ЛЕКЦИЯ 12

Длина кривой в римановом пространстве. — Натуральный параметр. — Риманово расстояние и кратчайшие. — Экстремали лагранжиана длины. — Римановы координаты. — Лемма Гаусса. — Геодезические — локально кратчайшие. — Гладкость кратчайших. — Локальное существование кратчайших. — Внутренняя метрика. — Теорема Хопфа — Ринова.

Длина кривой в римановом пространстве

Для риманова (но не псевдориманова!) пространства $\mathcal{X}$ наряду с лагранжианом энергии можно рассмотреть также лагранжиан

$$L(A) = |A|, \qquad A \in \mathsf{T}\mathcal{X}, \tag{1}$$

выражающийся в локальных координатах формулой

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}. \tag{1'}$$

(Учитывая, что этот лагранжиан механического смысла не имеет, мы возвращаемся к обычным обозначениям $x^1, \ldots, x^n$ локальных координат. Заметим, что лагранжиан (1) является гладкой функцией лишь вне нулевой секущей поверхности касательного расслоения, т. е. при $A \neq 0$.)

Соответствующий интеграл имеет вид

$$s_\gamma = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

(по традиции для его обозначения используется не прописная, а строчная буква) и называется *длиной* кривой γ в метрике g (при $n = 2$ это в точности длина кривой на поверхности; см. формулу (27) лекции III.3).

В соответствии с этим лагранжиан (1) называется *лагранжианом длины*.

Если кривая γ целиком расположена в карте $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$, то

$$s_\gamma = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\boldsymbol{x}(t))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)}dt, \quad \boldsymbol{x}(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)), \tag{2}$$

где $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ — функции, задающие в карте (U, h) кривую γ, а $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, — компоненты тензора g в этой карте.

В условном мнемоническом виде формулу (2) можно записать в виде

$$s_\gamma = \int_\gamma \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

или даже в виде

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

При желании символ ds^2 можно рассматривать как обозначение *поля квадратичных функционалов*, в котором каждой точке $p \in U$ отвечает квадратичный функционал

$$A \mapsto g_p(A, A), \qquad A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X},$$

на пространстве $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$.

Заметим, что $s_\gamma \geqslant 0$, причем $s_\gamma = 0$ тогда и только тогда, когда кривая γ постоянна (является отображением в точку).

Интеграл (2) можно, конечно, рассматривать и для кривых на псевдоримановом пространстве $\mathcal{X}$. Однако в этом случае он, вообще говоря, будет комплексным числом (и может быть равен нулю для непостоянных кривых).

Задача 1. Докажите, что *при перепараметризации кривой γ (даже необратимой) ее длина не меняется.*

Натуральный параметр Как и для кривых в евклидовом пространстве (см. лекцию III.1), параметр t на кривой γ называется *натуральным*, если $|\dot\gamma(t)| = 1$. В этом случае длина любого отрезка $\gamma|_{[t_0, t_1]}$ кривой γ равна $t_1 - t_0$. Поэтому с точностью до перепараметризаций вида $t \mapsto t - t_0$ натуральный параметр на (ориентированной) кривой γ определен однозначно. Чтобы его полностью фиксировать, достаточно выбрать на кривой точку p_0 и потребовать, чтобы значение t_0 параметра t в этой точке было равно нулю. При таком выборе натурального параметра его значение для любой точки p кривой с точностью до знака равно длине отрезка кривой от p_0 до p. На этом основании натуральный параметр называется также *длиной дуги*.

Заметим, что согласно формуле (9) лекции 11 *параметр t на геодезической γ_A тогда и только тогда натурален, когда $|A| = 1$.*

Задача 2. Докажите, что при перепараметризации геодезическая тогда и только тогда остается геодезической, когда перепараметризация линейна (имеет вид $t \mapsto at + b$, где $a \neq 0$).

Если для кривой γ вектор $\dot\gamma(t)$ всюду отличен от нуля (такие кривые называются *регулярными*; см. лекцию III.1), то, выбрав на кривой точку $p_0 = \gamma(t_0)$, мы можем перепараметризировать кривую к натуральному параметру $s = s(t)$, где

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot\gamma(t)|\, dt.$$

Такого рода перепараметризация возможна и для нерегулярных кривых, но она уже не будет, вообще говоря, обратимой.

Риманово расстояние и кратчайшие

Пусть многообразие $\mathcal{X}$ связно и, значит, для любых двух точек $p, q \in \mathcal{X}$ существуют кусочно гладкие (даже гладкие; см. задачу 7 лекции III.11) кривые, соединяющие эти точки.

