ЛЕКЦИЯ 10

Бесконечномерные многообразия и группы Ли. — Векторные поля, индуцированные действием группы Ли. — Теорема Пале. — Теорема Кобаяси. — Группа аффинных автоморфизмов. — Группа автоморфизмов симметрического пространства. — Группа трансляций симметрического пространства.

Бесконечномерные многообразия и группы Ли

Понятие дифференцируемости (гладкости) не требует, вообще говоря, конечномерности и может быть определено для отображений открытых множеств произвольного линейного топологического пространства $\mathcal{E}$. Это позволяет очевидным образом определить *гладкие многообразия с картами из* $\mathcal{E}$: достаточно в обычном определении гладкого многообразия (см. лекцию III.6) всюду заменить открытые множества пространства $\mathbb{R}^n$ открытыми множествами пространства $\mathcal{E}$. В зависимости от типа пространства $\mathcal{E}$ тем самым возникают *гильбертовы*, *банаховы*, *локально выпуклые* и т. д. многообразия. Все такие многообразия принято называть *бесконечномерными многообразиями*, хотя, конечно, этот термин и нельзя признать очень удачным. Их теория — при тех или иных условиях на пространство $\mathcal{E}$ — почти дословно повторяет в своей начальной части теорию конечномерных многообразий, но, например, на бесконечномерном многообразии гладкое векторное поле может не иметь интегральных кривых.

Бесконечномерные группы Ли определяются обычным образом как многообразия $\mathcal{G}$ с гладким умножением $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$. Также обычным образом определяется *алгебра Ли* $\mathfrak{l}\mathcal{G}$ каждой такой группы (как линейное пространство эта алгебра изоморфна базисному пространству $\mathcal{E}$). Для *банаховых групп Ли* (над банаховым пространством $\mathcal{E}$) теория может быть продвинута довольно далеко параллельно теории конечномерных групп Ли. Для более общих групп параллелизм нарушается, и о них известно мало. Неизвестно даже, всегда ли существуют однопараметрические подгруппы с данным начальным вектором, т. е., иначе говоря, всегда ли определено экспоненциальное отображение $\mathfrak{l}\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ (хотя контрпримеров также, по-видимому, неизвестно). Однако, если экспоненциальное отображение и существует, то, вообще говоря, оно не инъективно н не покрывает никакой окрестности единицы.

Отсутствне общей теории не мешает, конечно, нзучению тех или иных конкретных классов бесконечномерных групп Ли (и даже, скорее, стимулирует особое внимание к ним). Так, например, за последние годы усиленно развивалась теория так называемых *групп токов*, элементами которых являются гладкие отображения $\mathcal{X} \to \mathcal{G}$ данного компактного многообразия $\mathcal{X}$ (особенно интересен и далеко продвинут случай $\mathcal{X} = \mathbb{S}^1$) в данную конечномерную группу $\mathcal{G}$. Другой важный класс бесконечномерных небанаховых групп Ли, о котором известно существенно меньше, — это группы $\operatorname{Diff}\mathcal{X}$ днффеоморфнзмов конечномерных гладких многообразий $\mathcal{X}$.

Алгеброй Ли группы $\operatorname{Diff}\mathcal{X}$ является алгебра $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ всех векторных полей на $\mathcal{X}$ и, значит, алгебрами Лн подгрупп группы $\operatorname{Diff}\mathcal{X}$ — подалгебры алгебры $\mathfrak{a}\mathcal{X}$. По аналогии со случаем конечномерных групп Ли (см. лекцию IV.14) естественно ожидать — быть может, с некоторымн оговорками — биектнвного соответствия между подгруппамн группы $\operatorname{Diff}\mathcal{X}$ и подалгебрами алгебры $\mathfrak{a}\mathcal{X}$. Мы рассмотрим этот вопрос для конечномерных подгрупп (т. е. подгрупп, являющихся обычными группамн Ли) н конечномерных подалгебр, когда все исследование может быть проведено в рамках теории конечномерных многообразий.

Конечно, ограниченне лишь конечномернымн многообразиями деформирует общую картину и лишает изложенне истинной перспективы, но мы вынуждены на него пойти. В дальнейшем бесконечномерные многообразня нигде явно упоминаться не будут, н их тема будет проходить только sotto voce. В частности, в группу $\operatorname{Diff}\mathcal{X}$ мы не будем вводить ни топологии, нн гладкости.

Векторные поля, индуцнрованные действнем группы Лн

Еслн группа Ли $\mathcal{G}$ гладко и эффективно действует на гладком многообразии $\mathcal{X}$, то для любого элемента $a \in \mathcal{G}$ отображение

$$L_a\colon\ p \mapsto ap, \qquad p \in \mathcal{X},$$

будет диффеоморфизмом многообразия $\mathcal{X}$ на себя, и соответствне $L\colon\ a \mapsto L_a$ будет мономорфным отображением группы $\mathcal{G}$ в группу $\mathrm{Diff}\,\mathcal{X}$ всех диффеоморфизмов $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Следовательно, группу $\mathcal{G}$ мы можем рассматривать как подгруппу (абстрактной) группы $\mathrm{Diff}\,\mathcal{X}$. При этом вложении каждая однопараметрическая подгруппа β_X: $t \mapsto \exp tX$, $X \in \mathfrak{l}\mathcal{G}$, группы $\mathcal{G}$ окажется потоком (см. лекцию III.17) на многообразии $\mathcal{X}$, определенным для всех $t \in \mathbb{R}$. Векторное поле, порождающее этот поток, мы обозначим символом $-X^*$. (Обратите внимание на знак! Чтобы его не вводить, надо вместо левоинвариантных полей X рассматривать правоинвариантные поля.) Как дифференцирование алгебры гладких функций $\mathsf{F}\mathcal{X}$, поле X^* действует по формуле

$$(X^*f)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p) - f((\exp tX)p)}{t}, \qquad p \in \mathcal{X}, \quad f \in \mathsf{F}\mathcal{X}.$$

