ЛЕКЦИЯ 11

Римановы и псевдоримановы пространства. — Римановы связности. — Геодезические в римановом пространстве. — Простейшая задача вариационного исчисления. — Уравнения Эйлера — Лагранжа. — Кривые минимума и экстремали. — Регулярные лагранжианы. — Экстремали лагранжиана энергии.

Римановы и псевдоримановы пространства

***Определение* 1.** *Римановой структурой* на гладком n-мерном многообразии $\mathcal{X}$ называется гладкая евклидова метрика на касательном расслоении $\tau_{\mathcal{X}}$, т. е., иными словами, тензорное поле g типа (2,0) на $\mathcal{X}$, обладающее тем свойством, что для любой точки $p \in \mathcal{X}$ билинейный функционал g_p на линейном пространстве $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ является скалярным произведением (симметричен и положительно определен). Многообразие $\mathcal{X}$, на котором задана риманова структура, называется *римановым пространством*.

Тензорное поле g называется также *метрическим тензором* риманова пространства или просто *метрикой* (иногда *римановой метрикой*).

Для любых векторов $A, B \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ их скалярное произведение $g_p(A, B)$ относительно метрики g_p обозначается также символом $(A, B)_p$ или просто (A, B).

С помощью тензора g мы можем осуществлять спуск и подъем индексов тензорных полей, т. е. отождествлять тензорные поля типа (a, b), для которых сумма $a + b$ одна и та же (ср. лекцию II.6). Например, векторное поле X с компонентами X^i мы можем отождествлять с ковекторным полем (линейной дифференциальной формой), получающимся в результате свертки тензора g с полем X (и имеющим компоненты $g_{ij}X^j$, где g_{ij} — компоненты метрики g). Аналогично, свернув с тензором g^{ij} (удовлетворяющим соотношению $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$) дифференциал du произвольной гладкой функции u на $\mathcal{X}$ (или, точнее, соответствующее ковекторное поле ∇u), мы получим *векторное поле градиента* $\operatorname{grad} u$ с компонентами

$$(\operatorname{grad} u)^i = g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Для произвольного подмногообразия $\mathcal{Y}$ риманова многообразия $\mathcal{X}$ линейное пространство $\mathsf{T}_p\mathcal{Y}$ в каждой точке $p \in \mathcal{Y}$ является подпространством пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ и, следовательно, несет евклидову метрику $g_p|_\mathcal{Y}$. Это задает на $\mathcal{Y}$ структуру риманова пространства. Говорят, что эта структура *индуцирована* римановой структурой на $\mathcal{X}$. Подмногообразие $\mathcal{Y}$, снабженное индуцированной структурой, называется *римановым подпространством*. В дальнейшем, рассматривая подмногообразия римановых пространств, мы всегда — если только явно не оговорено противное — будем предполагать, что на них введена индуцированная риманова структура.

Конечно, любое евклидово точечное пространство является римановым пространством. Поэтому *каждое подмногообразие евклидова пространства обладает естественной римановой структурой* (индуцированной евклидовой структурой объемлющего пространства).

При $n = 2$ эта структура является не чем иным, как первой квадратичной формой поверхности (см. лекцию III.3).

Согласно следствию предложения 3 лекции IV.7 *риманова структура существует на любом хаусдорфовом паракомпактном многообразии* $\mathcal{X}$. [Другое доказательство. Поскольку — см. замечание 2 лекции III.24 — многообразие тогда и только тогда паракомпактно, когда каждая его компонента удовлетворяет второй аксиоме счетности, можно без ограничения общности предполагать, что многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности и, следовательно, — см. теорему 1 лекции III.14 (правда, у нас не доказанную) — вложимо в евклидово пространство.]

Более общим образом, можно рассматривать многообразие $\mathcal{X}$, на котором задано тензорное поле g типа (2,0), определяющее в каждой точке $p \in \mathcal{X}$ псевдоевклидову структуру на $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$, т. е. симметрический невырожденный, но, вообще говоря, не положительно определенный билинейный функционал g_p. Такое поле называется *псевдоримановой структурой* на $\mathcal{X}$, а многообразие $\mathcal{X}$, снабженное псевдоримановой структурой, называется *псевдоримановым пространством*.

Если многообразие $\mathcal{X}$ связно, то по очевидным соображениям непрерывности индекс (сигнатура) псевдоевклидовой метрики g_p не зависит от p. Этот индекс (сигнатура) называется *индексом* (*сигнатурой*) псевдориманова пространства $\mathcal{X}$.