***Определение* 1.** Наибольшая нижняя грань

$$\rho(p, q) = \inf \int_{\gamma} |\dot\gamma(t)| dt \tag{3}$$

длин всех кривых γ, соединяющих точку p с точкой q, называется *римановым* (или *внутренним*) *расстоянием* между точками p и q.

Кусочно гладкая кривая (когда она существует), на которой нижняя грань (3) достигается, т. е. длина которой равна расстоянию $\rho(p, q)$, называется *кратчайшей*. Такая кривая не всегда существует и, вообще говоря, не единственна (даже с точностью до параметризации).

Пример 1. Пусть $\mathcal{X}$ — евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$, из которой удален круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Для точек $(-2, 0)$ и $(0, 2)$ не существует соединяющей их кратчайшей.

Пример 2. На двумерной сфере (поверхности Земли) кратчайшими служат дуги меридианов (больших кругов). Для диаметрально противоположных точек соединяющих их меридианов бесконечно много.

Конечно, при любой перепараметризации кратчайшая остается кратчайшей.

Экстремали лагранжиана длины По определению каждая кратчайшая является кривой минимума лагранжиана длины.

Задача 3. Выведите отсюда, что *лагранжиан длины не регулярен.* [Указание. Нет свойства единственности кривых минимума и, тем более, экстремалей.]

Задача 4. Докажите прямым вычислением, что *для лагранжиана длины матрица*

$$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \right\| \tag{4}$$

вырождена; см. определение 5 лекции 11. [Указание. Учитывая, что лагранжиан (1′) является однородной функцией степени 1 обобщенных скоростей, воспользуйтесь дважды теоремой Эйлера об однородных функциях.]

Задача 5. Докажите, что *при любой перепараметризации экстремаль лагранжиана длины остается экстремалью.*

Задача 6. Докажите, что *для лагранжиана длины ранг матрицы* (4) *равен* $n-1$.

Из утверждения задачи 6 следует, что для лагранжиана длины среди уравнений Эйлера — Лагранжа (уравнений (18) лекции 11) имеется точно $n-1$ независимых уравнений. Поэтому можно надеяться восстановить единственность, присоединив к этим уравнениям еще одно дополнительное уравнение.

В качестве такого дополнительного уравнения мы выберем уравнение

$$g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = \text{const}, \tag{5}$$

означающее, что параметр t на экстремали пропорционален натуральному параметру (длине дуги). Оказывается, что это условие позволяет найти экстремали лагранжиана длины почти без вычислений.

Пусть L_1 — лагранжиан энергии риманова пространства $\mathcal{X}$. Тогда $L_1 = \frac{1}{2}L^2$, и потому

$$\frac{\partial L_1}{\partial q^i} = L\frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^i} = L\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

(мы снова возвращаемся к q-обозначениям). В частности,

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^i}(q(t), \dot{q}(t)) = L(q(t), \dot{q}(t))\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q(t), \dot{q}(t)).$$

Но условие (5) в точности означает, что $L(q(t), \dot{q}(t)) = \text{const}$. Поэтому (мы опять опускаем аргументы)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^i} = L\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i},$$

и, значит,

$$\frac{\delta L_1}{\delta q^i} = L\frac{\delta L}{\delta q^i} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Поскольку $L \neq 0$, это доказывает, что при выполнении условия (5) равенства $\dfrac{\delta L}{\delta q^i} = 0$ в точности равносильны равенствам $\dfrac{\delta L_1}{\delta q^i} = 0$, характеризующим, как мы уже знаем, геодезические.

Таким образом, *геодезические римановой метрики — это в точности экстремали лагранжиана длины, удовлетворяющие условию* (5) (*т. е. отнесенные к параметру, пропорциональному натуральному*).

Заметим, что в силу формулы (9) лекции 11 любая геодезическая априори удовлетворяет условию (5).

Мы видим, в частности, что *в любом римановом пространстве экстремали энергии и длины совпадают.* Это является дифференциально-геометрическим выражением п р и н ц и п а н а и м е н ь ш е г о д е й с т в и я М о п е р т ю и.

Применительно к кратчайшим мы получаем теперь, что *каждая гладкая кратчайшая, отнесенная к натуральному параметру, является геодезической.*

Оказывается, что оговорка о гладкости здесь излишняя (любая кратчайшая является гладкой кривой), но доказательство этого факта требует довольно длинных приготовлений.