Поэтому для любых элементов X, Y алгебры Ли имеем

$$(X^*Y^*f)(p) = \lim_{s\to 0} \frac{(Y^*f)(p) - (Y^*f(\exp sX)p)}{s} =$$

$$= \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \frac{f(p) - f((\exp tY)p - f((\exp sX)p) + f((\exp tY)(\exp sX)p)}{st} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((\exp tY)(\exp tX)p) - f((\exp tX)p) - f((\exp tY)p) + f(p)}{t^2}$$

и, значит,

$$([X^*, Y^*]f)(p) = (X^*Y^*f)(p) - (Y^*X^*f)(p) =$$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{f((\exp tX)(\exp tY)p) - f((\exp tY)(\exp tX)p)}{t^2}.$$

Пусть $t^1, \ldots, t^m$ — нормальные координаты в окрестности единицы группы $\mathcal{G}$, отвечающие базису $X_1, \ldots, X_m$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты на $\mathcal{X}$, определенные в окрестности точки p и равные нулю в p. Пусть, далее, $f = f(\boldsymbol{x})$ — выражение функции f в координатах $x^1, \ldots, x^n$, а $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ — вектор-функция, задающая в координатах $t^1, \ldots, t^m$ и $x^1, \ldots, x^n$ отображение $a \mapsto ap$. Так как $ep = p$, то компоненты $x^i(\boldsymbol{t})$, $i = 1, \ldots, n$, последней функции имеют вид

$$x^i(\boldsymbol{t}) = c^i_a t^a + c^i_{ab} t^a t^b + \ldots,$$

где многоточие обозначает члены степени $\geqslant 3$ по $t^1, \ldots, t^m$ (и $c^i_{ab} = c^i_{ba}$). Поэтому для любого элемента $X = t^a X_a$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеем

$$\begin{aligned} f((\exp X)p) &= f(x(t)) = \\ &= f(p) + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p x^i(t) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)_p x^i(t) x^j(t) + \ldots = \\ &= f(p) + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p (c^i_a t^a + c^i_{ab} t^a t^b + \ldots) + \\ &\qquad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)_p (c^i_a c^j_b t^a t^b + \ldots) + \ldots, \end{aligned}$$

и, значит,

$$(X^* f)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p) - f((\exp tX)p)}{t} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p c^i_a X^a,$$

где вместо t^a мы написали X^a. Кроме того, поскольку в силу формулы (12) лекции IV.14 (см. также формулы (11) и (12) лекции 7)

$$f((\exp tX)(\exp tY)p) = f(\exp(t(X+Y) + \frac{1}{2} t^2 [X, Y] + \ldots)p),$$

отсюда также следует, — в понятных обозначениях — что

$$\begin{aligned} f((\exp tX)(\exp tY)p) &= f(p) + t \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p c^i_a (X^a + Y^a) + \\ + t^2 \Bigg[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p c^i_a [X, Y]^a &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p c^i_{ab} (X^a + Y^a)(X^b + Y^b) + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)_p c^i_a c^j_b (X^a + Y^a)(X^b + Y^b) \Bigg] + \ldots, \end{aligned}$$

где по-прежнему многоточие обозначает члены степени $\geqslant 3$ по t, и, значит, что

$$\begin{aligned} f((\exp tX)(\exp tY)p) &- f((\exp tY)(\exp tX)p) = \\ &= \frac{t^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p c^i_a ([X, Y]^a - [Y, X]^a) + \ldots = \\ &= t^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p c^i_a [X, Y]^a + \ldots = -t^2 ([X, Y]^* f)(p) + \ldots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$([X^*,Y^*]f)(p) =$$
$$= -\lim_{t\to 0} \frac{f((\exp tX)(\exp tY)p) - f((\exp tY)(\exp tX)p)}{t^2} =$$
$$= ([X,Y]^*f)(p).$$

Этим доказано, что $[X,Y]^* = [X^*,Y^*]$, т. е. что *соответствие $X \mapsto X^*$ является гомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}\mathcal{G}$ группы Ли $\mathcal{G}$ в алгебру Ли $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ векторных полей на $\mathcal{X}$.*

Если $X^* = 0$, то $\exp(-tX)p = p$ для любой точки $p \in \mathcal{X}$ и любого $t \in \mathbb{R}$, что ввиду эффективности действия группы $\mathcal{G}$ на многообразии $\mathcal{X}$ возможно только при $X = 0$. Следовательно, гомоморфизм $X \mapsto X^*$ *является мономорфизмом.*

Это означает, что, отождествив X с X^*, мы можем (и будем) считать алгебру Ли $\mathfrak{g}$ подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathcal{X}$. Подчеркнем, что в отличие от всей алгебры $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ эта подалгебра конечномерна. Кроме того, она состоит из *полных полей*, т. е. из таких полей, что соответствующий максимальный поток определен для всех $t \in \mathbb{R}$. Оказывается, эти свойства полностью характеризуют подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathcal{X}$, являющиеся алгебрами Ли групп Ли, гладко и эффективно действующих на многообразии $\mathcal{X}$. Более того, это утверждение можно даже несколько усилить.

Теорема Пале

Мы будем говорить, что подмножество S алгебры Ли $\mathfrak{g}$ *порождает* $\mathfrak{g}$, если каждая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, содержащая S, совпадает с $\mathfrak{g}$. Аналогично, мы будем говорить, что множество S *линейно порождает* $\mathfrak{g}$, если оно полно в смысле определения 4 лекции I.3 (т. е. содержит некоторый базис алгебры $\mathfrak{g}$).

