ЛЕКЦИЯ 9

Функтор $\mathfrak{s}$. — Сравнение функтора $\mathfrak{s}$ с функтором Ли $\mathfrak{l}$. — Свойства функтора $\mathfrak{s}$. — Вычисление териара Ли пространства $(\mathcal{G}/\mathcal{H})_\sigma$. — Фундаментальная группа факторпространства. — Симметрическое пространство с данным тернаром Ли. — Накрытия $\mathcal{G}/\mathcal{H}_1 \to \mathcal{G}/\mathcal{H}_2$. — Теорема Картана. — Отождествление однородных пространств с факторпространствами. — Трансляции симметрического пространства. — Доказательство теоремы Картана.

Функтор $\mathfrak{s}$ Построенный в предыдущей лекции тернар Ли $\mathfrak{s}\mathcal{X}$ зависит от выбора точки $p_0 \in \mathcal{X}$, т. е. является функцией пары $(\mathcal{X}, p_0)$. Такие пары называются *пунктированными симметрическими пространствами.*

Морфизмом f: $(\mathcal{X}, p_0) \to (\mathcal{Y}, q_0)$ пунктированных пространств называется такой морфизм f: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, что $f(p_0) = q_0$. Ясно, что все пунктированные симметрические пространства и все их морфизмы составляют категорию.

Предложение 1. *Пусть f: $(\mathcal{X}, p_0) \to (\mathcal{Y}, q_0)$ — произвольный морфизм пунктированных симметрических пространств. Тогда для любого существенного дифференцирования $X \in \mathfrak{s}\mathcal{X}$ существует единственное существенное дифференцирование $Y \in \mathfrak{s}\mathcal{Y}$, f-связанное с X.*

Докажем предварительно две леммы.

Лемма 1. *Для любого существенного дифференцирования $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ и любой точки $p \in \mathcal{X}$ имеет место равенство*

$$X_p = \frac{1}{2}(dR_{p_0 p})_{p_0} X_{p_0}. \tag{1}$$

Доказательство. Условие $\sigma X = -X$, характеризующее существенные дифференцирования, означает, что

$$X_{p_0 p} = -(dL_{p_0})_p X_p \tag{2}$$

для любой точки $p \in \mathcal{X}$. Поэтому

$$X_p = -(dL_{p_0})_{p_0 p} X_{p_0 p} =$$
$$= -(dL_{p_0})_{p_0 p}((dR_p)_{p_0} X_{p_0} + (dL_{p_0})_p X_p) =$$
$$= -d(L_{p_0} \circ R_p)_{p_0} X_{p_0} - X_p.$$

С другой стороны, так как $(dL_{p_0})_{p_0}X_{p_0} = -X_{p_0}$ и $L_{p_0}\circ R_p = R_{p_0p}\circ L_{p_0}$ (см. формулы (10) и (11) лекции 6), то

$$d(L_{p_0}\circ R_p)_{p_0}X_{p_0} = -(dR_{p_0p})_{p_0}X_{p_0}.$$

Следовательно, $X_p = (dR_{p_0p})_{p_0}X_{p_0} - X_p$, что равносильно (1). □

Лемма 2. *Для любого вектора $A\in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ формула*

$$X_p = \frac{1}{2}(dR_{p_0p})_{p_0}A, \qquad p\in\mathcal{X}, \tag{3}$$

определяет на $\mathcal{X}$ существенное дифференцирование X, для которого $X_{p_0} = A$.

Доказательство. Ясно, что заданное формулой (3) поле X гладко. Кроме того, из формулы (15) лекции 8 (и равенства $p_0p_0 = p_0$) непосредственно следует, что $X_{p_0} = A$, а из формулы $L_{p_0}\circ R_{p_0p} = R_p\circ L_{p_0}$ (см. формулы (11) и (10) лекции 8), что

$$(dL_{p_0})_pX_p = \frac{1}{2}d(R_p\circ L_{p_0})_{p_0}A = -\frac{1}{2}(dR_p)_{p_0}A = -X_{p_0p},$$

т. е. что $\sigma X = -X$. Таким образом, нужно лишь доказать, что поле X является дифференцированием.

С этой целью мы рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{X}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X} & \xrightarrow{\Delta\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}} & \mathcal{X}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X} & \xrightarrow{\mathrm{id}\times T\times\mathrm{id}} & \mathcal{X}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X} \\
{\scriptstyle \mathrm{id}\times\mu}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mu\times\mu} \\
\mathcal{X}\times\mathcal{X} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{X} & \xleftarrow{\mu} & \mathcal{X}\times\mathcal{X},
\end{array}$$

где T — отображение $(p,q)\mapsto(q,p)$ транспонирования координат, а μ — умножение $(p,q)\mapsto pq$.

При движении из левого верхнего угла этой диаграммы по часовой стрелке в центр $\mathcal{X}$ нижней строки точка $(p,q,r)\in\mathcal{X}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ переходит в точку $(pq)(pr)\in\mathcal{X}$, а при движении против часовой стрелки — в точку $p(qr)\in\mathcal{X}$. Поэтому для каждого симметрического пространства $\mathcal{X}$ эта диаграмма коммутативна. Значит, коммутативна и соответствующая диаграмма касательных пространств и дифференциалов, т. е. (см. общую формулу (13) лекции 8) для любых векторов $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$, $B \in \mathsf{T}_q\mathcal{X}$, $C \in \mathsf{T}_r\mathcal{X}$ имеет место равенство

$$(dR_{qr})_pA + (dL_p)_{qr}((dR_r)_qB + (dL_q)_rC) =$$
$$= (dR_{pr})_{pq}((dR_q)_pA+(dL_p)_qB)+(dL_{pq})_{pr}((dR_r)_pA+(dL_p)_rC).$$

При $B = C = 0$ это дает соотношение

$$(dR_{qr})_pA = (dR_{pr})_{pq}(dR_q)_pA + (dL_{pq})_{pr}(dR_r)_pA.$$

(При $A = C = 0$ и $A = B = 0$ получаются следствия соотношения (11) и второго из соотношений (9) лекции 8.)