Заметим, что подмногообразие псевдориманова пространства, вообще говоря, не несет никакой естественной псевдоримановой структуры (ограничение на $\mathcal{Y}$ псевдоримановой метрики может оказаться вырожденным), и для любого k, $0 < k < n$, существуют гладкие n-мерные хаусдорфовые многообразия, удовлетворяющие второй аксиоме счетности (и, значит, паракомпактные), на которых нельзя ввести псевдоримановой структуры индекса k. Оказывается, что для существования такой структуры необходимо, чтобы определенные характеристические классы (см. лекцию IV.22) касательного расслоения многообразия $\mathcal{X}$ обращались в нуль.

Задача 1. Покажите, что для существования псевдоримановой структуры индекса 1 на ориентируемом многообразии $\mathcal{X}$ необходимо, чтобы был равен нулю класс Эйлера расслоения $\tau_{\mathcal{X}}$. [Указание. Собственные векторы функционалов g_p, отвечающие отрицательному собственному значению, составляют на $\mathcal{X}$ всюду отличное от нуля поле касательных векторов, что при $e[\mathcal{X}] \neq 0$ невозможно. См. лекцию IV.23, стр. 407.]

Для любых гладких векторных полей X, Y на псевдоримановом (и, в частности, римановом) пространстве $\mathcal{X}$ их свертка $g(X, Y)$ с тензором g является гладкой функцией на $\mathcal{X}$. Эта функция называется *скалярным произведением* полей X, Y и обозначается символом (X, Y) (так что, по определению $(X, Y) = g(X, Y)$). Соответствие $X, Y \mapsto (X, Y)$ представляет собой билинейный (над алгеброй $\mathsf{F}\mathcal{X}$) функционал на $\mathsf{F}\mathcal{X}$-модуле $\mathfrak{a}\mathcal{X}$, называемый *скалярным умножением*.

Заметим, что $(X, Y)(p) = (X_p, Y_p)_p$ для любой точки $p \in \mathcal{X}$.

Вместо $(X, Y)(p)$ мы будем также писать $(X, Y)_p$.

В каждой карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ функция (X, Y) выражается формулой

$$(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j \quad \text{на } U,$$

где $g_{ij} = g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)$ — компоненты тензора g, а X^i и Y^j — компоненты векторных полей X и Y.

Римановы связности

Определение 2. Говорят, что связность ∇ на псевдоримановом (в частности, римановом) пространстве $\mathcal{X}$ *согласована с метрикой* g, если для любых трех векторных полей $X, Y, Z \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ имеет место равенство

$$X(Y,Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z). \qquad (2)$$

(Ср. определение 3 лекции IV.11.)

Ясно, что соотношение (2) тогда и только тогда имеет место для любых полей X, Y, Z, когда в каждой карте $(U, x^1, \dots, x^n)$ оно имеет место для координатных базисных полей $\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}, \dfrac{\partial}{\partial x^k}$, $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$, т. е. — в силу равенств $g_{jk} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}, \dfrac{\partial}{\partial x^k}\right)$, $\Gamma^i_{kj} = \left(\nabla_k \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)^i$ — когда

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{k,ij} + \Gamma_{j,ik}, \qquad (2')$$

где

$$\Gamma_{k,ij} = g_{kp}\Gamma^p_{ij} \qquad (3)$$

— так называемые *коэффициенты связности первого рода* (со спущенным верхним индексом). [Коэффициенты же Γ^i_{kj} называются коэффициентами связности *второго рода.*]

Формулы (2′) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^p_{ki} g_{pj} - \Gamma^p_{kj} g_{ip} = 0.$$

Поскольку выражение слева — это в точности компоненты ковариантных производных $\nabla_k g$ тензора g, этим доказано, что *риманова структура тогда и только тогда согласована со связностью* ∇, *когда метрический тензор* g *ковариантно постоянен.*

Задача 2. Пусть u: $I \to \mathcal{X}$ — кривая в (псевдо)римановом пространстве $\mathcal{X}$, и пусть X, Y: $t \to X(t), Y(t)$ — два векторных поля на кривой u. Покажите, что для ковариантных производных относительно согласованной с римановой структурой связности имеет место формула

$$\frac{d}{dt}(X(t), Y(t)) = \left(\frac{\nabla X}{dt}(t), Y(t)\right) + \left(X(t), \frac{\nabla Y}{dt}(t)\right). \qquad (4)$$

Теорема 1. *На любом (псевдо)римановом пространстве $\mathcal{X}$ существует единственная симметрическая связность, согласованная с (псевдо)римановой структурой на $\mathcal{X}$.*

Доказательство. Эта теорема доказывается прямым вычислением, которое можно производить либо в координатах, либо в инвариантной форме. Как всегда для теорем существования и единственности, докажем сначала единственность.