Римановы координаты

Для любой точки p_0 риманова пространства $\mathcal{X}$ экспоненциальное отображение

$$\exp_{p_0}\colon \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

(отвечающее римановой связности ∇) позволяет перенести полярные (равно как и сферические) координаты в евклидовом пространстве $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ в произвольную нормальную окрестность U_0 точки p_0. Впрочем, во избежание излишних оговорок нам будет удобно считать здесь нормальную окрестность U_0 *шаровой*, т. е. являющейся $\exp_{p_0}$-образом некоторого открытого шара пространства $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ с центром в точке 0. (Заметим, что радиус этого шара называется *радиусом* нормальной шаровой окрестности U_0.)

Перенесенные в U_0 полярные координаты называются *римановыми* или *полугеодезическими* координатами. По определению точка $p \in U_0$ имеет полугеодезические координаты $t, \alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1}$, если $p = \exp_{p_0} tA$, где A — орт евклидова пространства $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$, имеющий на единичной сфере этого пространства «географические координаты» $\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1}$. [Таким образом, строго говоря, координаты $t, \alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1}$ определены не всюду в U_0, а лишь в некоторой области, являющейся $\exp_{p_0}$-образом конуса пространства $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ с удаленной вершиной. (Основанием этого конуса служит область на единичной сфере, в которой определены координаты $\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1}$.) Для упрощения формулировок обычно принято это обстоятельство игнорировать.]

Координатными t-линиями полугеодезической системы координат являются геодезические

$$\gamma_A\colon\ t \mapsto \exp_{p_0} tA, \tag{6}$$

проходящие при $t = 0$ через точку p_0, а координатными поверхностями $t = \text{const}$ — *геодезические сферы* (вложенные $(n-1)$-мерные подмногообразия Σ_t, $t \neq 0$, являющиеся образами при диффеоморфизме $\exp_{p_0}$ сфер $|A| = t$ евклидова пространства $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$).

Лемма Гаусса Для каждой точки $p = \exp_{p_0} tA$ сферы Σ_t первый вектор $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)_p$ координатного базиса

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^1}\right)_p, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^{n-1}}\right)_p$$

пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ является не чем иным, как касательным вектором $\dot\gamma_A(t)$ геодезической (6), а остальные векторы

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial\alpha^{n-1}}\right)_p$$

составляют базис касательного пространства $\mathsf{T}_p\Sigma_t$ сферы Σ_t.

Так как вектор A является ортом, то согласно формуле (9) лекции 11

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 1$$

всюду на U_0.

Предложение 1. *В любой точке $p \in \Sigma_t$ вектор*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p = \dot\gamma_A(t)$$

ортогонален подпространству $\mathsf{T}_p\Sigma_t$.

Это важное предложение известно как лемма Гаусса. В наглядной переформулировке оно утверждает, что — подобно обычным евклидовым сферам — *геодезические сферы ортогональны своим радиусам.*

Другая полезная переформулировка состоит в том, что в полугеодезических координатах матрица $\|g_{ij}\|$ метрического тензора имеет вид

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G & \\ 0 & & & \end{matrix}\right\|, \tag{7}$$

где G — матрица порядка $n-1$.

Доказательство предложения 1. Для любого t, $|t| < \delta_0$, и любой кривой $s \mapsto A(s)$, $|A(s)| = 1$, $|s| < s_0$, на единичной сфере пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$, проходящей при $s = 0$ через точку A (т. е. такой, что $A(0) = A$), кривая

$$u_t\colon\ s \mapsto \exp_{p_0} tA(s)$$

является кривой на геодезической сфере Σ_t, и потому ее касательный вектор $\dot u_t(0)$ принадлежит подпространству $\mathsf{T}_p\Sigma_t$, $p = \exp_{p_0} tA$. Поскольку произвольный вектор последнего подпространства, очевидно, может быть представлен в виде $\dot{u}_t(0)$ (при соответствующим образом подобранной кривой $s \mapsto A(s)$), для доказательства предложения 1 достаточно, следовательно, показать, что для каждой кривой $s \mapsto A(s)$ имеет место равенство

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p, \dot{u}_t(0)\right) = 0.$$

С этой целью мы введем в рассмотрение элементарную поверхность

$$\varphi\colon W \to \mathcal{X},$$

определенную на квадрате $\{(s,t); |s| < s_0, |t| < \delta_0\}$ плоскости $\mathbb{R}^2$ формулой

$$\varphi(s,t) = \exp_{p_0} tA(s).$$

Координатными линиями $s = \text{const}$ этой поверхности служат геодезические $\gamma_{A(s)}$ (в частности, при $s = 0$ — геодезическая γ_A), а координатными линиями $t = \text{const}$ — кривые u_t. Поэтому

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_p = \dot{\gamma}_A(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)_p = \dot{u}_t(0),$$