При p, q и r, равных, соответственно, p_0, p_0p и p_0q, отсюда следует (в силу равенств $p_0(p_0q) = q$ и $p_0(p_0p) = p$), что

$$\frac{1}{2}(dR_{(p_0p)(p_0q)})_{p_0}A = (dR_q)_pX_p + (dL_p)_qX_q.$$

Поскольку $(p_0p)(p_0q) = p_0(pq)$ и, значит,

$$\frac{1}{2}(dR_{(p_0p)(p_0q)})_{p_0}A = \frac{1}{2}(dR_{p_0(pq)})_{p_0}A = X_{pq},$$

это доказывает, что X — дифференцирование. □

Доказательство предложения 1. Пусть дифференцирование Y существует. Тогда $Y_{q_0} = (df)_{p_0}X_{p_0}$ и, значит, согласно формуле (1)

$$Y_q = \frac{1}{2}(dR_{q_0q})_{q_0}(df)_{p_0}X_{p_0} \tag{4}$$

для любой точки $q \in \mathcal{Y}$. Это доказывает единственность поля Y.

Для доказательства его существования мы определим на $\mathcal{Y}$ поле Y формулой (4). Согласно лемме 2 это поле принадлежит $\mathfrak{s}\mathcal{Y}$ и удовлетворяет соотношению $Y_{q_0} = (df)_{p_0}X_{p_0}$. С другой стороны, так как f является морфизмом, то $f \circ R_{p_0p} = R_{q_0q} \circ f$, где $q = f(p)$, и потому

$$(df)_p \circ (dR_{p_0p})_{p_0} = (dR_{q_0q})_{q_0} \circ (df)_{p_0}.$$

Следовательно, $Y_{f(p)} = \dfrac{1}{2}(df)_p(dR_{p_0p})_{p_0}X_{p_0} = (df)_pX_p$ и, значит, поле Y p-связано с полем X. $\square$

Положив $Y = \mathfrak{s}(f)X$, мы получим, следовательно, некоторое отображение

$$\mathfrak{s}(f)\colon \mathfrak{s}\mathcal{X} \to \mathfrak{s}\mathcal{Y},$$

являющееся, очевидно, гомоморфизмом тернаров Ли. Это отображение обладает, конечно, свойством функториальности, т. е. соответствия $\mathcal{X} \mapsto \mathfrak{s}\mathcal{X}$, $f \mapsto \mathfrak{s}(f)$ представляют собой функтор из категории пунктированных симметрических пространств в категорию тернаров Ли.

Сравнение функтора $\mathfrak{s}$ с функтором Ли $\mathfrak{l}$

В случае, когда симметрическое пространство $\mathcal{X}$ является группой Ли $\mathcal{G}$ (см. пример-задачу 1 лекции 5), а $p_0 = e$, где, как всегда, e — единица группы $\mathcal{G}$, оператор R_q выражается формулой

В случае, когда симметрическое пространство $\mathcal{X}$ является группой Ли $\mathcal{G}$ (см. пример-задачу 1 лекции 5), а $p_0 = e$, где, как всегда, e — единица группы $\mathcal{G}$, оператор R_q выражается формулой

$$R_q = \mu \circ (\mathrm{id} \times L^{\mu}_{q'}) \circ \Delta,$$

где μ — умножение в группе $\mathcal{G}$, а $q' = q^{-1}$ и $L^{\mu}_{q'}$ — левый сдвиг на q' по отношению к умножению μ. Поэтому в силу общих формул (13) и (14) лекции 8 для любого вектора $A \in \mathbf{T}_p\mathcal{G}$ будет иметь место равенство

$$(dR_q)_pA = (dR^{\mu}_{q'p})_pA + (dL^{\mu}_{pq'})_pA,$$

где $q' = q^{-1}$ и $R^{\mu}_{q'p}$ — правый сдвиг на $q'p$ по отношению к умножению μ. В частности, при $p = e$

$$(dR_q)_eA = (dR^{\mu}_{q'})_eA + (dL^{\mu}_{q'})_eA, \qquad A \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}.$$

Полагая $q = e \cdot p = p^{-1}$, мы немедленно получаем отсюда, что в рассматриваемом случае формула (3) имеет вид

$$X_p = \frac{(dR^{\mu}_p)_eA + (dL^{\mu}_p)_eA}{2},$$

т. е. вид

$$X = \frac{X^L + X^R}{2}, \tag{3'}$$

где X^L — левоинвариантное, а X^R — правоинвариантное векторные поля на $\mathcal{G}$, для которых $X^L_e = X^R_e = X_e$.

Таким образом, формула (3′) дает общий вид полей $X \in \in \mathfrak{s}\mathcal{G}$.

Задача 1. Докажите, что *для любой группы Ли $\mathcal{G}$ соответствие $X \mapsto X^L$ определяет изоморфизм тернара Ли $\mathfrak{s}\mathcal{G}$ на алгебру Ли $\mathfrak{l}\mathcal{G}$, рассматриваемую как тернар Ли (с операцией, задаваемой формулой* (26) *лекции* 8).