Для каждого полного поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ поток на $\mathcal{X}$, индуцированный этим полем, мы будем обозначать символом $\{\varphi_t^X\}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathcal{X}$, и пусть $\mathcal{G}$ — подгруппа группы $\operatorname{Diff}\mathcal{X}$, порожденная всеми диффеоморфизмами вида φ_t^X, где $t \in \mathbb{R}$, а X — произвольное полное поле из $\mathfrak{g}$. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$*

а *конечномерна;*

б *порождена множеством, состоящим из полных полей,*

то группа $\mathcal{G}$ обладает гладкостью, по отношению к которой она является связной группой Ли, гладко и эффективно действующей на многообразии $\mathcal{X}$, причем отвечающий этому действию мономорфизм $X \mapsto X^*$ является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{l}\mathcal{G}$ на подалгебру $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Согласно теореме Картана из лекции V.10 существует связная и односвязная группа Ли $\widetilde{\mathcal{G}}$, алгебра Ли $\mathfrak{l}\widetilde{\mathcal{G}}$ которой изоморфна алгебре $\mathfrak{g}$. Элемент алгебры Ли $\mathfrak{l}\widetilde{\mathcal{G}}$ (левоинвариантное векторное поле на $\widetilde{\mathcal{G}}$), отвечающий при этом изоморфизме векторному полю $X \in \mathfrak{g}$, мы будем обозначать символом $\widetilde{X}$.

Как мы знаем (см. лекцию IV.21), в каждой точке $(a,p) \in \widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X}$ прямого произведения $\widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X}$ касательное пространство $\mathsf{T}_{(a,p)}(\widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X})$ естественным образом разлагается в прямую сумму касательных пространств $\mathsf{T}_a\widetilde{\mathcal{G}}$ и $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$. Поэтому каждое поле $X \in \mathfrak{g}$ определяет в $\mathsf{T}_{(a,p)}(\widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X})$ вектор $(\widetilde{X}_a, X_p)$ (напомним, что $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}\mathcal{X}$), и все такие векторы составляют в $\mathsf{T}_{(a,p)}(\widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X})$ подпространство $\mathcal{D}_{(a,p)}$.

Задача 1. Покажите, что

а *подпространства $\mathcal{D}_{(a,p)}$ гладко зависят от точки* (a,p), т. е. составляют на $\mathcal{G} \times \mathcal{X}$ распределение $\mathcal{D}$;

б *распределение $\mathcal{D}$ инволютивно.*

[Указание. Векторные поля $(a,p) \mapsto (\widetilde{X}_a, X_p)$ порождают $\mathsf{F}(\widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X})$-модуль $\mathfrak{a}\mathcal{D}$; о распределениях и связанных с ними понятиях см. лекцию IV.14.]

Поэтому, согласно теореме Фробениуса (теорема 3 лекции IV.14), через любую точку $(a,p) \in \widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X}$ проходит единственное максимальное интегральное многообразие распределения $\mathcal{D}$. Для сокращения речи мы будем называть эти интегральные многообразия *листами.*

Заметим, что по определению *каждый лист является связным подмногообразием многообразия $\widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X}$* (вообще говоря, лишь погруженным).

Лист, проходящий через точку (e, p), где e — единица группы $\widetilde{\mathcal{G}}$, мы обозначим символом $\mathcal{L}_p$.

Формула

$$a(b,p) = (ab,p), \qquad a,b \in \widetilde{\mathcal{G}}, \quad p \in \mathcal{X},$$

очевидно, определяет гладкое и эффективное (даже свободное) действие группы $\widetilde{\mathcal{G}}$ на многообразии $\widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X}$. Для любого элемента $a \in \widetilde{\mathcal{G}}$ соответствующий левый сдвиг

$$L_a\colon \quad (b,p) \mapsto (ab,p), \qquad (b,p) \in \widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X},$$

обладает тем свойством, что его дифференциал

$$(dL_a)_{(b,p)}\colon \ \mathsf{T}_{(b,p)}(\widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X}) \to \mathsf{T}_{(ab,p)}(\widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X})$$

действует на векторы $(\widetilde{X}_b, X_p)$ по формуле

$$(dL_a)_{(b,p)}(\widetilde{X}_b, X_p) = ((dL_a)_b\widetilde{X}_b, X_p) = (\widetilde{X}_{ab}, X_p),$$

где L_a — левый сдвиг в группе $\mathcal{G}$ (см. формулу (5) лекции IV.21). Следовательно,

$$(dL_a)_{(b,p)}\mathcal{D}_{(b,p)} = \mathcal{D}_{(ab,p)}$$

для любой точкн $(b,p) \in \widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X}$ и любого элемента $a \in \widetilde{\mathcal{G}}$ (по определению это означает, что распределение $\mathcal{D}$ *инвариантно* относительно действня группы $\widetilde{\mathcal{G}}$ на $\widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X}$).

Отсюда непосредственно вытекает, что *для любого листа $\mathcal{L}$ подмногообразие $a\mathcal{L} = L_a\mathcal{L}$ также является листом.*

Таким образом, соответствие $\mathcal{L} \mapsto a\mathcal{L}$ определяет действие группы $\widetilde{\mathcal{G}}$ на множестве $\{\mathcal{L}\}$ всех листов. Если $(a,p) \in \mathcal{L}$, то $(e,p) \in a^{-1}\mathcal{L}$ и, значит, $a^{-1}\mathcal{L} = \mathcal{L}_p$, т. е. $\mathcal{L} = a\mathcal{L}_p$. Этим доказано, что *любой лист $\mathcal{L}$ имеет вид $a\mathcal{L}_p$, где $a \in \widetilde{\mathcal{G}}, p \in \in \mathcal{X}$*. По определению это означает, что каждая орбита действия группы $\widetilde{\mathcal{G}}$ на множестве $\{\mathcal{L}\}$ содержит лист вида $\mathcal{L}_p$.

Заметим, что поскольку каждый лист является консервативным подмногообразием (см. лекцию IV.14), *отображение*

$$\mathcal{L} \to a\mathcal{L}, \quad (b,p) \mapsto (ab,p), \qquad (b,p) \in \mathcal{L},$$

листа $\mathcal{L}$ на лист $a\mathcal{L}$, индуцированное левым сдвигом L_a, является диффеоморфизмом.

