ЛЕКЦИЯ 8

Аффинные поля. — Размерность алгебры Ли аффинных полей. — Полнота аффинных полей. — Отображения левого и правого сдвига на симметрическом пространстве. — Дифференцирования на многообразиях с умножением. — Алгебра Ли дифференцирований. — Инволютивный автоморфизм алгебры дифференцирований симметрического пространства. — Симметрические алгебры и тернары Ли. — Териар Ли симметрического пространства.

Как показывает пример-задача 1 лекции 5, группы Ли являются частным случаем симметрических пространств. Это наводит на мысль обобщить на симметрические пространства конструкцию алгебры Ли группы Ли. Оказывается, что это можно сделать, хотя вместо алгебр Ли получаются — как, собственно говоря, и следовало ожидать — более общие алгебраические объекты.

Аффинные поля

Пусть сначала $\mathcal{X}$ — произвольное пространство аффинной связности.

***Определение* 1.** Векторное поле X на пространстве аффинной связности $\mathcal{X}$ называется *аффинным*, если порожденный им максимальный поток $\{\varphi_t\}$ (см. лекцию III.17) состоит из аффинных отображений, т. е. для любого $t \in \mathbb{R}$ отображение φ_t, определенное на непустом открытом подмножестве $D_t \subset \mathcal{X}$, является аффинным отображением $D_t \to \mathcal{X}$.

***Предложение* 1.** *Векторное поле $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ тогда и только тогда аффинно, когда*

$$[X, \nabla_Y Z] = \nabla_Y [X, Z] + \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1}$$

для любых полей $Y, Z \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$.

Доказательство. Как мы знаем (см. формулы (12) и (18) лекции III.17), для коммутатора $[X, Y]$ полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ имеет место формула

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t^* Y - Y}{t},$$

где $\{\varphi_t\}$ — поток, порожденный полем X. С другой стороны, если отображение φ_t аффинно, то для любых полей $Y, Z \in \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$

$$\varphi_t^* \nabla_Y Z = \nabla_{Y_t} Z_t, \tag{2}$$

где $Y_t = \varphi_t^* Y$, $Z_t = \varphi_t^* Z$ (см. диаграмму (5) лекции 3), и, значит,

$$\varphi_t^* \nabla_Y Z - \nabla_Y Z = \nabla_{Y_t}[Z_t - Z] + \nabla_{Y_t} Z - \nabla_Y Z.$$

Поэтому если поле X аффинно, то

$$[X, \nabla_Y Z] = \lim_{t \to 0} \nabla_{Y_t}\left(\frac{Z_t - Z}{t}\right) + \lim_{t \to 0} \frac{\nabla_{Y_t} Z - \nabla_Y Z}{t} =$$

$$= \nabla_Y \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t^* Z - Z}{t} + \nabla_{\lim\limits_{t \to 0} \frac{\varphi_t^* Y - Y}{t}} Z = \nabla_Y [X, Z] + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Для доказательства обратного утверждения мы положим

$$\nabla_{Y(t)} Z = \varphi_{-t}^* \nabla_{Y_t} Z_t.$$

Тогда для любых s и t будут иметь место равенства

$$\frac{\nabla_{Y(t+s)} Z - \nabla_{Y(t)} Z}{s} =$$

$$= \varphi_{-t-s}^* \frac{\nabla_{\varphi_s^* Y_t}(\varphi_s^* Z_t) - \nabla_{Y_t} Z_t}{s} + \varphi_{-t}^* \frac{\varphi_{-s}^* \nabla_{Y_t} Z_t - \nabla_{Y_t} Z_t}{s} =$$

$$= \varphi_{-t-s}^* \left[\frac{\nabla_{\varphi_s^* Y_t}(\varphi_s^* Z_t - Z_t)}{s} + \nabla_{\frac{\varphi_s^* Y_t - Y_t}{s}} Z_t \right] +$$

$$+ \varphi_{-t}^* \frac{\varphi_{-s}^* \nabla_{Y_t} Z_t - \nabla_{Y_t} Z_t}{s}.$$

Поэтому

$$\lim_{s \to 0} \frac{\nabla_{Y(t+s)} Z - \nabla_{Y(t)} Z}{s} = \varphi_{-t}^* (\nabla_{Y_t}[X, Z_t] + \nabla_{[X, Y_t]} Z_t) -$$

$$- \varphi_{-t}^* [X, \nabla_{Y_t} Z_t].$$

Следовательно, если соотношение (1) выполнено (для любых полей X, Y, Z и, в частности, для полей X, Y_t, Z_t), то

$$\lim_{s \to 0} \frac{\nabla_{Y(t+s)} Z - \nabla_{Y(t)} Z}{s} = 0.$$

Для компонент поля $\nabla_{Y(t)}Z$, рассматриваемых как функции от t, это означает, что их производные тождественно равны нулю. Стало быть, эти компоненты — а потому и сами поля $\nabla_{Y(t)}Z$ — от t фактически не зависят. Это доказывает, что

$$\nabla_{Y(t)}Z = \nabla_{Y(0)}Z = \nabla_Y Z.$$

Поскольку это в точности равенство (2) (лишь в иных обозначениях), отображения φ_t аффинны. Следовательно, аффинно и поле X. □

В операторной форме условие (1) имеет вид

$$\nabla_{(\operatorname{ad} X)Y} = [\operatorname{ad} X, \nabla_Y], \tag{3}$$

которое должно иметь место для любого поля $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$.