В этом смысле функтор $\mathfrak{s}$: $\mathcal{X} \mapsto \mathfrak{s}\mathcal{X}$ является обобщением функтора $\mathfrak{l}$: $\mathcal{G} \mapsto \mathfrak{l}\mathcal{G}$.

Свойства функтора $\mathfrak{s}$ Свойства функтора $\mathfrak{s}$ аналогичны свойствам функтора $\mathfrak{l}$. Например, из лемм 1 и 2 непосредственно вытекает, что так же как и для функтора $\mathfrak{l}$, *соответствие $X \mapsto X_e$ определяет изоморфизм линеала $\mathfrak{s}\mathcal{X}$ с касательным пространством $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$* (обратный изоморфизмом $A \mapsto X$ задается формулой (3)).

Как правило, мы будем отождествлять $\mathfrak{s}\mathcal{X}$ и $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ посредством этого изоморфизма.

Задача 2. Докажите, что *для любого морфизма f: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ симметрических пространств гомоморфизм $\mathfrak{s}(f)$: $\mathfrak{s}\mathcal{X} \to \mathfrak{s}\mathcal{Y}$ тернаров Ли является в силу этого отождествления нечем иным, как дифференциалом $(df)_{p_0} : \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \to \mathsf{T}_{q_0}\mathcal{Y}$ морфизма f в точке p_0.*

Свойства биективности функтора $\mathfrak{l}$ (см. лекцию 7) также сохраняются для функтора $\mathfrak{s}$.

Теорема 1. *Для любого морфизма φ: $\mathfrak{s}\mathcal{X} \to \mathfrak{s}\mathcal{Y}$ тернаров Ли существует не более одного морфизма f: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ пунктированных симметрических пространств, для которого*

$$\mathfrak{s}(f) = \varphi.$$

Если пространство $\mathcal{X}$ односвязно, а гомоморфизм φ является изоморфизмом, то такой морфизм существует (и является накрытием).

Доказательство. Согласно утверждению задачи 2 равенство $\mathfrak{s}(f) = \mathfrak{s}(g)$ для морфизмов f, g: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ равносильно равенству $(df)_{p_0} = (dg)_{p_0}$, а согласно утверждению предложения 1 лекции 6 морфизмы f и g являются аффинными отображениями. Поэтому если $\mathfrak{s}(f) = \mathfrak{s}(g)$, то $f = g$ согласно предложению 2 лекции 3 (напомним, что по определению все симметрические пространства связны). Это доказывает первое утверждение теоремы 1.

Пусть теперь φ является изоморфизмом. Из формулы (27) лекции 8 следует, что рассматриваемый как отображение $\mathrm{T}_{p_0}\mathcal{X} \to \mathrm{T}_{q_0}\mathcal{Y}$ изоморфизм φ переводит тензор кривизны $R^{\mathcal{X}}_{p_0}$ пространства $\mathcal{X}$ в точке p_0 в тензор кривизны $R^{\mathcal{Y}}_{q_0}$ пространства $\mathcal{Y}$ в точке $q_0 = f(p_0)$. Поэтому согласно теореме 2 лекции 5 (и утверждению задачи 4 лекции 5) существует аффинное накрытие $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, для которого $(df)_e = \varphi$. Остается заметить, что согласно предложению 1 лекции 6 это накрытие является морфизмом симметрических пространств. $\square$

Вычисление тернара Ли пространства $(\mathcal{G}/\mathcal{H})_\sigma$

Теорема 2. *Для любого тернара Ли $\mathfrak{s}$ (конечномерного и над полем $\mathbb{R}$) существует односвязное пунктированное симметрическое пространство $\mathcal{X}$ с $\mathfrak{s}\mathcal{X} = \mathfrak{s}$. Любое другое пунктированное симметрическое пространство $\mathcal{X}'$ с $\mathfrak{s}\mathcal{X}' = \mathfrak{s}$ накрывается пространством $\mathcal{X}$.*

В частности, отсюда следует, что *с точностью до изоморфизма пространство $\mathcal{X}$ определено единственным образом.*

Задача 3. Докажите второе утверждение этой теоремы. [Указание. Воспользуйтесь вторым утверждением теоремы 1.]

Для доказательства первого утверждения теоремы 2 нам нужно предварительно вычислить тернар Ли симметрического пространства вида $(\mathcal{G}/\mathcal{H})_\sigma$ (см. пример-задачу 5 лекции 5). Для доказательства первого утверждения теоремы 2 нам нужно предварительно вычислить тернар Ли симметрического пространства вида $(\mathcal{G}/\mathcal{H})_\sigma$ (см. пример-задачу 5 лекции 5).

Пусть $\mathcal{G}$ — связная группа Ли, σ — ее инволютивный автоморфизм и $\mathcal{H}$ — такая (необходимо замкнутая) подгруппа группы $\mathcal{G}$, что

$$(\mathrm{Fix}\,\sigma)_e \subset \mathcal{H} \subset \mathrm{Fix}\,\sigma. \tag{5}$$

Соответствующее симметрическое пространство $(\mathcal{G}/\mathcal{H})_\sigma$ будет ничем иным, как факторпространством $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ с отмеченной точкой $p_0 = e\mathcal{H}$, в котором симметрии действуют по формуле

$$s_p q = a\sigma(a^{-1}b)\mathcal{H}, \qquad p = a\mathcal{H}, \quad q = b\mathcal{H}.$$

Чтобы вычислить тернар Ли этого симметрического пространства, мы введем в рассмотрение алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}\mathcal{G}$ правоинвариантных векторных полей на группе Ли $\mathcal{G}$. Относительно индуцированного автоморфизмом σ автоморфизма $\mathfrak{r}(\sigma)$ этой алгебры (который мы для упрощения формул будем обозначать прежним символом σ) она является симметрической алгеброй Ли.