Единственность. Пусть связность ∇ существует. Тогда согласно (2′)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{j,ki} + \Gamma_{i,kj},$$
$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{k,ji} + \Gamma_{i,jk},$$
$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{k,ij} + \Gamma_{j,ik}.$$

Так как в силу симметричности связности коэффициенты Γ^i_{kj} (а потому и коэффициенты $\Gamma_{i,kj}$) симметричны по k и j, то вторые слагаемые справа в первых двух равенствах одинаковы, а первые совпадают со слагаемыми в правой части третьего равенства. Поэтому, сложив первые два равенства и вычтя третье, мы после деления на 2 получим, что

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right), \tag{5}$$

и значит, — после подъема индекса i вверх — что

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ip}\left(\frac{\partial g_{pj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^p}\right). \tag{5′}$$

Таким образом, коэффициенты связности ∇ выражаются через компоненты тензора g и, значит, эта связность единственна.

То же рассуждение в инвариантной форме имеет следующий вид. Так как связность ∇ симметрична, то

$$\nabla_X Z - \nabla_Z X = [X, Z]$$

для любых полей $X, Z \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$, и потому соотношение (2) равносильно соотношению

$$X(Y, Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_Z X) + (Y, [X, Z]).$$

Циклически переставив здесь X, Y и Z, мы получим еще два соотношения. Сложив первое со вторым и вычтя третье, мы получим тождество

$$2(\nabla_X Y, Z) = X(Y,Z) + Y(Z,X) - Z(X,Y) + \\ + (X,[Z,Y]) - (Y,[X,Z]) - (Z,[Y,X]), \quad (6)$$

которое в силу произвольности поля Z и невырожденности тензора g однозначно определяет ковариантную производную $\nabla_X Y$.

Существование. Мы определим связность ∇, приняв за ее коэффициенты Γ^i_{jk} в каждой карте $(U, x^1, \dots, x^n)$ функции ($5'$). Чтобы оправдать эту конструкцию, надо проверить, что для любой карты $(U', x^{1'}, \dots, x^{n'})$ функции

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{1}{2} g^{i'p'} \left(\frac{\partial g_{p'j'}}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial g_{p'k'}}{\partial x^{j'}} - \frac{\partial g_{j'k'}}{\partial x^{p'}} \right),$$

где $g_{i'j'}$ — компоненты метрического тензора g в карте $(U', x^{1'}, \dots, x^{n'})$, связаны на $U \cap U'$ с функциями Γ^i_{jk} формулами

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}$$

(см. формулы (3) лекции 1). Но так как

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij},$$

и потому

$$\frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} g_{ij} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k},$$

то

$$2\Gamma_{i',j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} g_{ij} + \\ + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} g_{ik} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} g_{ik} + \\ + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} g_{jk} - \\ - \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} g_{jk} - \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}.$$

Справа второй член равен пятому, а первый и четвертый сокращаются с восьмым и седьмым. Поэтому

$$\Gamma_{i',j'k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}g_{ij} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma_{i,jk}.$$

Поскольку

$$g^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}g^{ij},$$

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^q}\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}g^{lq}g_{pj} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l}g^{lq}g_{qj} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j},$$

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^q}\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}g^{lq}\Gamma_{p,jk} = g^{lp}\Gamma_{p,jk} = \Gamma^l_{jk},$$

отсюда и следует, что

$$\Gamma^{i'}_{j'k'}=\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^q}g^{lq}\right)\left(\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}g_{pj}+\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma_{p,jk}\right)=$$

$$= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^l_{jk} =$$

$$= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}.$$

Так как правая часть формулы (5) симметрична по j и k, то построенная связность симметрична. Кроме того, так как

$$\Gamma_{j,ik} + \Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k},$$

то эта связность согласована с g. $\square$

В инвариантной форме это рассуждение имеет следующий вид. Мы принимаем за $\nabla_X Y$ поле, однозначно характеризуемое соотношением (6). Так как правая часть этого соотношения $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейна по X и $\mathbb{R}$-линейна по Y, то поле $\nabla_X Y$ также $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейно по X и $\mathbb{R}$-линейно по Y. Кроме того, если в правой части соотношения (6) заменить Y на fY, где $f \in \mathsf{F}\mathcal{X}$, то воспользовавшись тем, что операции X и Z являются дифференцированиями, а $[Z, fY] = f[Z, Y] + Zf \cdot Y$ и $[fY, X] = f[Y, X] - Xf \cdot Y$ (см. формулу (23) лекции III.16), мы немедленно получим, что она будет равна сумме умноженной на f прежней части и четырех слагаемых: $Xf \cdot (Y, Z)$ (от первого члена первой строки), $-Zf \cdot (X, Y)$ (от третьего члена первой строки), $Zf \cdot (X, Y)$ (от первого члена второй строки) и $Xf \cdot (Z, Y)$ (от третьего члена второй строки). Поэтому

$$(\nabla_X(fY), Z) = f(\nabla_X Y, Z) + Xf \cdot (Y, Z) = (f\nabla_X Y + Xf \cdot Y, Z)$$