Пусть $\pi_p\colon \mathcal{L}_p \to \widetilde{\mathcal{G}}$ — ограничение проекции

$$\mathrm{pr}_1\colon \widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X} \to \widetilde{\mathcal{G}}, \quad (a,q) \mapsto a$$

на $\mathcal{L}_p$. В силу консервативности подмногообразия $\mathcal{L}_p$ *отображение* π_p *гладко.*

Так как $(d\,\mathrm{pr}_1)_{(a,p)}(\widetilde{X}_a, X_q) = \widetilde{X}_a$ для любого поля $X \in \mathfrak{g}$ и любой точки $(a,q) \in \widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X}$, то дифференциал $(d\pi_p)_{(a,q)}$ отображения π_p в точке $(a,q) \in \mathcal{L}_p$ является изоморфизмом пространства $\mathcal{D}_{(a,q)} = \mathsf{T}_{(a,q)}\mathcal{L}_p$ на пространство $\mathsf{T}_a\widetilde{\mathcal{G}}$. Следовательно, *отображение* π_p *этально*, и потому на некоторой окрестности V_p точки (e,p) в $\mathcal{L}_p$ оно обратимо, т. е. существуют такая окрестность U_p единицы e группы $\widetilde{\mathcal{G}}$ и такое гладкое отображение

$$\varphi_p\colon\ U_p \to \mathcal{L}_p, \tag{1}$$

что $\pi_p \circ \varphi_p = \mathrm{id}$ на U_p.

Лемма 1. *Окрестность U_p можно выбрать одну и ту же для всех точек $p \in \mathcal{X}$.*

Так выбранную окрестность U_p мы обозначим символом U.

Ясно, что без ограничения общности можно считать, что *окрестность U связна.*

Чтобы не прерывать рассуждение, доказательство леммы 1 мы пока отложим.

Пусть $m \geqslant 1$, и пусть U^m — множество всех элементов группы $\widetilde{\mathcal{G}}$ вида $a_1 \cdot \ldots \cdot a_m$, где $a_1, \ldots, a_m \in U$. Предположим, что $U^m \subset \pi_p\mathcal{L}_p$. (Так как $\pi_p \circ \varphi_p = \mathrm{id}$ на U, то при $m = 1$ это верно.) По определению включение $U^m \subset \pi_p\mathcal{L}_p$ означает, что для любого элемента $a \in U^m$ существует такая точка $q \in \mathcal{X}$, что $(a,q) \in \mathcal{L}_p$, т. е. такая, что $\mathcal{L}_p = a\mathcal{L}_q$. Но так как $\pi_q \circ \varphi_q = \mathrm{id}$ на U, то $U \subset \pi_q\mathcal{L}_q$ и, значит,

$$aU \subset a(\pi_q\mathcal{L}_q) = \pi_p\mathcal{L}_p.$$

Поэтому, поскольку элемент $a \in U^m$ произволен, $U^{m+1} = U^mU \subset \pi_p\mathcal{L}_p$. По индукции этим доказано, что $U^m \subset \pi_p\mathcal{L}_p$ для любого $m \geqslant 1$ и, следовательно, — поскольку группа $\widetilde{\mathcal{G}}$ порождается окрестностью U (см. задачу 12 лекции IV.14) — что $\widetilde{\mathcal{G}} = \pi_p \mathcal{L}_p$. Таким образом, *отображение* $\pi_p\colon \mathcal{L}_p \to \widetilde{\mathcal{G}}$ *надъективно.*

В частности, отсюда следует, что для любого элемента $a \in \widetilde{\mathcal{G}}$ в листе $\mathcal{L}_p$ существует точка вида (a^{-1}, q), где $q \in \mathcal{X}$. При этом $(e, q) \in a\mathcal{L}_p$ и, значит, $\mathcal{L}_q = a\mathcal{L}_p$. Поскольку листы вида $a\mathcal{L}_p$ — это, как мы знаем, все листы распределения $\mathcal{D}$, этим доказано, что *любой лист распределения* $\mathcal{D}$ *имеет вид* $\mathcal{L}_p$, $p \in \mathcal{X}$, т. е. что отображение $p \mapsto \mathcal{L}_p$ многообразия $\mathcal{X}$ на множество $\{\mathcal{L}_p\}$ надъективно.

Рассмотрим теперь более внимательно открытое (в $\mathcal{L}_p$, а значит и в $\pi_p^{-1}U = \mathcal{L}_p \cap (U \times \mathcal{X})$) множество $V_p = \varphi_p U$, диффеоморфно проектирующееся на U. Пусть (a, q) — такая точка из $\mathcal{L}_p$, что $\pi_p(a, q) \in U$, но $(a, q) \notin V_p$ (т. е. такая, что $a \in U$, но $(a, q) \neq \varphi_p(a)$). Так как многообразие $\widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X}$ хаусдорфово, то многообразие $\mathcal{L}_p$ также хаусдорфово (докажите!), и потому точки (a, q) и $\varphi_p(a)$ обладают в $\mathcal{L}_p$ непересекающимися окрестностями $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2 \subset V_p$. Поскольку $\pi_p(a, q) = \pi_p(\varphi_p(a))$, можно, не теряя общности, предполагать, что $\pi_p \mathcal{O}_1 = \pi_p \mathcal{O}_2$, и, следовательно, — поскольку на V_p отображение π_p инъективно — что $\mathcal{O}_1 \cap V_p = \varnothing$. Таким образом, каждая точка $(a, q) \in \pi_p^{-1}U$, не принадлежащая V_p, обладает в $\mathcal{L}_p$ окрестностью, не пересекающейся с V_p. Это означает, что множество V_p не только открыто, но и замкнуто в $\pi_p^{-1}U$. Поскольку множество V_p — будучи диффеоморфным окрестности U — связно, этим доказано, что *множество* V_p *является компонентой связности множества* $\pi_p^{-1}U$.