Задача 4. Покажите, что *коцоколь $\mathfrak{h}$ симметрической алгебры Ли $\mathfrak{g}$ изоморфен алгебре Ли подгруппы $\mathcal{H}$.* (Ясно, что все подгруппы $\mathcal{H}$, удовлетворяющие условию (5), имеют изоморфные алгебры Ли.)

Пусть $\mathfrak{s}$ — цоколь симметрической алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Согласно полученным выше результатам для каждого поля $X \in \mathfrak{s}$ существует единственное дифференцирование $X^\sharp \in \mathfrak{s}\mathcal{X}$, $\mathcal{X} = (\mathcal{G}/\mathcal{H})_\sigma$, для которого

$$X^\sharp_{p_0} = (dj)_e X_e,$$

где j — каноническое отображение

$$j\colon \mathcal{G} \to \mathcal{X}, \qquad a \mapsto a\mathcal{H}, \qquad a \in \mathcal{G}.$$

Это дифференцированне задается равенством

$$X^\sharp_p = \frac{1}{2}(dR_{p_0 p})_{p_0}(dj)_e X_e = \frac{1}{2} d(R_{p_0 p} \circ j)_e X_e,$$

где отображение $R_{p_0 p} \circ j\colon \mathcal{G} \to \mathcal{X}$ действует по формуле

$$(R_{p_0 p} \circ j)(x) = j(x\sigma(x^{-1}\sigma(a))) = j(x\sigma(x^{-1})a), \quad x \in \mathcal{G}, \quad (6)$$

в которой a — такой элемент группы $\mathcal{G}$, что $p = j(a)$ (и, значит, $p_0 p = j(\sigma(a))$).

Формула (6) означает, что

$$R_{p_0 p} \circ j = j \circ \mu \circ (\mathrm{id} \times T_a) \circ \Delta,$$

где Δ — диагональное отображение $x \mapsto (x, x)$, μ — умножение $(x, y) \mapsto xy$, а T_a — отображение

$$R_a \circ \sigma \circ \nu \colon x \mapsto \sigma(x^{-1})a, \qquad x \in \mathcal{G}$$

(здесь R_a — правый сдвиг $x \mapsto xa$ в группе $\mathcal{G}$, а ν — диффеоморфизм обращения $x \mapsto x^{-1}$). Поэтому

$$d(R_{p_0p} \circ j)_e = (dj)_a \circ (d\mu)_{(e,a)} \circ (\mathrm{id} \times (dT_a)_e) \circ (d\Delta)_e,$$

где, поскольку $(d\nu)_e = -\mathrm{id}$,

$$(dT_a)_e = -(dR_a)_e \circ (d\sigma)_e.$$

В частности, мы видим, что если вектор $A \in \mathsf{T}_e\mathcal{G}$ имеет вид X_e, где $X \in \mathfrak{s}$ (и, значит, $(d\sigma)_e A = -A$), то

$$(dT_a)_e A = (dR_a)_e A.$$

Поскольку $(d\Delta)_e A = (A, A)$ и (см. формулу (13) лекции 8)

$$(d\mu)_{(e,a)}(A, B) = (dR_a)_e A + (dL_e)_a B = (dR_a)_e A + B$$

для любых $A \in \mathsf{T}_e\mathcal{G}$, $B \in \mathsf{T}_a\mathcal{G}$, этим доказано, что при $A = X_e$, $X \in \mathfrak{s}$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} d(R_{p_0p} \circ j)_e A = (dj)_a((dR_a)_e A + (dR_a)_e A) &= \\ = 2(dj)_a(dR_a)_e A = 2(dj)_a X_a& \end{aligned}$$

и, значит, равенство

$$X_p^\sharp = (dj)_a X_a.$$

Так как $p = j(a)$, то по определению это означает, что *поля X и $X^\sharp$ j-связаны.*

Задача 5. Покажите, что $X^\sharp$ *является единственным полем из $\mathfrak{s}\mathcal{X}$ j-связанным с полем X.*

Поскольку (ср. задачу 5 лекции III.17) для любых полей $X, Y, Z \in \mathfrak{s}$ поле $[X, Y, Z]$ j-связано с полем $[X^\sharp, Y^\sharp, Z^\sharp]$, отсюда следует, что

$$[X, Y, Z]^\sharp = [X^\sharp, Y^\sharp, Z^\sharp],$$

т. е. что отображение $X \mapsto X^\sharp$ является изоморфизмом тернара Ли $\mathfrak{s}$ на тернар Ли $\mathfrak{s}\mathcal{X}$.

Таким образом, *тернар Ли* $\mathfrak{s}\mathcal{X}$ *симметрического пространства* $\mathcal{X} = (\mathcal{G}/\mathcal{H})_\sigma$ *естественно изоморфен цоколю* $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(\mathfrak{g})$ *симметрической алгебры Ли* $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}\mathcal{G}$.