и, значит, $\nabla_X(fY) = Xf \cdot Y + f\nabla_X Y$. Это доказывает, что соответствие ∇: $X \mapsto \nabla_X$ является связностью. Вычтя из формулы (6) ее же с переставленными X, Y и сократив на 2, мы аналогично получим, что

$$(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) = ([X, Y], Z),$$

т. е. что связность ∇ симметрична. Наконец, переставив в формуле (6) Z, Y и сложив, мы получим, что связность ∇ согласована с g. □

Теорема 1 известна как теорема Леви-Чивита. Предусмотренная ею связность ∇ называется *римановой связностью* или *связностью Леви-Чивита*, индуцированной метрикой g.

Задача 3. Докажите, что *параллельный перенос относительно римановой связности является изометрическим отображением касательных пространств.* [Указание. Воспользуйтесь формулой (4).]

Аффинная связность ∇ называется *метрической*, если существует псевдориманова метрика, индуцирующая ∇, т. е. существует ковариантно постоянное (по отношению к ∇) симметрическое тензорное поле g_{ij}, невырожденное в каждой точке.

Очевидно, что условие $\nabla_k g_{ij} = 0$ ковариантного постоянства линейно по g_{ij}. Поэтому если поля g_{ij} и h_{ij} индуцируют метрическую связность ∇, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ поля λg_{ij} и $g_{ij}+h_{ij}$ будут индуцировать ту же связность, при условии, конечно, что эти поля невырождены. Это означает, что множество всех полей g_{ij}, индуцирующих данную метрическую связность ∇, представляет собой подмножество некоторого линейного подпространства линейного пространства всех симметрических полей g_{ij}, состоящее из невырожденных полей (а в случае, когда мы интересуемся только римановыми метриками, — еще и из положительно определенных полей).

В дальнейшем, рассматривая (псевдо)риманово пространство $\mathcal{X}$, мы всегда будем предполагать, что оно снабжено римановой связностью.

Поскольку относительно этой связности метрический тензор ковариантно постоянен, *операция свертывания с g (спуск и подъем индексов) перестановочна с операциями ковариантного дифференцирования.*

Например, для любой гладкой функции $u \in \mathsf{F}\mathcal{X}$ и любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ в каждой координатной окрестности имеет место формула

$$g_{ij}(\nabla_X \operatorname{grad} u)^j = (\nabla_X \nabla u)_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

где ∇u — дифференциал du функции u, рассматриваемый как ковекторное поле $\left(\text{т. е. поле с компонентами } \dfrac{\partial u}{\partial x^i}\right)$.

Геодезические в римановом пространстве

Геодезическими (псевдо)риманового пространства $\mathcal{X}$ называются геодезические относительно римановой связности. В локальных координатах они задаются уравнениями (5) лекции 1 с коэффициентами Γ^i_{jk} из формулы (5′), т. е. уравнениями

$$\ddot{x}^i(t) + \frac{1}{2} g^{ip}\left(\frac{\partial g_{pj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^p}\right)\dot{x}^j(t)\dot{x}^k(t) = 0, \tag{8}$$
$$i = 1, \ldots, n,$$

которые можно переписать в следующем виде:

$$\ddot{x}^i(t) + g^{ip}\left(\frac{\partial g_{pj}}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^p}\right)\dot{x}^j(t)\dot{x}^k(t) = 0, \tag{8′}$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

Легко видеть (докажите!), что *если геодезическая γ риманова пространства $\mathcal{X}$ целиком расположена на подмногообразии $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, то, как кривая в $\mathcal{Y}$, она также будет геодезической (относительно индуцированной на $\mathcal{Y}$ римановой метрики).*

Так как параллельный перенос относительно римановой связности является изометричным отображением, то для любой геодезической $\gamma_A = \gamma_{p,A}$ вектор $\dot{\gamma}_A(t)$ при всех t имеет одну и ту же длину, равную длине вектора $\dot{\gamma}_A(0) = A$:

$$|\dot{\gamma}_A(t)| = |A| \qquad \text{для всех } t \in I_A. \tag{9}$$

(Напомним, что символом I_A мы обозначаем интервал оси $\mathbb{R}$, на котором определена максимальная геодезическая γ_A.)

Конечно, в псевдоримановом пространстве число $|A|$ может быть равным нулю даже при $A \neq 0$. Соответствующие геодезические называются *изотропными*.