откуда следует, что предложение 1 будет доказано, если мы покажем, что функция

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) \tag{8}$$

переменных s и t тождественно равна нулю. Поскольку при $t = 0$ функция (8) заведомо равна нулю (так как $u_0(s) = p_0$ для всех s и, значит $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)_{t=0} = \dot{u}_0(s) = 0$), для этого в свою очередь достаточно показать, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) = 0.$$

Но согласно формуле (4) лекции 11

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) = \left(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right),$$

причем, так как кривые $s = \text{const}$ являются геодезическими, то $\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, а так как риманова связность по определению симметрична, то $\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ (см. формулу (17) лекции 2). С другой стороны, так как

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 1,$$

то

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = 0.$$

Поэтому, действительно, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) = 0$. □

Предложение 1 имеет много важных следствий.

Геодезические — локально кратчайшие

Напомним (см. формулу (13) лекции 1), что для любой точки q, принадлежащей нормальной окрестности U точки p, определен отрезок геодезической $\gamma_{p,q}$, соединяющий в U точку p с точкой q.

Предположим дополнительно, что окрестность U является нормальной шаровой окрестностью. Оказывается, при этом предположении справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Отрезок $\gamma_{p,q}$ является кратчайшей.*

Доказательство. Пусть $(t, \alpha) = (t, \alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1})$ — полугеодезические координаты в окрестности U. Утверждение о том, что метрический тензор имеет в этих координатах вид (7), означает, что

$$ds^2 = dt^2 + G(d\alpha),$$

где $G(d\alpha)$ — некоторая положительно определенная квадратичная форма от $d\alpha^1, \ldots, d\alpha^{n-1}$ (с коэффициентами, зависящими не только от $\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1}$, но и от t). Поэтому для любой кривой $\gamma\colon s \mapsto \gamma(s)$, соединяющей точку p с точкой q

и целиком расположенной в U, справедлива оценка

$$\int_\gamma |\dot\gamma(s)|\,ds = \int_\gamma \sqrt{(\dot t(s))^2 + G(\dot\alpha(s))}\,ds \geqslant \int_\gamma |\dot t(s)|\,ds \geqslant \geqslant \left|\int_\gamma \dot t(s)\,ds\right| = t_0,$$

где $t(s)$ и $\alpha(s)$ — функции, задающие в координатах (t,α) кривую γ, а t_0 — значение координаты t в точке q (т. е. такое число, что $q \in \Sigma_{t_0}$). При этом равенство достигается только при $\dot\alpha(s) = 0$ и $\dot t(s) \geqslant 0$, т. е. на кривой, которая при перепараметризации $t = t(s)$ (вообще говоря, необратимой) переходит в отрезок $\gamma_{p,q}$.

Таким образом, мы доказали, что

а *длина отрезка $\gamma_{p,q}$ равна t_0, где t_0 — такое число, что $q \in \Sigma_{t_0}$;*

б *длина любой кривой, соединяющей в U точку p с точкой q, не меньше t_0.*

Осталось рассмотреть кривые, соединяющие точки p и q и выходящие за пределы окрестности U.

Здесь нам и понадобится предположение, что окрестность U является шаровой и, следовательно, что она ограничена геодезической сферой Σ_δ, где δ — радиус окрестности U. Поскольку кривая, соединяющая точки p, q и не содержащаяся в окрестности U, необходимо пересекает сферу Σ_δ, из уже доказанного утверждения **б** (примененного к первой точке пересечения кривой со сферой Σ_δ) вытекает, что длина каждой такой кривой не меньше δ. Поскольку $t_0 < \delta$, эти кривые не влияют на нижнюю грань, которая поэтому в силу **а** равна t_0. Следовательно, $\rho(p,q) = t_0$ и отрезок $\gamma_{p,q}$ является кратчайшей. □

По ходу доказательства предложения 2 мы получили также следующие два предложения (которые для удобства ссылок мы не совсем правомерно назовем следствиями).

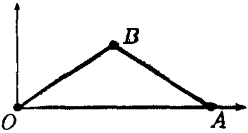
Следствие 1. *С точностью до перепараметризации отрезок $\gamma_{p,q}$ является единственной кратчайшей, соединяющей точку p с точкой q.* □

Следствие 2. *Расстояние от точки p до любой точки q геодезической сферы Σ_{t_0} равно ее радиусу t_0.* □

Из предложения 2, в частности, следует, что *каждый достаточно малый отрезок геодезической является кратчайшей*, т. е. что для лагранжиана длины в римановом пространстве каждый достаточно малый отрезок экстремали является кривой минимума.

Для произвольных лагранжианов это уже не так, т. е. существуют лагранжианы, обладающие экстремалями, никакой отрезок которых не является кривой минимума.