Конечно, алгебру $\mathfrak{r}\mathcal{G}$ здесь можно заменить изоморфной — и более привычной — алгеброй $\mathfrak{l}\mathcal{G}$. [Вопрос. Что изменится, если с самого начала работать с алгеброй $\mathfrak{l}\mathcal{G}$?]

Задача 6. Задайте изоморфизм $\mathfrak{s}\mathcal{X} \to \mathfrak{s}(\mathfrak{l}\mathcal{G})$ явной формулой.

Фундаментальная группа факторпространства

Для дальнейшего нам нужно рассмотреть вопрос, как соотносятся друг с другом фундаментальные группы $\pi_1\mathcal{G}$ и $\pi_1(\mathcal{G}/\mathcal{H})$ группы Ли $\mathcal{G}$ (предполагаемой связной) и факторпространства $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ (в силу связности группы $\mathcal{G}$ также связного) по ее замкнутой подгруппе $\mathcal{H}$ (вообще говоря, не связной).

Так как компонента единицы $\mathcal{H}_e$ группы Ли $\mathcal{H}$ является ее инвариантной подгруппой, то множество

$$\pi_0\mathcal{H} = \mathcal{H}/\mathcal{H}_e$$

всех компонент связности группы $\mathcal{H}$ является группой относительно умножения

$$a\mathcal{H}_e \cdot b\mathcal{H}_e = ab\mathcal{H}_e, \qquad a, b \in \mathcal{H}.$$

Пусть, как и выше, $j\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ — каноническое отображение $a \mapsto a\mathcal{H}$, $a \in \mathcal{G}$, и пусть

$$j_*\colon \pi_1\mathcal{G} \to \pi_1(\mathcal{G}/\mathcal{H}) \tag{7}$$

— индуцированный этим отображением гомоморфизм фундаментальных групп (см. лекцию IV.4).

Так как отображение j является расслоением в смысле Гуревича (см. задачу 1 лекции IV.26), то любая петля $u\colon I \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ пространства $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ в точке $p_0 = e\mathcal{H}$ накрывается некоторым путем $v\colon I \to \mathcal{G}$ группы $\mathcal{G}$, начинающимся в точке e (и кончающимся в некоторой точке подгруппы $\mathcal{H}$). [Для (кусочно) гладких петель u существование накрывающего пути v следует также из существования для гладкого главного расслоения $(\mathcal{G}, j, \mathcal{G}/\mathcal{H})$ хотя бы одной связности; см. лекцию IV.20. Заметим, что в силу леммы 1 лекции IV.3 этот случай для наших целей вполне достаточен.]

Если $v_1\colon I \to \mathcal{G}$ — другой путь, накрывающий петлю u (и также начинающийся в точке e), то формула

$$w(t) = v(t)^{-1}v_1(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

определяет путь $w\colon I \to \mathcal{H}$, начинающийся в точке e и, значит, такой, что $w(t) \in \mathcal{H}_e$. Поскольку $v_1(1) = v(1)w(1)$, это доказывает, что *элемент* $v(1)\mathcal{H}_e$ *группы* $\pi_0\mathcal{H}$ *не зависит от выбора накрывающего пути* v.

Задача 7. Докажите, что *формула*

$$\delta[u] = v(1)\mathcal{H}_e$$

корректно определяет гомоморфизм

$$\delta\colon\ \pi_1(\mathcal{G}/\mathcal{H}) \to \pi_0\mathcal{H} \tag{8}$$

группы $\pi_1(\mathcal{G}/\mathcal{H})$ *в группу* $\pi_0\mathcal{H}$.

Предложение 2. *Гомоморфизм* (8) *является эпиморфизмом. Его ядром служит образ* $\operatorname{Im} j_*$ *гомоморфизма* (7).

На языке точных последовательностей (см. лекцию IV.4) предложение 2 утверждает, что *имеет место точная последовательность*

$$\pi_1\mathcal{G} \xrightarrow{j_*} \pi_1(\mathcal{G}/\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} \pi_0\mathcal{H} \to 1. \tag{9}$$

[Поскольку, как выше уже было отмечено, отображение j: $\mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ представляет собой расслоение в смысле Гуревича, предложение 2 является поэтому частным случаем утверждения задачи 5 лекции IV.26, но мы дадим ему прямое доказательство.]

Доказательство. Так как группа Ли $\mathcal{G}$ связна, то для любой точки $a \in \mathcal{H}$ в $\mathcal{G}$ существует путь v, соединяющий точку e с точкой a. Тогда путь $j \circ v\colon I \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ будет петлей в точке p_0 и в группе $\pi_0\mathcal{H}$ будет иметь место равенство

$$\delta[j \circ v] = a\mathcal{H}_e.$$

Следовательно, отображение (8) эпиморфно.

Если $u = j \circ v$, где v — петля в $\mathcal{G}$, то $\delta[u] = e\mathcal{H}_e = \mathcal{H}_e$ и, значит, $[u] \in \operatorname{Ker}\delta$. Это доказывает, что $\operatorname{Im} j_* \subset \operatorname{Ker}\delta$.