Следствие 1. *Множество* $\operatorname{aff}\mathcal{X}$ *всех аффинных полей* $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ *является подалгеброй алгебры Ли* $\mathfrak{a}\mathcal{X}$.

Доказательство. Если поля X_1 и X_2 удовлетворяют соотношению (1) (для любых полей $Y, Z \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$), то любая их линейная комбинация также, очевидно, удовлетворяет этому соотношению. Кроме того, согласно тождеству Якоби

$$[[X_1, X_2], \nabla_Y Z] = [X_1, [X_2, \nabla_Y Z]] - [X_2, [X_1, \nabla_Y Z]],$$

и в то же время

$$[X_1, [X_2, \nabla_Y Z]] = [X_1, \nabla_Y [X_2, Z]] + [X_1, \nabla_{[X_2, Y]} Z] =$$
$$= \nabla_Y [X_1, [X_2, Z]] + \nabla_{[X_1, Y]} [X_2, Z] + \nabla_{[X_2, Y]} [X_1, Z] + \nabla_{[X_1, [X_2, Y]]} Z$$

и, аналогично,

$$[X_2, [X_1, \nabla_Y Z]] = [X_2, \nabla_Y [X_1, Z]] + [X_2, \nabla_{[X_1, Y]} Z] =$$
$$= \nabla_Y [X_2, [X_1, Z]] + \nabla_{[X_2, Y]} [X_1, Z] + \nabla_{[X_1, Y]} [X_2, Z] + \nabla_{[X_2, [X_1, Y]]} Z.$$

Поэтому

$$[[X_1, X_2], \nabla_Y Z] = \nabla_Y ([X_1, [X_2, Z]] - [X_2, [X_1, Z]]) +$$
$$+ \nabla_{[X_1, [X_2, Y]] - [X_2, [X_1, Y]]} Z = \nabla_Y [[X_1, X_2], Z] + \nabla_{[[X_1, X_2], Y]} Z.$$

Следовательно, поле $[X_1, X_2]$ также удовлетворяет соотношению (1). Это доказывает, что $\operatorname{aff}\mathcal{X}$ — подалгебра. □

Задача 1. Покажите, что *векторное поле X на группе Ли $\mathcal{G}$ тогда и только тогда аффинно по отношению к левой, средней или правой связности Картана ∇ на $\mathcal{G}$, когда для любого левоинвариантного векторного поля Y поле $[X,Y]$ также левоинвариантно.*

[Указание. Пусть $Z_1,\dots,Z_n$ — базис алгебры Ли $\mathfrak{l}\mathcal{G}$, и пусть $Z = h^iZ_i$. Покажите, что поля X, Y, Z тогда и только тогда удовлетворяют условию (1), когда этому условию удовлетворяют поля X, Y и Z_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. С другой стороны, если поле Z левоинвариантна, а связность ∇ левая, то для полей X, Y, Z условие (1) сводится к равенству $\nabla_Y[X,Z] = 0$, которое, как мы знаем, тогда и только тогда имеет место для всех $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{G}$, когда $[X,Z] \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$. Аналогично, если связность ∇ правая, то при $Y \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$ и $[X,Y] = g^iZ_i$ условие (1) сводится к равенству $Zg^i \cdot Z_i = 0$, которое имеет место для всех Z тогда и только тогда, когда $g^i = \mathrm{const}$.]

Заметим, что, таким образом, *все три связности Картана обладают одними и теми же аффинными полями.* Ср. утверждение задачи 13 лекции 6.

Размерность алгебры Ли аффинных полей

Предложение 2. *Если многообразие $\mathcal{X}$ связно, то алгебра Ли $\mathfrak{aff}\,\mathcal{X}$ конечномерна и ее размерность не превосходит $n + n^2$, где $n = \dim\mathcal{X}$.*

Доказательство. Для любого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ и любой функции $f \in \mathsf{F}\mathcal{X}$ определеиа функция $Xf \in \mathsf{F}\mathcal{X}$. Поэтому, выбрав и раз иавсегда зафиксировав точку $p_0 \in \mathcal{X}$, мы можем каждому вектору $A \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ сопоставить число AXf. Тем самым мы получим иа $\mathsf{F}\mathcal{X}$ иекоторый — очевидио, линейный — фуикциоиал AX: $f \mapsto AXf$, т. е. элемент сопряжеииого лииейиого простраиства $(\mathsf{F}\mathcal{X})^*$. Соответствие $A \mapsto AX$ является поэтому — также линейным — отображением $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \to (\mathsf{F}\mathcal{X})^*$, т. е. элемеитом лииейиого (бескоиечномериого!) простраиства $\mathrm{Hom}(\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}, (\mathsf{F}\mathcal{X})^*)$. Обозиачив это отображение символом $l_{p_0}X$, мы получим — сиова лииейиое — отображеиие

$$l_{p_0}\colon \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathrm{Hom}(\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}, (\mathsf{F}\mathcal{X})^*), \quad X \mapsto l_{p_0}X.$$

Пусть $(U, x^1, \dots, x^n)$ — произвольиая карта многообразия $\mathcal{X}$, цеитрированная в точке p_0, и пусть $X = X^i\dfrac{\partial}{\partial x^n}$ иа U. Так как векторы

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{p_0}, \quad \dots, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_{p_0} \tag{4}$$