Пример 3. Для лагранжиана $L = \dot{x}^2 - \dot{y}^2$ на (x, y)-плоскости $\mathbb{R}^2$ ось абсцисс $x = at$, $y = 0$ является экстремалью. Пусть A — точка $(a, 0)$, $a > 0$, этой экстремали. Интеграл



$$\int_0^1 (\dot{x}^2 - \dot{y}^2)dt$$

по отрезку OA этой экстремали равен, очевидно, a^2. Вместе с тем тот же интеграл по (соответствующим образом параметризованной) ломаной OBA, где B — точка $(a/2, b/2)$, $b > 0$, равен $a^2 - b^2$. Поэтому отрезок OA кривой минимума не является.

Заметим, что, как показывает произведенное вычисление, для лагранжиана $L = \dot{x}^2 - \dot{y}^2$ кривой минимума, соединяющей точки O и A, вообще нет.

Гладкость кратчайших

Теперь мы уже можем доказать, что кратчайшие римановой метрики являются гладкими кривыми.

Предложение 3. *С точностью до перепараметризации любая кратчайшая является геодезической (и, следовательно, представляет собой гладкую кривую).*

Доказательство. Каждый отрезок кратчайшей является, очевидно, кратчайшей (в противном случае его можно заменить более коротким отрезком, что уменьшит длину и всей кратчайшей). Но если концы p и q этого отрезка достаточно близки (точка q содержится в нормальной шаровой окрестности точки p), то согласно следствию 1 предложения 2 этим отрезком будет отрезок геодезической $\gamma_{p,q}$. Таким образом, локально (в окрестности любой точки) кратчайшая является геодезической. Для завершения доказательства остается заметить, что свойство быть геодезической выражается дифференциальными уравнениями, и потому кривая, локально являющаяся геодезической, будет геодезической и глобально. $\square$

Заметим, что обратное утверждение неверно — геодезическая может и не быть кратчайшей.

Пример 4. На двумерной сфере каждая кривая, обегающая несколько раз сферу по экватору, является геодезической, но, конечно, не кратчайшей.

Заметим также, что для произвольных лагранжианов кривая минимума не обязана, вообще говоря, быть гладкой кривой.

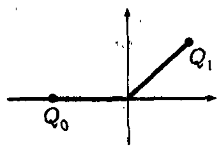
Пример 5. Рассмотрим на (x, y)-плоскости $\mathbb{R}^2$ лагранжиан

$$L = \frac{y^2(\dot{x} - \dot{y})^2}{\dot{x}}$$

(определенный при $\dot{x} \neq 0$) и точки $Q_0(-1, 0)$ и $Q_2(1, 1)$. Кусочно гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, соединяющая точку Q_0 с точкой Q_1, естественное поднятие которой лежит в области определения лагранжиана L, не имеет вертикальных касательных, и потому составлена из гладких кривых с уравнениями вида $y = y(x)$. Но так как для таких кривых

$$\frac{y^2(\dot{x} - \dot{y})^2}{\dot{x}} dt = y^2(1 - y')^2 dx, \quad \text{где } y' = \frac{dy}{dx},$$

то интеграл от L по каждой кривой $y = y(x)$ равен интегралу от функции $y^2(1 - y')^2$ по соответствующему отрезку оси абсцисс и, значит, неотрицателен. При этом он равен нулю тогда и только тогда, когда эта кривая является либо отрезком оси абсцисс $y = 0$, либо отрезком биссектрисы $y = x$. Поскольку существует ломаная, состоящая из отрезка оси абсцисс и отрезка биссектрисы $y = x$ и соединяющая точку Q_0 с точкой Q_1, этим доказано, что минимум интегралов от L существует, равен нулю и достигается на указанной ломаной. Таким образом, в этом случае кривая минимума (заметим, единственная!) заведомо не является гладкой кривой в $\mathbb{R}^2$.



Локальное существование кратчайших

Предложение 4. *Существует такая окрестность U точки $p_0 \in \mathcal{X}$, что любые две точки $p, q \in U$ соединяются единственной (с точностью до перепараметризации) кратчайшей.*

Этой кратчайшей служит отрезок геодезической $\gamma_{p,q}$.

Существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любых точек $p, q \in U$ длина кратчайшей $\gamma_{p,q}$ (расстояние $\rho(p,q)$) меньше ε.