Обратно, пусть $[u] \in \operatorname{Ker}\delta$, т. е. пусть для u существует такой накрывающий путь v, что $v(1) \in \mathcal{H}_e$. Тогда мы можем построить путь $v * v_0$, где v_0 — произвольный путь в $\mathcal{H}_e$, соединяющий точку $v(1)$ с точкой e. Этот путь накрывает путь $u * (j \circ v_0) = j \circ (v * v_0)$, где $j \circ v_0$ — постоянный путь в точке p_0. Так как $[u] = [u * (j \circ v_0)]$ в группе $\pi_1(\mathcal{G}/\mathcal{H})$, то, следовательно, $[u] = [j \circ (v * v_0)] = j_*[v * v_0] \in \operatorname{Im} j_*$. Значит, $\operatorname{Ker} \delta \subset \operatorname{Im} j_*$, и потому $\operatorname{Ker} \delta = \operatorname{Im} j_*$. □

Следствие 1. *Если группа $\mathcal{G}$ односвязна, то группа $\pi_1(\mathcal{G}/\mathcal{H})$ изоморфна группе $\pi_0\mathcal{H}$.* □

Следствие 2. *Если подгруппа $\mathcal{H}$ связна, то группа $\pi_1(\mathcal{G}/\mathcal{H})$ является гомоморфным образом группы $\pi_1\mathcal{G}$.* □

Следствие 3. *Если подгруппа $\mathcal{H}$ связна, а группа $\mathcal{G}$ односвязна, то пространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ односвязно.* □

Задача 8. Докажите, что *ядром гомоморфизма* (7) *является образ группы $\pi_1\mathcal{H} = \pi_1\mathcal{H}_e$ при гомоморфизме $i_*\colon \pi_1\mathcal{H} \to \pi_1\mathcal{G}$, индуцированном вложением $i\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}$.*

В частности, отсюда следует, что *если подгруппа $\mathcal{H}$ связна и односвязна, то группа $\pi_1(\mathcal{G}/\mathcal{H})$ изоморфна группе $\pi_1\mathcal{G}$.*

Задача 9. Постройте гомоморфизм

$$\delta\colon \pi_2(\mathcal{G}/\mathcal{H}) \to \pi_1\mathcal{H} \tag{10}$$

и докажите, что $\operatorname{Im} \delta = \operatorname{Ker} i_*$.

Замечание 1. Можно доказать — это трудная теорема! — что $\pi_2\mathcal{G} = 0$ для любой связной группы Ли $\mathcal{G}$. Поэтому в силу общего утверждения о точности гомотопической последовательности расслоения (см. задачу 5 лекции IV.26) гомоморфизм (10) является мономорфизмом. Вместе с утверждениями задач 8 и 9 это означает, что *точная последовательность* (9) *является отрезком точной последовательности*

$$0 \to \pi_2(\mathcal{G}/\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} \pi_1\mathcal{H} \xrightarrow{i_*} \pi_1\mathcal{G} \xrightarrow{j_*} \pi_1(\mathcal{G}/\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} \pi_0\mathcal{H} \to 1.$$

В частности, если группа $\mathcal{G}$ односвязна, то $\pi_1\mathcal{H} \approx \approx \pi_2(\mathcal{G}/\mathcal{H})$.

Симметрическое пространство с данным тернаром Ли

Теперь у нас все готово для доказательства теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. В доказательстве нуждается — см. задачу 3 — лишь первое утверждение этой теоремы, т. е. тот факт, что для любого (конечномерного и над полем $\mathbb{R}$) тернара Ли $\mathfrak{s}$ существует односвязное пунктированное симметрическое пространство $\mathcal{X}$ с $\mathfrak{s}\mathcal{X} \approx \mathfrak{s}$.

С этой целью мы рассмотрим произвольную симметрическую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{s}(\mathfrak{g}) \approx \mathfrak{s}$ и односвязную группу Ли $\mathcal{G}$ с $\mathfrak{l}\mathcal{G} \approx \mathfrak{g}$. (Существование алгебры Ли $\mathfrak{g}$ обеспечивается предложением 5 лекции 8, а существование группы Ли $\mathcal{G}$ — теоремой Картана; см. лекцию 7). Согласно предложению 2 лекции 7 существует инволютивный автоморфизм группы $\mathcal{G}$ (который мы обозначим прежним символом σ), индуцирующий структурный автоморфизм σ симметрической алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и, значит, определено пунктированное симметрическое пространство $\mathcal{X} = (\mathcal{G}/\mathrm{Fix}(\sigma)_e)_\sigma$. Так как группа $\mathcal{G}$ односвязна, а группа $\mathrm{Fix}(\sigma)_e$ связна, то это пространство односвязно. С другой стороны, согласно проделанному выше вычислению тернар Ли $\mathfrak{s}\mathcal{X}$ этого пространства изоморфен цоколю алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и, значит, изоморфен данному тернару Ли $\mathfrak{s}$. $\square$

Накрытия $\mathcal{G}/\mathcal{H}_1 \to \mathcal{G}/\mathcal{H}_2$

Для несвязной подгруппы $\mathcal{H}$ отображение

$$\mathcal{G}/\mathcal{H}_e \to \mathcal{G}/\mathcal{H}, \tag{11}$$

индуцированное включением смежных классов, является локально тривиальным расслоением с дискретным слоем $\mathcal{H}/\mathcal{H}_e$, т. е. представляет собой накрытие. Согласно следствию 1, *в случае, когда группа $\mathcal{G}$ односвязна, накрытие* (11) *является универсальным накрытием.*

Вообще, *если для подгрупп $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ с $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ факторпространство $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_1$ дискретно, то имеет место накрытие*

$$\mathcal{G}/\mathcal{H}_1 \to \mathcal{G}/\mathcal{H}_2$$

со слоем $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_1$.