составляют базис пространства $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$, то отображение $l_{p_0}X$: $A \mapsto AX$ однозначно задается своими значениями

$$(l_{p_0}X)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p_0} : \mathsf{F}\mathcal{X} \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

на этих векторах. Но по определеиию для любой функции $f \in \mathsf{F}\mathcal{X}$ имеем

$$(l_{p_0}X)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p_0} f = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p_0} Xf = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p_0}\left(X^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)_{p_0}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{p_0} + X^j(p_0)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{p_0},$$

т. е.

$$(l_{p_0}X)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p_0} = \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)_{p_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{p_0} + X^j(p_0)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{p_0}. \qquad (5)$$

Это доказывает, что *образ отображения* l_{p_0} *принадлежит подпространству линеала* $\mathrm{Hom}(\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}, (\mathsf{F}\mathcal{X})^*)$, *состоящему из отображений, переводящих линеал* $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ *в линейную оболочку функционалов*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p_0}, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{p_0}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n. \qquad (6)$$

Поскольку размериость лииейной оболочки функционалов (6) не превосходит их числа $n + n^2$, для доказательства предложения 2 остается лишь доказать, что *отображение* l_{p_0} *инъективно на подалгебре* $\mathrm{aff}\,\mathcal{X}$, т. е. что при $X \in \mathrm{aff}\,\mathcal{X}$ равенство $l_{p_0}X = 0$ возможно только при $X = 0$.

Но согласио формуле (5) равеиство $l_{p_0}X = 0$ озиачает, что

$$X^i(p_0) = 0, \qquad \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)_{p_0} = 0$$

для всех $i, j = 1, \ldots, n$. В частности, если $l_{p_0}X = 0$, то $X_{p_0} = 0$, и потому $\varphi_t(p_0) = p_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$ (для которого точка $\varphi_t(p_0)$ определена), где, как и выше, $\{\varphi_t\}$ — поток, порожденный полем X. Значит, на линеале $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ определены линейные операторы

$$(d\varphi_t)_{p_0} : \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \to \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}, \tag{7}$$

составляющие однопараметрическую подгруппу группы $\operatorname{Aut} \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ всех невырожденных линейных операторов $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \to \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$. Эта однопараметрическая подгруппа полностью определяется своим начальным вектором

$$\left.\frac{d}{dt}(d\varphi_t)_{p_0}\right|_{t=0}, \tag{8}$$

являющимся линейным оператором из $\operatorname{End} \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$.

Подчеркнем, что этот оператор определен для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$, для которого $X_{p_0} = 0$.

Задача 2. Покажите, что *в базисе* (4) *пространства* $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ *линейный оператор* (8) *имеет матрицу*

$$\left\| \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)_{p_0} \right\|.$$

При $l_{p_0}X = 0$ эта матрица равна нулю и, следовательно, однопараметрическая подгруппа (8) состоит из тождественных отображений:

$$(d\varphi_t)_{p_0} = \mathrm{id} \qquad \text{для любого } t \in \mathbb{R}.$$

Если теперь $X \in \operatorname{aff} \mathcal{X}$ и, значит, все отображения φ_t аффинны, то согласно предложению 2 лекции 3 из равенств $\varphi_t(p_0) = p_0$ и $(d\varphi_t)_{p_0} = \mathrm{id}$ вытекает — ввиду связности многообразия $\mathcal{X}$, — что $\varphi_t = \mathrm{id}$ и, значит, что $X = 0$. Следовательно, на $\operatorname{aff} \mathcal{X}$ отображение l_{p_0} инъективно, и потому $\dim \operatorname{aff} \mathcal{X} \leqslant n + n^2$. $\square$

Полнота аффинных полей Особо важен случай, когда пространство аффинной связности $\mathcal{X}$ геодезически полно.

Предложение 3. *На геодезически полном пространстве аффинной связности $\mathcal{X}$ каждое аффинное векторное поле X полно.*

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Если для максимального потока $\{\varphi_t\}$ на многообразии $\mathcal{X}$ существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любой точки $p \in \mathcal{X}$ и любого t с $|t| < \varepsilon_0$ точка $\varphi_t(p)$ определена, то поток $\{\varphi_t\}$ полон (точка $\varphi_t(p)$, $p \in \mathcal{X}$, определена для всех $t \in \mathbb{R}$).*

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Для любого $t \in \mathbb{R}$ существует такое однозначно определенное целое число m, что $t = m\varepsilon + s$, где $0 \leqslant s < \varepsilon$. Мы положим

$$\psi_t = \underbrace{\varphi_\varepsilon \circ \ldots \circ \varphi_\varepsilon}_{m} \circ \varphi_s.$$

Задача 3. Проверьте, что *отображения ψ_t: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{R}$, составляют поток на $\mathcal{X}$.*

По построению поток $\{\psi_t\}$ полон. Кроме того, так как $\psi_t = \varphi_t$ при $|t| < \varepsilon$, а поток $\{\varphi_t\}$ максимален, то $\psi_t = \varphi_t$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, поток $\{\varphi_t\}$ полон. $\square$

Замечание 1. Из этой леммы непосредственно вытекает, что каждое векторное поле $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$, равное нулю вне компактного множества $C \subset \mathcal{X}$, является полным полем. В частности, *на компактном многообразии каждое векторное поле полно.*

Доказательство предложения 3. Пусть $\mathcal{X}_0$ — произвольная компонента многообразия $\mathcal{X}$, и пусть $p_0 \in \mathcal{X}_0$. Рассмотрим поток $\{\varphi_t\}$, порожденный полем X. По теореме о гладкой зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных существуют такое $\varepsilon_0 > 0$ и такая окрестность V_0 точки p_0, что точка $\varphi_t(q)$ определена при $q \in V_0$ и $|t| < \varepsilon_0$. Зафиксировав это ε_0, рассмотрим множество $W \subset \mathcal{X}$ всех точек $p \in \mathcal{X}$, для которых найдется такая окрестность V, что точка $\varphi_t(q)$ определена при $q \in V$ и $|t| < \varepsilon_0$. Это множество открыто и непусто (содержит точку p_0).