Эта компонента характеризуется тем, что $(e, p) \in V_p$. Любая другая компонента множества $\pi_p^{-1}U$ содержит точку вида (e, q), и потому имеет вид V_q, где q — такая точка, что $\mathcal{L}_q = \mathcal{L}_p$. Поскольку V_q также диффеоморфно проектируется на U, этим доказано, что *отображение* π_p *ровно накрывает окрестность* U.

Для любой точки $a \in \widetilde{\mathcal{G}}$ множество aU является ее окрестностью, и поскольку любая компоиента связности множества $\pi_p^{-1}(aU)$ имеет вид aV_q, где $(a, q) \in \mathcal{L}_p$, причем

$\pi_p|_{aV_q} = a \circ \pi_q|_{V_q} \circ a^{-1}$, отображение π_p ровно накрывает эту окрестность. Следовательно, *отображение* π_p *является накрытием.* (Напомним, что как лист $\mathcal{L}_p$, так и группа $\widetilde{\mathcal{G}}$ являются связными многообразиями.) Так как группа $\widetilde{\mathcal{G}}$ по условию односвязна и, значит, обладает лишь тривиальными накрытиями, то, следовательно, *отображение* π_p *представляет собой диффеоморфизм.*

В частности, это означает, что любой лист $\mathcal{L} = \mathcal{L}_p$ содержит только одну точку вида (e, q), $q \in \mathcal{X}$ (а именно, точку (e, p)), т. е. что *отображение* $p \mapsto \mathcal{L}_p$ *многообразия* $\mathcal{X}$ *на множество* $\{\mathcal{L}\}$ *листов распределения* $\mathcal{D}$ *биективно.*

Поэтому действие группы $\widetilde{\mathcal{G}}$ на множестве $\{\mathcal{L}\}$ переносится на $\mathcal{X}$. (Для любого элемента $a \in \widetilde{\mathcal{G}}$ и любой точки $p \in \mathcal{X}$ точка $ap \in \mathcal{X}$ по определению представляет собой такую точку q из $\mathcal{X}$, что $\mathcal{L}_q = a\mathcal{L}_p$.) Чтобы исследовать это действие, нам нужно уточнить выбор окрестности U и в явном виде описать отображения φ_p.

Лемма 2. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *обладает базисом*

$$X_1, \quad \ldots, \quad X_m, \tag{2}$$

состоящим из полных векторных полей.

Доказательство леммы 2 мы также пока отложим.

Из этой леммы следует, что формулы

$$\beta(t_1X_1 + \ldots + t_mX_m) = \exp t_1\widetilde{X}_1 \cdot \ldots \cdot \exp t_m\widetilde{X}_m,$$

$$\varphi(t_1X_1 + \ldots + t_mX_m) = \varphi_{t_m}^{X_m} \circ \ldots \circ \varphi_{t_1}^{X_1}$$

корректно определяют некоторые отображения

$$\beta\colon\ \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathcal{G}}, \qquad \varphi\colon\ \mathfrak{g} \to \mathcal{G}.$$

Как мы знаем (см. лемму 5 лекции IV.15), отображение β этально в точке 0, т. е. эта точка обладает в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ окрестностью $U^{(0)}$, на которой отображение β является диффеоморфизмом этой окрестности на некоторую окрестность U единицы группы $\widetilde{\mathcal{G}}$ (ниже мы увидим, что последняя окрестность является окрестностью U_p для любой точки $p \in \mathcal{X}$, и потому — как и подсказывает обозначение — мы можем считать ее предусмотренной леммой 1 окрестностью U).

Лемма 3. *Формула*

$$\varphi_p(a) = (a, ((\varphi \circ \beta^{-1})a)p), \qquad p \in \mathcal{X}, \quad a \in U \tag{3}$$

определяет гладкое отображение

$$\varphi_p\colon\ U \to \mathcal{L}_p.$$

Доказательство этой леммы мы также пока отложим.

Так как по построению $\varphi_p(e) = (e, p)$ и $\pi_p \circ \varphi_p = \mathrm{id}$, то лемма 1 является непосредственным следствием леммы 3 (а отображения φ_p являются отображениями (1)).

Если $q = ((\varphi \circ \beta^{-1})a)^{-1}p$, то $\varphi_q(a) = (a, p)$ и, значит, $(a, p) \in \mathcal{L}_q$, т. е. $(e, p) \in a^{-1}\mathcal{L}_q$. Поэтому $\mathcal{L}_q = a\mathcal{L}_p$, т. е. $q = ap$. Это означает, что действие

$$\widetilde{\mathcal{G}} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad (a, p) \mapsto ap \tag{4}$$

задается на $U \times \mathcal{X}$ формулой

$$ap = ((\varphi \circ \beta^{-1})a)^{-1}p,$$

откуда непосредственно следует, что *это действие гладко* (на U, а потому и на всей группе $\widetilde{\mathcal{G}}$).