Задача 10. Покажите, что *факторпространство $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_1$ тогда и только тогда дискретно, когда компоненты единицы подгрупп $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ совпадают:*

$$(\mathcal{H}_1)_e = (\mathcal{H}_2)_e.$$

Отсюда следует, что *для любого инволютивного автоморфизма σ связной группы $\mathcal{G}$ каждое симметрическое пространство вида $(\mathcal{G}/\mathcal{H})_\sigma$ накрывается симметрическим пространством $(\mathcal{G}/\operatorname{Fix}(\sigma)_e)_\sigma$* (обычно обозначаемым символом $\mathcal{G}^\sigma$) *и накрывает симметрическое пространство $\mathcal{G}/\operatorname{Fix}(\sigma)$* (изоморфное — напомним — симметрическому пространству $\mathcal{G}_\sigma$ из примера-задачи 4 лекции 5).

С топологической точки зрения наиболее просто устроено пространство $\mathcal{G}^\sigma$ (скажем, для односвязной группы $\mathcal{G}$ оно односвязно), но, тем не менее, часто удобнее пространство $\mathcal{G}_\sigma$ с большей фундаментальной группой, поскольку оно вложено в группу Ли $\mathcal{G}$ в качестве — как мы увидим — вполне геодезического подмногообразия.

Теорема Картана Пусть теперь опять $\mathcal{X}$ — произвольное симметрическое пространство.

Применив конструкцию, использованную выше для доказательства теоремы 2, к тернару Ли $\mathfrak{s}\mathcal{X}$ и воспользовавшись теоремой 1 (точнее — ее вторым утверждением), мы немедленно получим, что *для любого симметрического пространства $\mathcal{X}$ существует аффинное универсальное накрытие вида*

$$\mathcal{G}^\sigma \to \mathcal{X}.$$

В частности, это доказывает, что *каждое односвязное симметрическое пространство изоморфно пространству вида $\mathcal{G}^\sigma$*.

Оказывается, что условие односвязности здесь можно снять.

Теорема 3. (Картан) *Каждое симметрическое пространство $\mathcal{X}$ изоморфно пространству вида $(\mathcal{G}/\mathcal{H})_\sigma$.*

Задача 11. Убедитесь в справедливости теоремы 3 для симметрических пространств из примеров-задач 1–3 лекции 5. [Указание. Для любой группы Ли $\mathcal{G}$ имеет место равенство $\mathcal{G} = ((\mathcal{G}\times\mathcal{G})/\Delta)_\sigma$, где Δ — *диагональная подгруппа*, состоящая из элементов вида $(a,a)\in\mathcal{G}\times\mathcal{G}$, $a\in\mathcal{G}$, а σ: $(a,b)\mapsto(b,a)$, $a,b\in\mathcal{G}$. С другой стороны,

$$G_{\mathbb{R}}(m,n) = (\mathrm{SO}(n)/\mathcal{H})_\sigma,$$

где $\mathcal{H} = \operatorname{Fix}(\sigma)$, $\sigma = \operatorname{int}_J\colon A\mapsto JAJ^{-1}$, $J = (-E_m)\oplus E_{n-m}$.]

Отождествление однородных пространств с факторпространствами

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая общая лемма.

Лемма 3. *Каждое гладкое многообразие $\mathcal{X}$, на котором гладко и транзитивно действует группа Ли $\mathcal{G}$, диффеоморфно фактормногообразию $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — стабилизатор произвольно выбранной точки $p_0 \in \mathcal{X}$. Диффеоморфизм*

$$\varphi\colon\ \mathcal{G}/\mathcal{H} \to \mathcal{X}$$

задается формулой

$$\varphi(a\mathcal{H}) = ap_0, \qquad a \in \mathcal{G}. \tag{12}$$

[По определению подгруппа $\mathcal{H}$ состоит из всех элементов $a \in \mathcal{G}$, для которых $ap_0 = p_0$. Эта подгруппа, очевидно, замкнута, и потому — см. теорему 1 лекции IV.15 — является подгруппой Ли. Являясь факторпространством по замкнутой подгруппе Ли, пространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ представляет собой — см. задачу 4 лекции IV.15 — гладкое многообразие.]

Доказательство. Биективность и гладкость отображения φ очевидны. Поскольку надъективное гладкое отображение, являющееся погружением, необходимо этально, нам нужно лишь доказать, что отображение φ представляет собой погружение. Конечно, это достаточно сделать лишь в точке $e\mathcal{H}$.

Но вспомнив определение карт многообразия $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ (см. лекцию IV.15), мы немедленно получим, что отображение φ тогда и только тогда является погружением в точке $e\mathcal{H}$, когда дифференциал

$$(d\psi)_e\colon\ \mathsf{T}_e\mathcal{G} \to \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$$

в точке e отображения

$$\psi\colon\ \mathcal{G} \to \mathcal{X}, \quad a \mapsto ap_0, \qquad a \in \mathcal{G},$$

обладает тем свойством, что его ядро $\operatorname{Ker}(d\psi)_e$ совпадает с касательным подпространством $\mathsf{T}_e\mathcal{H}$ подгруппы $\mathcal{H}$. Поскольку включение $\mathsf{T}_e\mathcal{H} \subset \operatorname{Ker}(d\psi)_e$ очевидным образом выполнено, нам, следовательно, достаточно лишь доказать, что из равенства $(d\psi)_e A = 0$, $A \in \mathsf{T}_e\mathcal{G}$, следует включение $A \in \mathsf{T}_e\mathcal{H}$.