Лемма 2. *Множество W содержит каждую нормальную окрестность любой своей точки.*

Предполагая эту лемму доказанной, рассмотрим произвольную точку p замыкания $\overline{W}$ множества W. По определению каждая окрестность U точки p пересекается с множеством W. В частности, это верно для окрестности U, являющейся нормальной окрестностью каждой своей точки (см. лекцию 1). Но по лемме 2 такая окрестность U вся содержится в W. Следовательно, $p \in W$ и, значит, множество W замкнуто.

Являясь открыто-замкнутым множеством, содержащим точку p_0, множество W содержит всю компоненту $\mathcal{X}_0$ точки p_0. Это означает, что точка $\varphi_t(q)$ определена при $|t| < \varepsilon_0$ для каждой точки $q \in \mathcal{X}_0$. Поэтому согласно лемме 1 поток $\{\varphi_t\}$ на $\mathcal{X}_0$ полон. Таким образом, поток $\{\varphi_t\}$ полон на каждой компоненте многообразия $\mathcal{X}$. Следовательно, он полон и на всем $\mathcal{X}$. $\square$

Осталось доказать лемму 2.

Доказательство леммы 2. Пусть U — нормальная окрестность точки $p \in W$, а V — такая ее окрестность, что точка $\varphi_t(q)$ определена при $q \in V$ и $|t| < \varepsilon_0$. Пусть, далее, $p_1 \in U$, $\gamma_0\colon I \to \mathcal{X}$ — геодезический сегмент, соединяющий в U точку p с точкой p_1, и $A_0 = \dot{\gamma}_0(0)$. Наконец, пусть $\pi\colon \mathsf{T}\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — проекция касательного расслоения над многообразием $\mathcal{X}$. Так как пространство аффинной связности $\mathcal{X}$ геодезически полно, то для любого вектора $A \in \mathsf{T}\mathcal{X}$ определена геодезическая $\gamma_A\colon \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, для которой $\gamma_A(0) = \pi A$ и $\dot{\gamma}_A(0) = A$. (В частности, $\gamma_0 = \gamma_{A_0}|_I$.) Определим отображение

$$h\colon \mathsf{T}\mathcal{X} \to \mathsf{T}\mathcal{X}$$

формулой

$$h(A) = \dot{\gamma}_A(1).$$

(Вектор $h(A)$ является не чем иным, как результатом параллельного переноса вектора A вдоль геодезического сегмента $\gamma_A|_I$.) Легко видеть, что это отображение является диффеоморфизмом. Поэтому, в частности, множество $h(\pi^{-1}V)$ открыто в $\mathsf{T}\mathcal{X}$ и, значит, множество

$$V_1 = (\pi \circ h)(\pi^{-1}V)$$

открыто в $\mathcal{X}$. Кроме того, так как $h(A_0) = \dot{\gamma}_{A_0}(1) = \dot{\gamma}_0(1)$, то $p_1 \in V_1$, т. е. V_1 является окрестностью точки p_1. Поэтому лемма 2 будет доказана, если мы покажем, что при $|t| < \varepsilon_0$ точка $\varphi_t(q_1)$ определена для любой точки $q_1 \in V_1$. Мы сделаем это, указав для точки $\varphi_t(q_1)$ явную формулу.

Так как поле X аффинно и, значит, аффинны все отображения φ_t, то параллельные переносы перестановочны с дифференциалами этих отображений (см. диаграмму (4) лекции 3). В частности, это означает, что для любой точки $q \in V$, любого t, $|t| < \varepsilon_0$, и любого вектора $A \in \mathsf{T}_q\mathcal{X}$ имеет место равенство

$$(d\varphi_t)_{q_1} h(A) = h((d\varphi_t)_q A), \qquad \text{где } q_1 = \gamma_A(1).$$

(Заметим, что, распорядившись q и A, мы можем представить любую точку окрестности V_1 в виде $q_1 = \gamma_A(1)$.)

Но ясно, что для отображения

$$d\varphi_t\colon \mathsf{T}\mathcal{X} \to \mathsf{T}\mathcal{X}$$

(действующего по формуле $A \mapsto (d\varphi_t)_q A$, где $q = \pi A$) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{T}\mathcal{X} & \xrightarrow{d\varphi_t} & \mathsf{T}\mathcal{X} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{\varphi_t} & \mathcal{X}. \end{array}$$

Поэтому

$$\varphi_t(q_1) = \pi((d\varphi_t)_{q_1} h(A)) = (\pi \circ h)((d\varphi_t)_q A) \qquad \text{при } |t| < \varepsilon_0,$$

что все и доказывает. □

Отображения левого и правого сдвига на симметрическом пространстве

Пусть теперь $\mathcal{X}$ — симметрическое пространство. Интерпретируя $\mathcal{X}$ как пространство с умножением (см. замечание 1 лекции 5), мы каждой точке $p \in \mathcal{X}$ поставим в соответствие два отображения

$$L_p, R_p\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X},$$

действующие по формулам

$$L_p q = pq, \quad R_p q = qp, \qquad q \in \mathcal{X},$$

т. е. по формулам

$$L_p q = s_p q, \quad R_p q = s_q p$$

(точку в обозначении произведения $pq = s_p q$ мы опускаем).