Простейшая задача вариационного исчисления

Для (псевдо)риманова пространства $\mathcal{X}$ полученные в лекции 1 результаты о геодезических могут быть существенно дополнены и уточнены.

Изложим предварительно необходимые общие понятия и результаты.

Пусть $\mathcal{X}$ — связное хаусдорфово гладкое многообразие и $\mathsf{T}\mathcal{X}$ — многообразие его касательных векторов (тотальное пространство его касательного расслоения $\tau_{\mathcal{X}}$).

Как мы знаем, каждая карта (U, h) многообразия $\mathcal{X}$ определяет карту $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}h)$ многообразия $\mathsf{T}\mathcal{X}$, для которой $\mathsf{T}h$ является послойным диффеоморфизмом открытого множества $\mathsf{T}U = \pi^{-1}U$ на произведение $h(U) \times \mathbb{R}^n$. В отличие от предыдущих (и последующих!) лекций мы будем сейчас обозначать локальные координаты карты (U, h) символами $q^1, \dots, q^n$, а локальные координаты карты $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}h)$ — символами $q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$. [По определению вектор $A \in \mathsf{T}U$ имеет координаты $q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$, если $h(\pi A) = (q^1, \dots, q^n)$ и $A = \dot{q}^i \left(\dfrac{\partial}{\partial q^i}\right)_{\pi A}$.]

***Определение* 3**. Гладкая функция L, заданная на многообразии $\mathsf{T}\mathcal{X}$ (или некотором его открытом подмножестве), называется *лагранжианом* на $\mathcal{X}$.

[Можно рассматривать также *лагранжианы, зависящие от времени* t, т. е. гладкие функции на произведении $\mathsf{T}\mathcal{X} \times \mathbb{R}$. Они нам в этой лекции не понадобятся.]

В каждой карте (U, h) (точнее — в соответствующей карте $(\mathsf{T}U, \mathsf{T}h)$) лагранжиан L задается гладкой функцией $L(q, \dot{q}) = L(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ от $2n$ переменных $q^1, \dots, q^n$, $\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$. Как правило, мы не будем проводить педантичного различия между L и $L(q, \dot{q})$.

В аналитической механике роль многообразия $\mathcal{X}$ играет конфигурационное пространство механической системы, а роль многообразия $\mathsf{T}\mathcal{X}$ —

ее фазовое пространство скоростей. Числа $q^1,\ldots,q^n$ — это обобщенные координаты системы, а числа $\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^n$ — обобщенные скорости.

Пусть на многообразии $\mathcal{X}$ задан лагранжиан L и две точки p_0 и p_1. Тогда для любой кусочно гладкой кривой γ: $[a,b]\to\mathcal{X}$, соединяющей точки p_0 и p_1 (и обладающей тем свойством, что ее естественный подъем $\dot{\gamma}$: $[a,b]\to\mathsf{T}\mathcal{X}$ лежит в области определения лагранжиана L), определен интеграл

$$S=\int_a^b L(\dot{\gamma}(t))\,dt. \tag{10}$$

Если кривая γ содержится в карте $(U,q^1,\ldots,q^n)$ (т. е. $\gamma(t)\in U$ для любого $t\in[a,b]$) и задается в этой карте вектор-функцией $\boldsymbol{q}(t)=(q^1(t),\ldots,q^n(t))$ (имеет параметрические уравнения $q^1=q^1(t),\ldots,q^n=q^n(t)$), то

$$S=\int_a^b L(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t))\,dt, \tag{10$'$}$$

где $\dot{\boldsymbol{q}}(t)=(\dot{q}^1(t),\ldots,\dot{q}^n(t))$.

Простейшая задача вариационного исчисления состоит в том, чтобы для данного лагранжиана L и данных точек p_0,p_1 найти кривую γ, для которой интеграл (10) принимает наименьшее значение. [Согласно так называемому вариационному принципу Лагранжа такие кривые минимума являются траекториями движения механической системы с лагранжианом L.] Мы ограничимся здесь тем, что найдем необходимые условия, которым должна удовлетворять каждая кривая минимума (а вопрос об условиях, обеспечивающих ее существование, рассмотрим лишь в лекции 25 и только в частном случае лагранжиана длины).

В элементарных учебниках вариационного исчисления простейшая задача вариационного исчисления формулируется как задача отыскания на данном отрезке $[a,b]$ оси $\mathbb{R}$ функции $y=y(x)$, доставляющей минимум интегралу вида

$$\int_a^b F(x,y,y')\,dx.$$

Это есть простейшая задача в нашем смысле для лагранжиана на многообразии $\mathcal{X}=\mathbb{R}$. При этом лагранжиан зависит от времени, роль которого играет x.

