, что предусмотренная теоремой Картана группа Ли $\mathcal{G}$ является *вещественно аналитической группой*, т. е. многообразием класса C^ω, умножение $\mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ в котором также является отображением класса C^ω. Вместе с тем построение алгебры Ли $\mathfrak{l}\mathcal{G}$ имеет, очевидно, смысл для произвольной группы Ли $\mathcal{G}$ класса C^r, $r\geqslant 2$. Отсюда легко следует (проведите подробно соответствующее рассуждение!), что *любая группа Ли класса C^r, $r\geqslant 2$, изоморфна (в категории групп Ли класса C^r) вещественно аналитической группе Ли.*

Таким образом, в теории групп Ли можно без ограничения общности рассматривать лишь вещественно аналитические группы (что мы фактически всегда и делали).

Биективность функтора Ли Пусть U — окрестность единицы группы Ли $\mathcal{G}$. Гладкое отображение $f\colon U\to\mathcal{H}$ окрестности U в группу Ли $\mathcal{H}$ называется *локальным гомоморфизмом*, если для любых элементов $a,b\in U$ с $ab\in U$ имеет место равенство

$$f(ab)=f(a)f(b).$$

Ср. определение локального изоморфизма в лекции IV.15.

Ясно, что конструкция гомоморфизма $\mathfrak{l}(f)$ имеет смысл для любого локального гомоморфизма $f\colon U\to\mathcal{H}$ (и дает гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{l}(f)\colon \mathfrak{l}\mathcal{G}\to\mathfrak{l}\mathcal{H}$).

Задача 7. Покажите, что

а *при* $\exp X\in U$ *имеет место равенство*

$$f(\exp X)=\exp(\varphi X),\qquad X\in\mathfrak{l}\mathcal{G},\tag{15}$$

где $\varphi=\mathfrak{l}(f)$ *(ср. диаграмму* (6));

б *для любой нормальной окрестности U единицы группы $\mathcal{G}$ и любого гомоморфизма алгебр Ли*

$$\varphi\colon \mathfrak{l}\mathcal{G}\to\mathfrak{l}\mathcal{H}$$

формула (15) *корректно определяет локальный гомоморфизм*

$$f\colon U \to \mathcal{H},$$

для которого $\mathfrak{l}(f) = \varphi$.

Это означает, что *формула* $f \mapsto \mathfrak{l}(f)$ *определяет биективное соответствие между локальными гомоморфизмами из* $\mathcal{G}$ *в* $\mathcal{H}$ (*точнее, их ростками в* e) *и гомоморфизмами алгебр Ли* $\mathfrak{l}\mathcal{G} \to \mathfrak{l}\mathcal{H}$.

Как дело обстоит для глобальных гомоморфизмов?

Из формулы (15) немедленно вытекает, что если для гомоморфизмов $f, g\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ имеет место равенство $\mathfrak{l}(f) = \mathfrak{l}(g)$, то $f = g$ на любой нормальной окрестности U единицы группы $\mathcal{G}$. Поскольку связная группа Ли порождается каждой окрестностью единицы (см. задачу 12 лекции IV.14), отсюда следует, что это равенство выполняется на всей компоненте единицы группы $\mathcal{G}$. Таким образом, *если группа* $\mathcal{G}$ *связна, то* $f = g$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{l}(f) = \mathfrak{l}(g)$.

Предложение 2. *Если группа* $\mathcal{G}$ *связна и односвязна, то для любого гомоморфизма*

$$\varphi\colon \mathfrak{l}\mathcal{G} \to \mathfrak{l}\mathcal{H}$$

алгебр Ли существует такой гомоморфизм

$$f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$$

групп Ли, что $\mathfrak{l}(f) = \varphi$. *Этот гомоморфизм единственен.*

Таким образом, если группа $\mathcal{G}$ связна и односвязна, то биективность соответствия $f \mapsto \mathfrak{l}(f)$ имеет место и для гомоморфизмов $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ групп Ли. Это означает, что *на категории* $\mathrm{LIE}^{(0)}$ *связных и односвязных групп Ли функтор Ли биективен на морфизмах.*

Доказательство предложения 2 мы опустим.

З а д а ч а 8. Докажите, что *гомоморфизм* f *из предложения 2 тогда и только тогда является изоморфизмом, когда изоморфизмом является гомоморфизм* φ. [У к а з а н и е. Воспользуйтесь единственностью гомоморфизма f.]

В частности, мы видим, что группа Aut $\mathcal{G}$ *автоморфизмов произвольной связной и односвязной группы Ли $\mathcal{G}$ канонически изоморфна группе* Aut $\mathfrak{g}$ *автоморфизмов ее алгебры Ли* $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}\mathcal{G}$ (и, значит, — см. пример 2 лекции IV.15 — является группой Ли).

Кроме того, односвязные группы Ли $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ тогда и только тогда изоморфны, когда изоморфны их алгебры Ли $\mathfrak{l}\mathcal{G}$ и $\mathfrak{l}\mathcal{H}$. Ввиду теоремы Картана это означает, что *на категории* $\mathcal{LIE}^{(0)}$ *функтор Ли биективен и на объектах* (но лишь с точностью до изоморфизма). На объектах категории $\mathcal{LIE}$ функтор Ли биективен с точностью до локального изоморфизма (см. лекцию IV.15).