Кроме того, мы видим, что при $a \in U$ и $a = \beta(t_1X_1 + \ldots$ $\ldots + t_mX_m)$ для отображения $L_a\colon\ p \mapsto ap$ имеет место формула

$$L_a = \varphi_{t_1}^{-X_1} \circ \ldots \circ \varphi_{t_m}^{-X_m}.$$

Это показывает, в частности, что $L_a \in \mathcal{G}$. Так как окрестность U порождает связную группу $\widetilde{\mathcal{G}}$ (см. задачу 12 лекции IV.14), то это включение остается верным и для любого элемента $a \in \widetilde{\mathcal{G}}$. Таким образом, *формула*

$$L(a) = L_a, \qquad a \in \widetilde{\mathcal{G}},$$

задает (*очевидно, гомоморфное*) *отображение*

$$L\colon\ \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}.$$

При $a = \exp t\widetilde{X}_i$ мы имеем $L_a = \varphi_t^{-X_i}$. По определению это означает, что индуцированный действием (4) мономорфизм $\mathfrak{l}\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}$ (см. с. 155) задается формулой $\widetilde{X} \mapsto X$ (на векторах базиса, а потому и всюду), т. е. совпадает с исходным изоморфизмом $\mathfrak{l}\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathfrak{g}$. Поэтому, во-первых, все векторные поля $X \in \mathfrak{g}$ полны, и, во-вторых, для каждого такого поля

$$L(\exp t\widetilde{X}) = \varphi_t^{-X}.$$

Поскольку все диффеоморфизмы φ_t^X, $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}$, порождают, по условию, группу $\mathcal{G}$, отсюда следует, что *гомоморфизм L является эпиморфизмом* (и, значит, индуцирует изоморфизм λ: $\widetilde{\mathcal{G}}/K \to \mathcal{G}$, где $K = \operatorname{Ker} L$).

Если $\exp t\widetilde{X} \in K$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то $\varphi_t^X = \mathrm{id}$, что возможно только при $X = 0$. Поэтому $\mathfrak{l}K = 0$ и, значит, K является дискретной инвариантной подгруппой группы $\widetilde{\mathcal{G}}$. В частности, подгруппа K замкнута, и потому факторгруппа $\widetilde{\mathcal{G}}/K$ является группой Ли, гладко действующей на $\mathcal{X}$ (и локально изоморфной группе Ли $\widetilde{\mathcal{G}}$). Перенеся посредством изоморфизма λ гладкость с $\widetilde{\mathcal{G}}/K$ на $\mathcal{G}$, мы и получим на группе $\mathcal{G}$ гладкость, удовлетворяющую условиям теоремы 1.

Задача 2. Докажите, что *предусмотренная теоремой 1 гладкость на $\mathcal{G}$ единственна.*

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось доказать леммы 2 и 3 (как уже было отмечено, лемма 1 вытекает из леммы 3).

Лемма 4. *Для любых полных полей $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{g}$ и любой точки $p \in \mathcal{X}$ формула*

$$\gamma_p(t) = (\exp t_1\widetilde{X}_1 \cdot \ldots \cdot \exp t_k\widetilde{X}_k, (\varphi_{t_k}^{X_k} \circ \ldots \circ \varphi_{t_1}^{X_1})p), \quad (5)$$

$$t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k,$$

определяет гладкое отображение γ_p: $\mathbb{R}^k \to \mathcal{L}_p$.

Доказательство. Так как подмногообразие $\mathcal{L}_p$ консервативно, то достаточно доказать, что $\gamma_p(t) \in \mathcal{L}_p$ для всех $t \in \mathbb{R}^k$.

Пусть сначала $k = 1$. В этом случае γ_p является кривой $t \mapsto (\beta(t), \varphi(t))$, где $\beta(t) = \exp t\widetilde{X}$, $\varphi(t) = \varphi_t^X(p)$, $X = X_1$, проходящей при $t = 0$ через точку (e, p). При этом $\dot\gamma_p(t) = (\dot\beta(t), \dot\varphi(t))$, где $\dot\beta(t) = \widetilde{X}_{\beta(t)}$ и $\dot\varphi(t) = X_{\varphi(t)}$, и, значит, $\dot\gamma_p(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что γ_p является интегральной кривой распределения $\mathcal{D}$. Следовательно, $\gamma_p(t) \in \mathcal{L}_p$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Пусть лемма 4 уже доказана для полей $X_1, \dots, X_{k-1}$, $k > 1$, и пусть

$$a = \exp t_1 \widetilde{X}_1 \cdot \ldots \cdot \exp t_{k-1} \widetilde{X}_{k-1},$$

$$q = (\varphi_{t_{k-1}}^{X_{k-1}} \circ \ldots \circ \varphi_{t_1}^{X_1})p.$$

Тогда $(a, q) \in \mathcal{L}_p$ и, значит, $a\mathcal{L}_q = \mathcal{L}_p$. С другой стороны, применив уже доказанный случай $k = 1$ к полю X_k и точке q, мы получим, что

$$(\exp t_k \widetilde{X}_k, \varphi_{t_k}^{X_k}(q)) \in \mathcal{L}_q.$$

Следовательно, $\gamma_p(\mathbf{t}) \in \mathcal{L}_p$. □

Доказательство леммы 3. Отображение (5), построениое для базиса (2) (при $k = m$), связано с отображением (3) формулой

$$\gamma_p = \varphi_p \circ \beta \circ \chi^{-1} \qquad \text{на } U,$$

где $\chi\colon\ \mathfrak{g} \mapsto \mathbb{R}^m$ — координатный изоморфизм, отвечающий базису (2). □

Заметим, что в этом доказательстве мы использовали лемму 2. Таким образом, все сводится к доказательству последней леммы. Для этого нам понадобится следующее элементарное алгебраическое утверждение.

Лемма 5. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождена множеством S. Если S замкнуто относительно умножения на числа (т. е. $tX \in S$ для любых $X \in S$ и $t \in \mathbb{R}$) и если*

$$e^{\operatorname{ad} X} Y \in S \qquad \text{для любых} \quad X, Y \in S, \tag{6}$$

то S линейно порождает $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ — линейная оболочка множества S. Так как (см. задачу 15 лекции IV.14 и определение экспоненты линейного оператора в лекции III.11)

$$[X, Y] = (\operatorname{ad} X)Y = \lim_{t \to 0} \frac{e^{t \operatorname{ad} X} Y - Y}{t},$$

то $[X, Y] \in \mathcal{S}$ для любых $X, Y \in S$, а значит, — по линейности — и для любых $X, Y \in \mathcal{S}$. Следовательно, $\mathcal{S}$ является содержащей S подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и потому $\mathcal{S} = \mathfrak{g}$. □

Доказательство леммы 2. Лемма 2 равносильна утверждению, что множество S всех полных полей из $\mathfrak{g}$ (по условию порождающее алгебру Ли $\mathfrak{g}$) линейно порождает $\mathfrak{g}$. Так как это множество очевидным образом замкнуто относительно умножения на числа, то, следовательно, в силу леммы 5 достаточно доказать, что множество S удовлетворяет условию (6).