Уравнения Эйлера — Лагранжа Пусть сначала кривая минимума γ гладка и содержится в карте $(U, h) = (U, q^1, \ldots, q^n)$ (и, значит, интеграл (10) для этой кривой задается формулой (10′)). *Проварируем* эту кривую, т. е. включим ее в такое семейство гладких кривых

$$\gamma_\varepsilon \colon t \mapsto \gamma_\varepsilon(t), \qquad t \in [a, b], \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0,$$

на U, что $\gamma_0 = \gamma$. При этом мы будем требовать, чтобы кривые γ_ε *гладко зависели от ε при $\varepsilon = 0$*, т. е. чтобы задающие их в карте (U, h) функции

$$q^i = q^i(t, \varepsilon), \quad t \in [a, b], \qquad |\varepsilon| < \varepsilon_0, \tag{11}$$

имели при $\varepsilon = 0$ гладкие частные производные

$$\eta^i(t) = \left.\frac{\partial q^i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Заметим, что *для произвольных гладких функций η^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, заданных на отрезке $[a, b]$, существует вариация* (11) *кривой γ, для которой производные* (12) *совпадают с функциями η^i*. [Такую вариацию можно, например, задать формулами

$$q^i(t, \varepsilon) = q^i(t) + \varepsilon \eta^i(t), \qquad t \in [a, b], \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0, \tag{13}$$

где ε_0 — некоторое достаточно малое положительное число.]

Вариация (10) называется *вариацией с закрепленными концами*, если $\gamma_\varepsilon(a) = p_0$ и $\gamma_\varepsilon(b) = p_1$ для всех ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. В этом случае в силу минимальности интеграла (10) на кривой γ функция

$$S(\varepsilon) = \int_a^b L(\gamma_\varepsilon(t))\, dt = \int_a^b L(q(t, \varepsilon), \dot{q}(t, \varepsilon))\, dt \tag{14}$$

от ε имеет при $\varepsilon = 0$ минимум и, значит, $S'(0) = 0$. Но по правилу дифференцирования интегралов по параметру

$$S'(0) = \int_a^b \left.\left[\frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial q^i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right]\right|_{\varepsilon=0} dt =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q^i}\eta^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{\eta}^i(t)\right] dt$$

(так как по определению $\dot{q}^i(t,\varepsilon) = \dfrac{\partial q^i(t,\varepsilon)}{\partial t}$, то $\dfrac{\partial \dot{q}^i(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \dfrac{\partial^2 q^i(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial q^i(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}$ и, значит, $\left.\dfrac{\partial \dot{q}^i(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \dot{\eta}^i(t)$), откуда, интегрируя второе слагаемое по частям, мы немедленно получаем, что

$$S'(0) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\eta^i(t)\Big|_a^b + \int\limits_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right]\eta^i(t)\,dt. \tag{15}$$

(Здесь имеется в виду, что в $\dfrac{\partial L}{\partial q^i}$ и $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ осуществлены подстановки $q^i = q^i(t)$ и $\dot{q}^i = \dot{q}^i(t)$.) Для вариации с закрепленными концами имеют место равенства $\eta^i(a) = 0$, $\eta^i(b) = 0$, и потому проинтегрированный член в правой части формулы (15) исчезает. Ввиду сделанного выше замечания этим доказано, что *гладкая кривая минимума, содержащаяся в карте (U,h), обладает тем свойством, что для любых гладких функций $\eta^i(t)$, $t \in [a,b]$, $i = 1,\dots,n$, равных нулю при $t = a$ и $t = b$, имеет место равенство*

$$\int\limits_a^b \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right]\eta^i(t)\,dt = 0. \tag{16}$$

Из анализа известна следующая лемма (называемая обычно основной леммой вариационного исчисления).

Лемма 1. *Пусть $A_i(t)$, $i = 1,\dots,n$, — гладкие функции, заданные на отрезке $[a,b]$. Если для любых заданных на $[a,b]$ гладких (класса C^∞) функций $\eta^i(t)$, $i = 1,\dots,n$, удовлетворяющих соотношениям*

$$\eta^i(a) = 0, \quad \eta^i(b) = 0, \qquad i = 1,\dots,n,$$

имеет место равенство

$$\int\limits_a^b A_i(t)\eta^i(t)\,dt = 0, \tag{17}$$

то $A_i(t) = 0$ для всех $t \in [a,b]$ и всех $i = 1,\dots,n$.

Приведем для полноты доказательство этой леммы.

Доказательство леммы 1. Если лемма неверна, то существует такой номер i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, и такой интервал $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, что $A_{i_0}(t) \neq 0$ при $\alpha < t < \beta$. По теореме Дарбу функция $A_{i_0}(t)$ сохраняет на (α, β) постоянный знак. Пусть, для определенности, $A_{i_0}(t) > 0$ при $\alpha < t < \beta$.