Отображение L_p является не чем иным, как симметрией s_p, и поэтому (см. свойства **б** и **г** из предложения 3 лекции 5) удовлетворяет соотношениям

$$L_p \circ L_p = \mathrm{id}, \quad L_{qp} = L_q \circ L_p \circ L_q. \tag{9}$$

Кроме того (см. лемму 3 лекции 5)

$$(dL_p)_p = -\mathrm{id}. \tag{10}$$

Задача 4. Докажите, что

$$R_{pq} = L_p \circ R_q \circ L_p, \qquad p, q \in \mathcal{X}. \tag{11}$$

Напомним (см. лемму 1 лекции IV.21), что для любых многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ и любой точки $(p,q) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ каждый вектор $C \in \mathsf{T}_{(p,q)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ единственным образом представляется в виде (A, B), где $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$, $B \in \mathsf{T}_q\mathcal{Y}$ и

$$A = (d\,\mathrm{pr}_1)_{(p,q)}C, \quad B = (d\,\mathrm{pr}_2)_{(p,q)}C. \tag{12}$$

При этом (см. формулу (5) лекции IV.21) для любого отображения μ: $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ имеет место формула

$$(d\mu)_{(p,q)}C = (dR_q)_pA + (dL_p)_qB, \tag{13}$$

где R_q и L_p — отображения $r \mapsto \mu(r,q)$ и $r \mapsto \mu(p,r)$, $r \in \mathcal{X}$.

Пусть $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, и пусть Δ: $\mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ — диагональное отображение $p \mapsto (p,p)$. Поскольку $\mathrm{pr}_1 \circ \Delta = \mathrm{pr}_2 \circ \Delta = \mathrm{id}$, из формул (12) непосредственно следует, что

$$(d\Delta)_pA = (A, A)$$

для любого вектора $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ и, значит, что

$$d(\mu \circ \Delta)_pA = (dR_p)_pA + (dL_p)_pA. \tag{14}$$

При $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$ (когда μ является умножением $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$) и при $\mu \circ \Delta = \mathrm{id}$ (т. е. в предположении, что умножение μ идемпотентно) отсюда следует, что

$$A = (dR_p)_pA + (dL_p)_pA.$$

В частности, эта формула имеет место в симметрическом пространстве $\mathcal{X}$. Но тогда $(dL_p)_pA = -A$ (см. формулу (10)) и, значит, *в симметрическом пространстве $\mathcal{X}$ для любого вектора $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ имеет место формула*

$$(dR_p)_pA = 2A. \tag{15}$$

Дифференцирования на многообразиях с умножениями

Определение 2. Векторное поле $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ называется *дифференцированием на $\mathcal{X}$*, если порожденный им поток $\{\varphi_t\}$ состоит из автоморфизмов (вообще говоря, — если поле X не полно — локальных).

Это определение имеет смысл для любого многообразия $\mathcal{X}$ с умножением. В случае же, когда $\mathcal{X}$ является симметрическим пространством, из предложения 1 лекции 6 следует, что *дифференцирования на симметрическом пространстве $\mathcal{X}$ — это в точности аффинные (по отношению к канонической связности) векторные поля на $\mathcal{X}$.*

Поэтому в силу предложения 3 (и утверждения задачи 1 лекции 5) *каждое дифференцирование на симметрическом пространстве $\mathcal{X}$ является полным полем* (и потому для симметрических пространств поле X в определении 2 можно, не теряя общности, априори предполагать полным).

Задача 5. Как мы знаем (ср. пример 5 лекции IV.13), векторные поля на произвольной алгебре $\mathcal{A}$ естественным образом отождествляются с отображениями $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. В частности, произвольное дифференцирование $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (см. определение 1 лекции III.16) мы можем считать векторным полем на $\mathcal{A}$. Покажите, что *порожденный этим полем поток $\{\varphi_t\}$ состоит из автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$* (ср. задачу 3 лекции IV.15).

Это объясняет нашу терминологию.

Предложение 4. *Векторное поле $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ тогда и только тогда является дифференцированием, когда*

$$X_{pq} = (dL_p)_qX_q + (dR_q)_pX_p \tag{16}$$

для любых точек $p, q \in \mathcal{X}$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_t\}$ — поток, порожденный полем X. Вычислим касательный вектор $\dot{u}(0)$ кривой

u: $t \mapsto \varphi_t(p)\varphi_t(q)$ при $t = 0$. По определению для любой функции $f \in \mathsf{F}\mathcal{X}$

$$\dot u(0)f = \lim_{t\to 0}\frac{f(\varphi_t(p)\varphi_t(q)) - f(pq)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(\varphi_t(p)\varphi_t(q)) - f(\varphi_t(p)q)}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{f(\varphi_t(p)q) - f(pq)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{(f\circ L_{\varphi_t(p)})(\varphi_t(q)) - (f\circ L_{\varphi_t(p)})(q)}{t} +$$
$$+ \lim_{t\to 0}\frac{(f\circ R_q)(\varphi_t(p)) - (f\circ R_q)(p)}{t} =$$
$$= X_q(f\circ L_p) + X_p(f\circ R_q) = ((dL_p)_qX_q)f + ((dR_q)_pX_p)f,$$

и, значит,

$$\dot u(0) = (dL_p)_qX_q + (dR_q)_pX_p.$$

Поэтому условие (16) означает, что кривая u имеет при $t = 0$ тот же касательный вектор X_{pq}, что и траектория v: $t \mapsto \varphi_t(pq)$ поля X, проходящая при $t = 0$ через точку pq. Следовательно, если поток $\{\varphi_t\}$ состоит из автоморфизмов (и потому $u = v$), то условие (16) выполнено.