Доказательство. На первый взгляд кажется, что за U можно принять окрестность, указанную в предложении 1 лекции 1. Действительно, так как для любой точки $p \in U$ имеет место включение $U \subset U_{\delta,p}$, где $U_{\delta,p}$ — нормальная шаровая окрестность точки p, то для сегмента $\gamma_{p,q}$ выполнены условия предложения 2 и его длина меньше δ. Однако, это рассуждение дефектно, поскольку окрестность $U_{\delta,p}$ является шаровой окрестностью не по отношению к метрике g_p на $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$, а по отношению к введенной в лекции 1 вспомогательной метрике (которую мы теперь обозначим через $g_p^{(0)}$). Тем не менее его можно спасти, и даже двумя способами.

Способ первый. Просмотрев еще раз рассуждения из лекции 1, в которых использовалась метрика $g_p^{(0)}$, мы немедленно обнаружим, что в них нигде не участвовал специальный метод ее построения и что все эти рассуждения дословно сохраняются, если под $g^{(0)}$ понимать произвольную риманову структуру на U. В частности, за $g^{(0)}$ мы можем принять ограничение римановой структуры g на U. Тогда окрестности $U_{\delta,p}$ будут нормальными шаровыми окрестностями по отношению к метрике g_p и произведенное рассуждение окажется абсолютно безупречным.

Способ второй. Обе метрики g_p и $g_p^{(0)}$, являясь евклидовыми метриками на одном и том же конечномерном линеале, эквивалентны, т. е. существуют такие числа $m > 0$ и $M > 0$, что

$$m|A|^{(0)} \leqslant |A| \leqslant M|A|^{(0)} \tag{9}$$

для любого вектора $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$, где $|A|^{(0)}$ — длина вектора A в метрике $g_p^{(0)}$, а $|A|$ — его длина в метрике g_p. При этом — ввиду компактности множества $\overline{U}_0$ — числа m и M можно считать одними и теми же для всех $p \in U_0$. Поэтому шаровая δ-окрестность относительно метрики $g_p^{(0)}$ будет содержаться в шаровой $M\delta$-окрестности относительно метрики g_p. Это снова спасает наше рассуждение, только число δ придется заменить числом $M\delta$ (что, конечно, никакого значения не имеет). $\square$

Внутренняя метрика Вернемся теперь к риманову расстоянию ρ, определенному формулой (3).

Предложение 5. *По отношению к расстоянию ρ каждое связное риманово пространство $\mathcal{X}$ является метрическим пространством, т. е.*

а) $\rho(p,q) = 0$ тогда и только тогда, когда $p = q$ (невырожденность);

б) $\rho(p,q) = \rho(q,p)$ для любых точек $p, q \in \mathcal{X}$ (симметричность);

в) $\rho(p,r) \leqslant \rho(p,q) + \rho(q,r)$ для любых точек $p, q, r \in \mathcal{X}$ (аксиома треугольника).

Топология на $\mathcal{X}$, индуцированная метрикой ρ, совпадает с топологией многообразия $\mathcal{X}$.

Доказательство. Симметричность немедленно следует из того, что кривая, пробегаемая в противоположном направлении, имеет ту же длину. Для доказательства аксиомы треугольника достаточно заметить, что для любой кривой γ_1, соединяющей точку p с точкой q, и любой кривой γ_2, соединяющей точку q с точкой r, составная кривая $\gamma_1\gamma_2$ соединяет точку p с точкой r, и ее длина равна сумме длин кривых γ_1 и γ_2. Наконец, из следствия 2 предложения 2 непосредственно вытекает, что каждая нормальная шаровая δ-окрестность U_δ произвольной точки $p \in \mathcal{X}$ является ее шаровой δ-окрестностью и по отношению к расстоянию ρ (т. е. состоит из всех точек $q \in \mathcal{X}$, для которых $\rho(p,q) < \delta$). Поэтому метрика ρ невырождена и определяемая ею топология совпадает с топологией многообразия $\mathcal{X}$. $\square$

Метрика ρ называется *римановой* (или *внутренней*) *метрикой* на римановом пространстве $\mathcal{X}$.

Замечание 1. Невырожденность метрики ρ можно доказать и иначе, не используя предложение 2 (и, значит, лемму Гаусса). Пусть ρ_0 — метрика в координатной окрестности U_0, являющаяся результатом переноса посредством координатного отображения $h\colon U_0 \to \mathbb{R}^n$ стандартной евклидовой метрики на $\mathbb{R}^n$ (точнее, ее ограничения на шаре $h(U_0)$). Эта метрика, конечно, невырожденная. С другой стороны, легко видеть, что она является внутренней метрикой на U_0, отвечающей вспомогательной римановой структуре $g^{(0)}$, введенной в лекции 1. Поэтому из оценок (9) следует, что аналогичные оценки

$$m\rho_0(p,q) \leqslant \rho(p,q) \leqslant M\rho_0(p,q), \qquad p,q \in U_0,$$

имеют место и для метрик ρ_0 и ρ. Значит, метрика ρ также невырождена.