Пусть $X, Y \in S$, $t \in \mathbb{R}$, и пусть

$$\beta(t) = \exp \widetilde{X} \exp t\widetilde{Y} \exp(-\widetilde{X}),$$
$$\varphi(t) = (\varphi_1^X \circ \varphi_t^Y \circ \varphi_{-1}^X)p.$$

Так как $\beta(t) = \operatorname{int}_a(\exp t\widetilde{Y})$, где $a = \exp \widetilde{X}$, и, значит,

$$\beta(t) = \exp t(\operatorname{Ad} a)\widetilde{Y} = \exp t\, e^{\operatorname{ad} \widetilde{X}}\widetilde{Y}$$

(см. диаграмму (6) лекции 7 и задачу 16 лекции IV.14); напомним — см. лекцию IV.14, — что по определению $\operatorname{Ad} a = \mathfrak{l}(\operatorname{int}_a))$, то $\dot\beta(0) = \widetilde{Z}_e$, где $Z = e^{\operatorname{ad} X}Y$. Но так как согласно лемме 4 для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет место включение $(\beta(t), \varphi(t)) \in \mathcal{L}_p$, то $(\dot\beta(0), \dot\varphi(0)) \in \mathcal{D}_{(e,p)}$ и, значит, $(\widetilde{Z}_e, \dot\varphi(0)) \in \mathcal{D}_{(e,p)}$, т. е. $\dot\varphi(0) = Z_p$. В силу произвольности точки p это означает, что поток $\{\varphi_1^X \circ \varphi_t^Y \circ \varphi_{-1}^X\}$ порождается векторным полем Z. Следовательно, это поле полно. Кроме того, так как $(\widetilde{Z}_e, Z_p) \in \mathcal{D}_{(e,p)}$ для любой точки $p \in \mathcal{X}$, то по определению подпространств $\mathcal{D}_{(e,p)}$ поле Z принадлежит $\mathfrak{g}$. Являясь полным полем из $\mathfrak{g}$, поле Z лежит в S. □

Тем самым теорема 1 полностью доказана. □

Замечание 1. В процессе доказательства теоремы 1 мы показали, что *любая подалгебра $\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathcal{X}$, удовлетворяющая условиям* **а** *и* **б** *теоремы* 1, *состоит из полных векторных полей.*

Теорема 1 известна как теорема Пале.

Теорема Кобаяси Задача 3. Пусть $\mathcal{G}$ — группа и $\mathcal{G}_0$ — ее инвариантная подгруппа. Покажите, что *если*

а *группа $\mathcal{G}_0$ является группой Ли;*

б *все внутренние автоморфизмы*

$$\operatorname{int}_a\colon x \mapsto axa^{-1}, \qquad a, x \in \mathcal{G}$$

являются на $\mathcal{G}_0$ гладкими отображениями, *то на $\mathcal{G}$ существует единственная гладкость, по отношению к которой группа $\mathcal{G}$ является группой Ли с компонентой единицы $\mathcal{G}_0$.*

На этом утверждении основывается доказательство следующего варианта теоремы Пале, известного как теорема Кобаяси.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{G}$ — подгруппа группы диффеоморфизмов многообразия $\mathcal{X}$ и S — множество всех полных полей $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$, обладающих тем свойством, что $\varphi_t^X \in \mathcal{G}$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Тогда если S порождает в алгебре Ли $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ конечномерную подалгебру $\mathfrak{g}$, то $S = \mathfrak{g}$, а группа $\mathcal{G}$ обладает единственной гладкостью, по отношению к которой она является группой Ли, эффективно и гладко действующей на многообразии $\mathcal{X}$, причем отвечающий этому действию мономорфизм $X \mapsto X^*$ является изоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{l}\mathcal{G}$ на подалгебру $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{G}_0$ — подгруппа группы $\mathcal{G}$, порожденная всеми диффеоморфизмами вида φ_t^X, где $t \in \mathbb{R}$, а X — произвольное (полное) поле из $\mathfrak{g}$. Так как алгебра Ли $\mathfrak{g}$ удовлетворяет, очевидно, условиям а и б теоремы 1, то группа $\mathcal{G}_0$ обладает указанной в этой теореме гладкостью (и согласно утверждению задачи 2 эта гладкость единственна). Согласно замечанию 1 все поля из $\mathfrak{g}$ полны, и так как они порождают однопараметрические подгруппы группы $\mathcal{G}$, то $\mathfrak{g} \subset S$ и, значит, $S = \mathfrak{g}$.

Для любого потока $\{\varphi_t^X\}$, $X \in \mathfrak{g}$, и любого диффеоморфизма $\varphi \in \mathcal{G}$ диффеоморфизмы $\varphi^{-1} \circ \varphi_t^X \circ \varphi$ составляют полный поток и содержатся в $\mathcal{G}$. Поэтому $\varphi^{-1} \circ \varphi_t^X \circ \varphi \in \mathcal{G}_0$. Поскольку диффеоморфизмы вида φ_t^X порождают подгруппу $\mathcal{G}_0$, отсюда следует, что $\varphi^{-1}\mathcal{G}_0\varphi \subset \mathcal{G}_0$, т. е. что подгруппа $\mathcal{G}_0$ инвариантна.

Задача 4. Покажите, что *для инвариантной подгруппы $\mathcal{G}_0$ выполнено условие* б *задачи* 3.