Обратно, пусть условие (16) выполнено. Для любого $s \in \mathbb{R}$ рассмотрим кривую

$$u_s\colon\ t \mapsto u(t+s) = \varphi_{t+s}(p)\varphi_{t+s}(q) = \varphi_t(\varphi_s(p))\varphi_t(\varphi_s(q)).$$

Это есть кривая u, построенная для точек $\varphi_s(p)$ и $\varphi_s(q)$. Значит, по доказанному, касательный вектор $\dot u_s(0)$ к этой кривой при $t = 0$ совпадает с касательным вектором траектории

$$t \mapsto \varphi_t(\varphi_s(p)\varphi_s(q)) = \varphi_t(u(s))$$

поля X, проходящей при $t = 0$ через точку $u(s)$, т. е. с вектором $X_{u(s)}$. Поскольку вектор $\dot u_s(0)$ является, очевидно, касательным вектором $\dot u(s)$ кривой u при $t = s$, этим доказано, что

$$\dot u(s) = X_{u(s)},$$

т. е. что кривая u является траекторией v поля X, проходящей при $t = 0$ через точку pq. Поэтому $u(t) = v(t)$ для всех t и, значит, поток $\{\varphi_t\}$ состоит из автоморфизмов. □

Заметим, что утверждение предложения 4 имеет смысл (и справедливо) для любого гладкого многообразия $\mathcal{X}$, на котором задано умножение (например, для алгебр или групп Ли).

Задача 6. Докажите, что

а. *В случае, когда $\mathcal{X}$ является алгеброй $\mathcal{A}$, условие* (16) *означает, что векторное поле X — интерпретированное как отображение $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ — является дифференцированием* (см. определение 1 лекции III.16).

б. *В случае, когда $\mathcal{X}$ является группой Ли $\mathcal{G}$, любое поле X, удовлетворяющее условию* (16), *является аффинным полем по отношению к связностям Картана из лекции* 6. [Указание. Проверьте, что для любого левоинвариантного поля Y поле $[X, Y]$ также левоинвариантно; см. задачу 1.]

Алгебра Ли дифференцирований

Сравнение определений немедленно показывает, что для любого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ поле $X^{\mathrm{I}} \in \mathfrak{a}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ (см. лекцию 6) задается формулой $(p, q) \mapsto (X_p, 0)$, а поле X^{II} — формулой $(p, q) \mapsto (0, X_q)$. Поэтому при $A = X_p$ и $B = X_q$ соотношение (13) дает нам формулу

$$(d\mu)_{(p,q)}(X^{\mathrm{I}} + X^{\mathrm{II}})_{(p,q)} = (dR_q)_p X_p + (dL_p)_q X_q.$$

Следовательно, условие (16) равносильно соотношению

$$(d\mu)_{(p,q)}(X^{\mathrm{I}} + X^{\mathrm{II}})_{(p,q)} = X_{pq}, \qquad pq = \mu(p, q),$$

по определению означающему, что поля $X^{\mathrm{I}} + X^{\mathrm{II}}$ и X μ-связаны.

Таким образом, мы видим, что *векторное поле X на многообразии $\mathcal{X}$ с умножением $\mu\colon \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ тогда и только тогда является дифференцированием, когда оно μ-связано с полем $X^{\mathrm{I}} + X^{\mathrm{II}}$ на $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.*

Но нетрудно проверить, что для любых полей X и Y на $\mathcal{X}$

$$[X^{\mathrm{I}}, Y^{\mathrm{I}}] = [X, Y]^{\mathrm{I}}, \quad [X^{\mathrm{I}}, Y^{\mathrm{II}}] = 0, \quad [X^{\mathrm{II}}, Y^{\mathrm{II}}] = [X, Y]^{\mathrm{II}}$$

и, значит

$$[X^{\mathrm{I}} + X^{\mathrm{II}}, Y^{\mathrm{I}} + Y^{\mathrm{II}}] = [X, Y]^{\mathrm{I}} + [X, Y]^{\mathrm{II}}.$$

Поэтому (см. утверждение задачи 5 лекции III.17) если поля X и Y μ-связаны с полями $X^{\mathrm{I}}+X^{\mathrm{II}}$ и $Y^{\mathrm{I}}+Y^{\mathrm{II}}$ соответственно (являются дифференцированиями), то поле $[X, Y]$ μ-связано с полем $[X,Y]^{\mathrm{I}}+[X,Y]^{\mathrm{II}}$ (также является дифференцированием). Это означает, что *множество $\partial\mathcal{X}$ всех дифференцирований на $\mathcal{X}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathcal{X}$* (и потому представляет собой алгебру Ли).

Для симметрического пространства $\mathcal{X}$ это, конечно, всего лишь иная формулировка следствия 1 предложения 1, которое мы тем самым в этом случае заново доказали.