Мы знаем (см. лекцию III.1), что на $\mathbb{R}$ существует такая функция φ класса C^∞, что $\varphi(t) > 0$ при $\alpha < t < \beta$ и $\varphi(t) = 0$ при $t \leqslant \alpha$ и $t \geqslant \beta$. Тогда для функций η^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, на $[a, b]$, заданных формулами

$$\eta^i(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } i = i_0, \\ 0 & \text{если } i \neq i_0, \end{cases}$$

будет иметь место соотношение

$$\int_a^b A_i(t)\eta^i(t)\,dt = \int_a^b A_{i_0}(t)\varphi(t)\,dt > 0,$$

что противоречит условию. □

Поскольку равенство (16) имеет вид (17), из леммы 1 следует, что функции $q^i(t)$, задающие гладкую кривую минимума, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Эйлера — Лагранжа* (в механике — *уравнениями Лагранжа*; некоторые геометры называют их *уравнениями Эйлера*).

Кривые минимума и экстремали

Определение 4. Гладкая кривая γ: $[a, b] \to \mathcal{X}$ называется *экстремалью* лагранжиана L, если для любого отрезка $I \subset [a, b]$, обладающего тем свойством, что ограничение $\gamma|_I$ кривой γ на I целиком содержится в некоторой карте (U, h), функции $q^i = q^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, задающие в этой карте кривую γ (т. е., точнее, — кривую $\gamma|_I$), удовлетворяют уравнениям (18).

Подчеркнем, что по определению *любая экстремаль является гладкой кривой.*

Поскольку для любого отрезка $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ ограничение $\gamma|_{[a_1, b_1]}$ кривой минимума γ: $[a, b] \to \mathcal{X}$ также, очевидно, является кривой минимума (среди кривых, соединяющих точки $\gamma(a_1)$ и $\gamma(b_1)$), проведенные рассуждения доказывают, что *любая гладкая кривая минимума является экстремалью.*

Что же касается кусочно гладких кривых минимума (когда они существуют), то экстремалью будет любой их отрезок, являющийся гладкой кривой.

Замечание 1. Экстремалями будут и гладкие кривые *локального минимума*, для которых интеграл (10) имеет наименьшее значение лишь по сравнению со всеми достаточно близкими (в понятном смысле) кривыми. Нам этот факт не понадобится.

Конечно, экстремаль, вообще говоря, может и не быть кривой минимума (даже локального). Ситуация здесь вполне аналогична соотношению между точками минимума и критическими точками (точками экстремума) функций.

Левая часть уравнения (18) обозначается символом $\dfrac{\delta L}{\delta q^i}$ и называется *i-ой частной вариационной производной лагранжиана L по кривой $q^i = q^i(t)$*. [Таким образом, кривая тогда и только тогда является экстремалью, когда все вариационные производные лагранжиана по этой кривой равны нулю. Это еще раз подчеркивает аналогию между экстремалями и точками экстремума.]

Замечание 2. В рамках теории бесконечномерных многообразий (см. начало лекции 10) совокупность всех кривых в $\mathcal{X}$, соединяющих точку p_0 с точкой p_1, будет банаховым многообразием, интеграл (10) будет гладкой функцией на этом многообразии, вариационные производные будут компонентами дифференциала этой функции, а экстремали — ее критическими точками.

В развернутой форме вариационные производные имеют вид

$$\frac{\delta L}{\delta q^i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial \dot q^j}\ddot q^j(t) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial q^j}\dot q^j(t) - \frac{\partial L}{\partial q^i}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где предполагается, что в функциях $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial \dot q^j}$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial q^j}$ и $\dfrac{\partial L}{\partial q^i}$ произведена подстановка $q = q(t)$, $\dot q = \dot q(t)$, и, значит, уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial \dot q^j}\ddot q^j(t) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial q^j}\dot q^j(t) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \qquad (18')$$

Таким образом, *уравнения Эйлера — Лагранжа являются дифференциальными уравнениями второго порядка для функций $q^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, линейными по вторым производным* $\ddot{q}^j(t)$ (первые производные $\dot{q}^j(t)$ входят в них, вообще говоря, нелинейно).