Поэтому на $\mathcal{G}$ существует единственная гладкость, по отношению к которой группа $\mathcal{G}$ является группой Ли с компонентой единицы $\mathcal{G}_0$. Очевидная проверка показывает, что эта гладкость удовлетворяет всем условиям теоремы 2. □

Группа аффинных автоморфизмов

Применим полученные общие теоремы к группам, возникающим в дифференциальной геометрнн.

Предложение 1. *Группа* $\operatorname{Aff}\mathcal{X}$ *аффинных автоморфизмов произвольного связного пространства аффинной связности* $\mathcal{X}$ *обладает естественной гладкостью, по отношению к которой она является группой Ли, гладко действующей на* $\mathcal{X}$. *В случае, когда пространство* $\mathcal{X}$ *геодезически полно, алгеброй Ли группы* $\operatorname{Aff}\mathcal{X}$ *служит алгебра Ли* $\mathfrak{aff}\,\mathcal{X}$ *аффинных полей.*

Доказательство. Согласно предложению 2 лекции 8 группа $\operatorname{Aff}\mathcal{X}$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Еслн пространство $\mathcal{X}$ геодезически полно, то согласно предложению 3 лекции 8 соответствующая алгебра Лн $\mathfrak{g}$ будет совпадать с алгеброй $\mathfrak{aff}\,\mathcal{X}$. $\square$

Группа автоморфизмов симметрического пространства

Следствие 1. *Группа* $\operatorname{Aut}\mathcal{X}$ *автоморфизмов произвольного симметрического пространства* $\mathcal{X}$ *является группой Ли с алгеброй Ли* $\mathfrak{d}\,\mathcal{X}$.

Доказательство. Согласно предложению 1 лекции 6 группа $\operatorname{Aut}\mathcal{X}$ совпадает с группой $\operatorname{Aff}\mathcal{X}$, а алгебра Лн $\mathfrak{d}\,\mathcal{X}$ — с алгеброй Лн $\mathfrak{aff}\,\mathcal{X}$. Кроме того, согласно утверждению задачн 1 лекции 5 пространство $\mathcal{X}$ геодезически полно. $\square$

Задача 5. Пусть $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ — кривая в пунктированном симметрическом пространстве $\mathcal{X}$, проходящая при $t = 0$ через точку p_0. Докажите, что следующие утверждения равносильны:

а. *Кривая* β *является морфизмом симметрических пространств* (где $\mathbb{R}$ рассматривается как симметрическое пространство с умножением $s \cdot t = 2s - t$; см. пример-задачу 2 лекции 5).

б. *Кривая* β *является интегральной кривой некоторого дифференцирования* $X \in \mathfrak{s}\,\mathcal{X}$.

в. *Для потока* $\{\varphi_t^X\}$, *индуцированного полем* X, *имеет место формула*

$$\varphi_{2t}^X = s_{\beta(t)} \circ s_{p_0}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

г. *Кривая* β *является геодезической канонической связности.*

д. *Параллельные переносы вдоль кривой* β *являются дифференциалами отображений* φ_t.

Группа трансляций симметрического пространства

Предложение 2. *Группа трансляций* $\operatorname{Trans}\mathcal{X}$ *произвольного симметрического пространства* $\mathcal{X}$ *является связной подгруппой группы Ли* $\operatorname{Aut}\mathcal{X}$*. Ее алгеброй Ли* $\operatorname{trans}\mathcal{X}$ *является подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{d}\mathcal{X}$*, порожденная всеми полями* $X \in \mathfrak{s}\mathcal{X}$*.*

Ср. предложение 3 лекции 9.

Доказательство. Подалгебра $\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{d}\mathcal{X}$, порожденная всеми полями $X \in \mathfrak{s}\mathcal{X}$, удовлетворяет условиям **а** и **б** теоремы 1, и потому соответствующая группа $\mathcal{G}$ является связной группой Ли, гладко действующей на $\mathcal{X}$. При этом согласно формуле (7) группа $\mathcal{G}$ порождается всевозможными преобразованиями вида $s_{\beta(t)} \circ s_{p_0}$, где p_0 — отмеченная точка пунктированного симметрического пространства $\mathcal{X}$, а $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ — произвольная геодезическая пространства $\mathcal{X}$, проходящая при $t = 0$ через точку p_0. Поэтому $\mathcal{G} \subset \operatorname{Trans}\mathcal{X}$.

Чтобы доказать обратное включение, мы для любой точки $p \in \mathcal{X}$ рассмотрим множество W_p всех точек $q \in \mathcal{X}$, для которых $s_q \circ s_p \in \mathcal{G}$.

Если $p_0 \in W_p$ и U — произвольная нормальная окрестность точки p_0, то, поскольку любая точка $q \in U$ имеет вид $\beta(t)$, преобразование $s_q \circ s_{p_0}$ принадлежит $\mathcal{G}$. Кроме того, по условию $s_{p_0} \circ s_p \in \mathcal{G}$. Поэтому $s_q \circ s_p = s_p \circ s_{p_0} \circ s_{p_0} \circ s_q \in \mathcal{G}$ и, значит, $U \subset W_p$. Таким образом, произвольная нормальная окрестность каждой точки из W_p содержится в W_p, откуда непосредственно следует (ср. доказательство предложения 3 лекции 8), что множество W_p открыто и замкнуто в $\mathcal{X}$. Поскольку множество W_p непусто (ибо $p \in W_p$), а пространство $\mathcal{X}$ по условию связно, этим доказано, что $W_p = \mathcal{X}$, т. е. что $s_q \circ s_p \in \mathcal{G}$ для любой точки $q \in \mathcal{X}$ и, значит, что $\operatorname{Trans}\mathcal{X} \subset \mathcal{G}$.

Таким образом, $\operatorname{Trans}\mathcal{X} = \mathcal{G}$, что, очевидно, и доказывает предложение 2. $\square$

Заметим, что алгебра Ли $\operatorname{trans}\mathcal{X}$ очевидным образом симметрична и является минимальной симметрической алгеброй Ли с цоколем $\mathfrak{s}\mathcal{X}$.