Отметим два следствия предложения 5.

Следствие 1. *Каждое паракомпактное и хаусдорфово гладкое многообразие метризуемо.* □

Этот факт мы уже анонсировали в замечании 2 лекции III.24.

Согласно — очень трудной! — теореме Стоуна *любое метризуемое пространство паракомпактно.* Поэтому паракомпактность (выполнение для каждой компоненты второй аксиомы счетности; см. замечание 2 лекции III.24) гладкого хаусдорфова многообразия $\mathcal{X}$ не только достаточна, но и необходима для существования на $\mathcal{X}$ римановой структуры.

Следствие 2. *Для любого компактного риманова пространства $\mathcal{X}$ существует такое число $\rho_0 > 0$, что любые две точки $p, q \in \mathcal{X}$, расстояние между которыми меньше ρ_0, соединяются единственной кратчайшей.*

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие пространства $\mathcal{X}$, состоящее из окрестностей U всевозможных точек $p_0 \in \mathcal{X}$, обладающих указанным в предложении 4 свойством. Так как пространство $\mathcal{X}$ компактно, то согласно лемме Лебега (см. лекцию III.8) существует такое $\rho_0 > 0$, что любые две точки $p, q \in \mathcal{X}$, для которых $\rho(p,q) < \rho_0$, содержатся в одном элементе этого покрытия и, значит, соединяются единственной кратчайшей. □

Число ρ_0 называется *числом Морса* риманова пространства $\mathcal{X}$.

Подмножество U риманова пространства $\mathcal{X}$ называется *выпуклым*, если

а любые две точки p, $q \in U$ соединяются единственной кратчайшей $\gamma_{p,q}$;

б эта кратчайшая целиком лежит в U.

Задача 7. Докажите, что *для любого риманова пространства существует открытое покрытие, состоящее из выпуклых множеств.*

[Указание. Воспользуйтесь теоремой Уайтхеда из лекции 1.]

Ясно, что любое выпуклое множество диффеоморфно шару и что пересечение двух выпуклых множеств (когда оно непусто) выпукло. Следовательно, покрытие, состоящее из выпуклых множеств, является покрытием Лере (см. определение 2 лекции III.22). Поэтому теорема 3 лекции III.22 является непосредственным следствием утверждения задачи 7.

Теорема Хопфа — Ринова

Определение 2. Связное риманово пространство $\mathcal{X}$ называется

а *метрически полным,* если в метрике ρ оно является полным метрическим пространством (каждая фундаментальная последовательность сходится);

б *геодезически полным,* если оно геодезически полно по отношению к римановой связности, т. е. каждая его максимальная геодезическая $\gamma_{p,A}$ определена на всей оси $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Оба понятия полноты совпадают, т. е. из каждого из условий* **а**, **б** *следует другое.*

Кроме того, из условий **а** *и (или)* **б** *следует, что* **в** *любые две точки пространства $\mathcal{X}$ можно соединить кратчайшей (вообще говоря, не единственной).*

Доказательство. Достаточно доказать, что из а следует **б**, из **б** следует **в**, а из **б** и **в** следует **а**.

Импликация **а** $\Rightarrow$ **б**. Пусть геодезическая $\gamma = \gamma_{p,A}$ определена на интервале с конечным правым концом b (случай, когда конечен левый конец, сводится к этому заменой A на $-A$), и пусть $\{t_k, k \geqslant 1\}$ — монотонно возрастающая последовательность значений параметра t, сходящаяся к b, а $p_k = \gamma(t_k)$. Так как для любых k и $l > k$ расстояние $\rho(p_k, p_l)$ между точками p_k и p_l не превосходит длины $(t_l - t_k)|A|$ геодезического сегмента $\gamma|_{[t_k,t_l]}$, то последовательность $\{p_k\}$ фундаментальна. Следовательно, поскольку метрическое пространство по условию полно, эта последовательность сходится. Пусть p_0 — ее предел.

З а д а ч а 8. Покажите, что *точка* p_0 *не зависит от выбора последовательности* $\{t_k\}$.