В задачах механики лагранжиан L, как правило, естественным образом представляется в виде $L = T - U$ (или, точнее, $L = T - U \circ \pi$), где T — функция на $\mathsf{T}\mathcal{X}$, называемая *кинетической энергией*, а U — функция на $\mathcal{X}$, называемая *потенциальной энергией*. В соответствии с этим уравнения Лагранжа (18) приобретают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial U}{\partial q^i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Более общим образом, можно ввести в рассмотрение произвольную линейную горизонтальную форму θ на $\mathsf{T}\mathcal{X}$ (называемую *силовым полем*) и вместо уравнений (19) рассматривать уравнения вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \theta_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{19$'$}$$

где $\theta_i = \theta_i(q, \dot{q})$ — коэффициенты формы θ. Впрочем, обычно, в силовом поле выделяют по физическим соображениям *потенциальное поле* ∇U и уравнения (19$'$) пишут в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \theta_i - \frac{\partial U}{\partial q^i}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{19$''$}$$

где θ_i — компоненты *поля непотенциальных сил.*

Регулярные лагранжианы

Важно иметь в виду, что уравнения (18$'$) не разрешены относительно вторых производных.

Определение 5. Лагранжиан L называется *регулярным лагранжианом,* если для любой карты $(U, q^1, \ldots, q^n)$ матрица

$$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right\| \tag{20}$$

невырождена.

Задача 4. Докажите, что невырожденность матрицы (20) не зависит от выбора локальных координат.

Для регулярного лагранжиана уравнения (18$'$) можно, разрешив относительно вторых производных, представить в виде

$$\ddot{q}^i(t) = F^i(q(t), \dot{q}(t)), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где F^i — некоторые функции. Поэтому к этим уравнениям будет применима стандартная теорема о существовании и единственности решений систем дифференциальных уравнений, согласно которой *для любой точки* $p_0 \in \mathcal{X}$ *и любого вектора* $A \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ *существует единственная максимальная (не продолжаемая на больший отрезок) экстремаль* γ *лагранжиана* L, *проходящая при* $t = 0$ *через точку* p_0 *и имеющая в этой точке касательный вектор* A.

[Конечно, эта теорема ничего не говорит о существовании экстремалей, и тем более, — кривых минимума, соединяющих данную точку p_0 с данной точкой p_1.]

Для нерегулярных лагранжианов экстремаль с данным касательным вектором может не существовать, а в случае, когда она существует, — может быть неединственна.

В лагранжианах механики $L = T-U$ кинетическая энергия T является обычно положительно определенной квадратичной формой от обобщенных скоростей $\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n$. В этом случае матрица (20) не зависит от скоростей и является не чем иным, как удвоенной матрицей формы T. Поэтому *все лагранжианы механики* $L = T - U$ *регулярны*.

Экстремали лагранжиана энергии

С точки зрения геометрии положительно определенная кинетическая энергия T является не чем иным, как римановой метрикой на $\mathcal{X}$. Это определяет тесное взаимодействие аналитической механики с римановой геометрией, взаимно обогащающее обе дисциплины. Не имея возможности вдаваться здесь в этот предмет сколь-нибудь подробно, мы ограничимся рассмотрением движения по инерции (в отсутствие каких-либо сил, в том числе и потенциальных). Это означает, что мы будем иметь дело с римановым пространством $\mathcal{X}$ и лагранжианом L, заданным на $\mathsf{T}\mathcal{X}$ формулой

$$L(A) = \frac{1}{2}(A, A), \qquad A \in \mathsf{T}\mathcal{X} \tag{21}$$

(множитель 1/2 не играет, конечно, никакой принципиальной роли и вводится лишь для упрощения формул). Обычно лагранжиан (21) называется *лагранжианом энергии* риманова пространства $\mathcal{X}$, но некоторые авторы предпочитают называть его *лагранжианом действия*.

В локальных координатах лагранжиан (21) выражается посредством функции

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot q^i \dot q^j. \tag{21'}$$

Заметим, что он имеет смысл для любого псевдориманового пространства $\mathcal{X}$.

Для лагранжиана энергии

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q^i} = g_{ik} \dot q^k, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial \dot q^j} = g_{ij}$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \dot q^j \dot q^k, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot q^j} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \dot q^k.$$

Поэтому уравнения (18′) для этого лагранжиана имеют вид

$$g_{ij} \ddot q^j(t) + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \dot q^j(t) \dot q^k(t) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \dot q^j(t) \dot q^k(t) = 0.$$

Свернув левые части этих уравнений с тензором g^{il}, мы тем самым разрешим их относительно вторых производных:

$$\ddot q^l(t) + g^{il} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right) \dot q^j(t) \dot q^k(t) = 0.$$

Поскольку последние уравнения лишь обозначениями отличаются от уравнений геодезических (8′), этим доказано следующее предложение.

Предложение 1. *Экстремали лагранжиана энергии — это в точности геодезические (псевдо)римановой метрики.* $\square$

Таким образом, геодезические — это не что иное, как траектории движения по инерции.