Инволютивный автоморфизм алгебры дифференцирований симметрического пространства

Выбрав и раз навсегда зафиксировав в симметрическом пространстве $\mathcal{X}$ некоторую точку p_0, мы каждому полю $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ отнесем поле σX, определенное формулой

$$(\sigma X)_p = (dL_{p_0})_{p_0p}X_{p_0p}, \qquad p \in \mathcal{X}. \tag{17}$$

Это поле, очевидно, гладко и в случае, когда X является дифференцированием, удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned}
&(dR_q)_p(\sigma X)_p + (dL_p)_q(\sigma X)_q = \\
&\qquad = d(R_q \circ L_{p_0})_{p_0p}X_{p_0p} + d(L_p \circ L_{p_0})_{p_0q}X_{p_0q} = \\
&\qquad = d(L_{p_0} \circ R_{p_0q})_{p_0p}X_{p_0p} + d(L_{p_0} \circ L_{p_0p})_{p_0q}X_{p_0q} = \\
&\qquad = (dL_{p_0})_{(p_0p)(p_0q)}[(dR_{p_0q})_{p_0p}X_{p_0p} + (dL_{p_0p})_{p_0q}X_{p_0q}] = \\
&\qquad = (dL_{p_0})_{(p_0p)(p_0q)}X_{(p_0p)(p_0q)} = (dL_{p_0})_{p_0(pq)}X_{p_0(pq)} = (\sigma X)_{pq},
\end{aligned}$$

т. е. также является дифференцированием. Это означает, что соответствие $\sigma\colon X \to \sigma X$ задает линейное — и, очевидно, инволютивное — отображение

$$\sigma\colon \partial\mathcal{X} \to \partial\mathcal{X} \tag{18}$$

алгебры Ли $\partial\mathcal{X}$ на себя.

Так как отображение σ инволютивно, то формула (17) в точности означает, что поле σX L_{p_0}-связано с полем X. Поэтому (см. задачу 5 лекции III.17) для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ имеет место равенство

$$[\sigma X, \sigma Y] = \sigma[X, Y],$$

означающее, что *отображение* (18) *является автоморфизмом алгебры Ли* $\mathfrak{d}\mathcal{X}$.

Симметрические алгебры и тернары Ли

Рассмотрим ситуацию в общем виде. **Определение 3.** *Симметрической алгеброй Ли* называется пара $(\mathfrak{g}, \sigma)$, состоящая из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и инволютивного автоморфизма

$$\sigma\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

Автоморфизм σ называется *структурным автоморфизмом* симметрической алгебры Ли. Как правило, во всех обозначениях он подразумевается. Например, вместо $(\mathfrak{g}, \sigma)$ обычно пишется просто $\mathfrak{g}$.

Согласно общим теоремам линейной алгебры каждая симметрическая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(+)} \oplus \mathfrak{g}^{(-)}$$

собственного пространства $\mathfrak{g}^{(+)}$ автоморфизма σ, принадлежащего собственному значению $+1$, и собственного пространства $\mathfrak{g}^{(-)}$, принадлежащего собственному значению -1.

Собственное подпространство $\mathfrak{g}^{(+)}$ называется *коцоколем* симметрической алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и обозначается также символом $\mathfrak{h}$ (или $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$), а собственное пространство $\mathfrak{g}^{(-)}$ называется ее *цоколем* и обозначается символом $\mathfrak{s}$ (или $\mathfrak{s}(\mathfrak{g})$).

Пусть $X, Y \in \mathfrak{g}$. Очевидно, что

$$[X,Y] \in \mathfrak{g}^{(+)}, \text{ если } X, Y \in \mathfrak{g}^{(+)} \text{ или } X, Y \in \mathfrak{g}^{(-)},$$
$$[X,Y] \in \mathfrak{g}^{(-)}, \text{ если } X \in \mathfrak{g}^{(+)}, Y \in \mathfrak{g}^{(-)} \text{ или } X \in \mathfrak{g}^{(-)}, Y \in \mathfrak{g}^{(+)},$$

т. е., в других обозначениях,

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h},\mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}. \tag{19}$$

Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разложена в прямую сумму

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s} \tag{20}$$

подпространств, удовлетворяющих соотношениям (19). Определим линейное инволютивное отображение $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, положив

$$\sigma X = \begin{cases} X & \text{если } X \in \mathfrak{h}, \\ -X & \text{если } X \in \mathfrak{s}. \end{cases}$$

Задача 7. Покажите, что *пара* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *является симметрической алгеброй Ли с коцоколем* $\mathfrak{h}$ *и цоколем* $\mathfrak{s}$.

Таким образом, *симметрические алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ — *это в точности алгебры Ли, для которых задано разложение* (20), *удовлетворяющее условиям* (19).

Эта точка зрения часто удобнее исходной.

Первое соотношение (19) означает, что *коцоколь* $\mathfrak{h}$ *симметрической алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *является ее подалгеброй.* Что же касается цоколя $\mathfrak{s}$, то из соотношений (19) непосредственно вытекает, что для любых элементов $X, Y, Z \in \mathfrak{s}$ элемент

$$[X, Y, Z] = [[X, Y], Z] \tag{21}$$

также принадлежит $\mathfrak{s}$, т. е. что линеал $\mathfrak{s}$ замкнут относительно тернарной операции

$$X, Y, Z \mapsto [X, Y, Z].$$

Ясно, что

$$[X, X, X] = 0, \tag{22}$$

$$[X, Y, Z] + [Y, Z, X] + [Z, X, Y] = 0 \tag{23}$$

для любых элементов $X, Y, Z \in \mathfrak{s}$.