Пусть $\beta\colon t \mapsto \exp tA$ — однопараметрическая подгруппа группы $\mathcal{G}$ с начальным вектором A. Так как по определению

$(d\psi)_e\dot\beta(0) = (d\psi)_e A$, а по условию $(d\psi)_e A = 0$, то для любой гладкой вблизи точки p_0 функции f имеет место равенство

$$\left.\frac{df[(\exp tA)p_0]}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(f \circ \psi)(\beta(t))}{dt}\right|_{t=0} = [(d\psi)_e\dot\beta(0)]f = 0.$$

В частности, это верно для функции f_s, определенной формулой

$$f_s(p) = f((\exp sA)p),$$

где s — произвольное достаточно близкое к нулю вещественное число. Поскольку

$$\left.\frac{df[(\exp tA)p_0]}{dt}\right|_{t=s} = \left.\frac{df_s[(\exp tA)p_0]}{dt}\right|_{t=0},$$

отсюда следует, что функция $t \mapsto f((\exp tA)p_0)$ постоянна вблизи точки $t = 0$. В силу произвольности функции f это возможно только тогда, когда $(\exp tA)p_0 = p_0$, т. е. когда $\exp tA \in \mathcal{H}$. Следовательно, $A \in \mathsf{T}_e\mathcal{H}$. $\square$

Трансляции симметрического пространства По понятной ассоциации идей автоморфизмы симметрического пространства $\mathcal{X}$, являющиеся композициями четного числа симметрий s_p, $p \in \mathcal{X}$, называются его *трансляциями*. Все трансляции составляют подгруппу Trans $\mathcal{X}$ группы Aut $\mathcal{X}$ автоморфизмов пространства $\mathcal{X}$ — *группу трансляций*.

Группа Trans $\mathcal{X}$, являясь подгруппой группы автоморфизмов, естественным образом действует на многообразии $\mathcal{X}$. Легко видеть, что *это действие транзитивно*, т. е. для любых двух точек $p, q \in \mathcal{X}$ существует такой элемент a группы Trans $\mathcal{X}$, что $ap = q$. Действительно, из того что любая точка пространства $\mathcal{X}$ обладает нормальной окрестностью, немедленно вытекает (напомним, что пространство $\mathcal{X}$ предполагается связным), что точки p и q можно соединить кусочно гладкой кривой, составленной из нормальных геодезических сегментов, и композиция симметрий в средних точках этих сегментов переводит, очевидно, p в q. (Если число сегментов нечетно, следует добавить, скажем, симметрию s_p.) $\square$

Предложение 3. *Группа* Trans $\mathcal{X}$ *обладает гладкостью, по отношению к которой она является связной группой Ли, гладко действующей на многообразии* $\mathcal{X}$.

Мы докажем это предложение в следующей лекции.

Доказательство теоремы Картана

Доказательство теоремы 3. Пусть $\mathcal{G} = \mathrm{Trans}\,\mathcal{X}$. Выбрав точку $p_0 \in \mathcal{X}$, рассмотрим отображение $\sigma\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, определенное формулой

$$\sigma a = s_{p_0} a s_{p_0}, \qquad a \in \mathcal{G}.$$

Ясно, что σ является инволютивным автоморфизмом группы $\mathcal{G}$.

Пусть $\mathcal{H}$ — стабилизатор точки p_0 в группе $\mathcal{G}$. Так как для любого автоморфизма $\varphi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ и любой точки $p \in \mathcal{X}$ имеет место равенство $\varphi \circ s_p \circ \varphi^{-1} = s_q$, где $q = \varphi(p)$, то $s_{p_0} = a s_{p_0} a^{-1}$ при $a \in \mathcal{H}$ и, значит, $\sigma a = a$. Следовательно, $\mathcal{H} \subset \mathrm{Fix}(\sigma)$.

Пусть $A \in \mathbf{T}_e(\mathrm{Fix}(\sigma))$. Тогда $(d\sigma)_e A = A$ и, значит,

$$\sigma(\exp tA) = \exp tA$$

для любого $t \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$s_{p_0}((\exp tA)p_0) = (s_{p_0} \circ \exp tA)p_0 = \\ = (\exp tA \circ s_{p_0})p_0 = (\exp tA)p_0,$$

т. е. точка $(\exp tA)p_0$ является неподвижной точкой симметрии s_{p_0}. Поэтому — ввиду изолированности неподвижной точки p_0 — должно иметь место равенство

$$(\exp tA)p_0 = p_0$$

(для малых, а значит и для любых $t \in \mathbb{R}$). Это означает, что $\exp tA \in \mathcal{H}$, откуда в силу произвольности вектора A и связности группы $\mathrm{Fix}(\sigma)_e$ следует, что $\mathrm{Fix}(\sigma)_e \subset \mathcal{H}$.

Таким образом, для автоморфизма σ и подгруппы $\mathcal{H}$ выполнены условия (5) и, значит, определено симметрическое пространство $(\mathcal{G}/\mathcal{H})_\sigma$.

С другой стороны, так как группа Ли $\mathcal{G}$ транзитивно и гладко действует на многообразии $\mathcal{X}$, то согласно лемме 3 формула (12) корректно определяет диффеоморфизм

$$\varphi\colon (\mathcal{G}/\mathcal{H})_\sigma \to \mathcal{X}.$$

При этом так как

$$a\sigma(a^{-1}b) = as_{p_0}a^{-1}b\,s_{p_0} = s_{ap_0}bs_{p_0}, \qquad a, b \in \mathcal{G},$$

то

$$a\sigma(a^{-1}b)p_0 = s_{ap_0}(bp_0)$$

и, значит, диффеоморфизм φ является изоморфизмом симметрических пространств. □