Задача 8. Покажите, что кроме того

$$[X, Y, [U, V, W]] = [[X, Y, U], V, W] + [U, [X, Y, V], W] + \\ + [U, V, [X, Y, W]] \tag{24}$$

Определение 4. Линейное пространство $\mathfrak{s}$, в котором задана трилинейная тернарная операция

$$X, Y, Z \mapsto [X, Y, Z], \tag{25}$$

удовлетворяющая тождествам (22), (23) и (24), называется *тернаром Ли* (или *тройной системой Ли*; последний — более распространенный — термин, к сожалению, длинен и маловыразителен).

Таким образом, в силу этого определения *цоколь любой симметрической алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *является тернаром Ли* (относительно операции (21)).

Оказывается, что это дает все тернары Ли.

Предложение 5. *Для любого тернара Ли $\mathfrak{s}$ существует симметрическая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с цоколем $\mathfrak{s}$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{ad}(X,Y)$ — линейный оператор $Z \mapsto [X,Y,Z]$, $X,Y,Z \in \mathfrak{s}$, и пусть $\mathrm{ad}\,\mathfrak{s}$ — подпространство пространства линейных операторов $\mathfrak{s} \to \mathfrak{s}$, порожденное всеми операторами вида $\mathrm{ad}(X,Y)$, $X,Y \in \mathfrak{s}$. Пусть, далее, $\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\,\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{s}$. Определим в $\mathfrak{g}$ билинейную операцию $[\ ,\ ]$ и линейный оператор $\sigma\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ формулами

$$[A,B] = \begin{cases} AB - BA, & \text{если } A, B \in \mathrm{ad}\,\mathfrak{s}, \\ AX, & \text{если } A \in \mathrm{ad}\,\mathfrak{s},\ B = X,\ X \in \mathfrak{s}, \\ -BX, & \text{если } A = X,\ X \in \mathfrak{s},\ B \in \mathrm{ad}\,\mathfrak{s}, \\ \mathrm{ad}(X,Y), & \text{если } A = X,\ B = Y,\ X, Y \in \mathfrak{s}, \end{cases}$$

$$\sigma A = \begin{cases} A, & \text{если } A \in \mathrm{ad}\,\mathfrak{s}, \\ -X, & \text{если } A = X,\ X \in \mathfrak{s}. \end{cases}$$

Задача 9. Проверьте, что $\mathfrak{g}$ *является алгеброй Ли, а отображение* σ *— ее инволютивным автоморфизмом.*

Это доказывает предложение 4. □

Очевидно, что размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}$ не превосходит $n^2 + n$, где n — размерность тернара Ли $\mathfrak{s}$.

Замечание 2. Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ формула (21) определяет на $\mathfrak{g}$ тернарную операцию, по отношению к которой алгебра $\mathfrak{g}$ является тернаром Ли. Однако, оказывается, что удобнее определять на $\mathfrak{g}$ структуру тернара Ли формулой

$$[X,Y,Z] = \frac{1}{4}[[X,Y],Z], \qquad X,Y,Z \in \mathfrak{g}. \tag{26}$$

В дальнейшем мы всегда будем так поступать.

Тернар Ли симметрического пространства

По построению для любого симметрического пространства $\mathcal{X}$ алгебра Ли $\mathfrak{d}\mathcal{X}$ его дифференцирований является симметрической алгеброй Ли со структурным автоморфизмом (18).

Ее цоколь обозначается символом $\mathfrak{s}\mathcal{X}$ и называется *тернаром Ли* симметрического пространства $\mathcal{X}$. Векторные поля X из $\mathfrak{s}\mathcal{X}$ называются *существенными дифференцированиями* симметрического пространства $\mathcal{X}$.

Заметим, что коцоколь $\mathfrak{h}(\mathfrak{d}\mathcal{X})$ алгебры Ли $\mathfrak{d}\mathcal{X}$ состоит из дифференцирований X, для которых

$$X_{p_0} = 0.$$

Задача 10. Докажите, что для дифференцирований $X, Y, Z \in \mathfrak{s}\mathcal{X}$ имеет место формула

$$[X,Y,Z] = -\frac{1}{4}(X\cdot(Y\cdot Z) - Y\cdot(X\cdot Z))$$

и, значит (см. задачу 1 лекции 6),

$$R(X,Y)Z = -[X,Y,Z], \qquad X,Y,Z \in \mathfrak{s}\mathcal{X}, \tag{27}$$

где R — тензор кривизны канонической связности на $\mathcal{X}$.

Замечание 3. В каждом пространстве аффинной связности формула

$$[X,Y,Z] = R(X,Y)Z \tag{28}$$

определяет тернарную операцию, удовлетворяющую условиям (22) и (23). Что же касается условия (24), то для операции (28) оно имеет вид

$$R(X,Y)R(U,V)W = R(R(X,Y)U,V)W + \\ + R(U,R(X,Y)V)W + R(U,V)R(X,Y)W,$$

что равносильно тождеству (26) лекции 4. Это означает, что *пространство аффинной связности тогда и только тогда полусимметрично, когда относительно операции* (28) *оно является тернаром Ли* (и выполнено условие $T = 0$).