Для произвольной центрированной в точке p_0 карты $(U, x^1, \ldots, x^n)$ отрезок геодезической γ, содержащийся в U, задается функциями $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, определенными на некотором интервале вида (a, b) и обладающими тем свойством, что $x^i(t) \to 0$ при $t \to b$. Так как длина вектора $\dot\gamma(t)$ равна $|A|$, то первые производные $\dot x^i(t)$ этих функций ограничены на (a, b) и, следовательно, поскольку на интервале (a, b) функции $x^i(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\ddot x^i(t) + \Gamma^i_{jk}(x(t))\dot x^j(t)\dot x^k(t) = 0,$$

их вторые производные $\ddot x^i(t)$ также ограничены на (a, b). Поэтому первые производные $\dot x^i(t)$ равномерно непрерывны на (a, b) и, значит, при $t \to b$ существуют пределы

$$a_0^i = \lim_{t \to b} \dot x^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть A_0 — вектор из $\mathbf{T}_{p_0}\mathcal{X}$, имеющий в карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ координаты $a_0^1, \ldots, a_0^n$, и пусть γ_0 — геодезическая γ_{p_0, A_0}.

З а д а ч а 9. Пусть c — такое число, $c > b$, что кривая $\gamma_0(t - b)$ определена на полуинтервале $[b, c)$. Докажите, что *кривая* $\bar\gamma$, *определенная на интервале* (a, c) *формулой*

$$\bar\gamma(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \textit{если } a < t < b, \\ \gamma_0(t - b), & \textit{если } b \leqslant t < c, \end{cases}$$

является гладкой кривой (и, следовательно, представляет собой геодезическую).

Таким образом, максимальная геодезическая γ продолжается за точку b, что невозможно. Полученное противоречие доказывает импликацию **а** $\Rightarrow$ **б**.

И м п л и к а ц и я **б** & **в** $\Rightarrow$ **а**. Метрическое пространство $\mathcal{X}$ называется *больцановым*, если любое его замкнутое ограниченное подмножество компактно (в $\mathcal{X}$ выполнена теорема Больцано — Вейерштрасса).

З а д а ч а 10. Покажите, что *любое больцаново метрическое пространство полно.*

Поэтому нам достаточно показать, что *риманово пространство $\mathcal{X}$, удовлетворяющее условиям* **б** *и* **в**, *больцаново.*

Пусть C — произвольное замкнутое ограниченное множество пространства $\mathcal{X}$, и пусть $p_0 \in C$. Согласно условию б отображение $\exp_{p_0}$ определено на всем пространстве $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$, а согласно условию **в** — поскольку каждая кратчайшая является геодезической — его образ совпадает со всем многообразием $\mathcal{X}$ и, значит, в частности, содержит C. Более того, если R — диаметр множества C, то C содержится даже в множестве $\exp_{p_0}(\mathbb{B}_R)$, где $\mathbb{B}_R$ — замкнутый шар радиуса R пространства $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$. Последнее множество компактно — поскольку шар $\mathbb{B}_R$ компактен, — поэтому компактно и множество C. Следовательно, пространство $\mathcal{X}$ больцаново.

З а м е ч а н и е 2. Последнее рассуждение справедливо и при $p_0 \notin C$ (достаточно заменить C на $\{p_0\} \cup C$). Поэтому *связное риманово пространство $\mathcal{X}$ метрически (а потому и геодезически) полно, если область определения O_{p_0} экспоненциального отображения* $\exp_{p_0}$ *исчерпывает все пространство* $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ *хотя бы для одной точки $p_0 \in \mathcal{X}$.*

Продолжим доказательство теоремы 1.

И м п л и к а ц и я **б** $\Rightarrow$ **в** (по существу, единственно нетривиальная). Пусть p_0 — произвольная точка геодезически полного риманова многообразия $\mathcal{X}$. Нам нужно доказать, что для любой другой точки $q \in \mathcal{X}$ существует хотя бы одна кратчайшая, соединяющая точку p_0 с точкой q.

С этой целью мы рассмотрим нормальную шаровую δ-окрестность U_δ точки p_0 и ее граничную геодезическую сферу Σ_δ. Поскольку при $q \in U_\delta$ доказывать нечего, мы без ограничения общности можем предполагать, что $q \notin U_\delta$, т. е. что $\rho(p_0, q) \geqslant \delta$.

Пусть $p = \exp_{p_0} \delta A$, $|A| = 1$, — точка сферы Σ_δ, для которой расстояние до точки q достигает минимума (в силу компактности сферы Σ_δ точка p существует).

Докажем прежде всего следующую лемму.

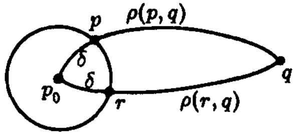
Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\rho(p_0, q) = \delta + \rho(p, q).$$

Доказательство. Так как $\delta = \rho(p_0, p)$, то по неравенству треугольника

$$\rho(p_0, q) \leqslant \delta + \rho(p, q). \tag{10}$$

С другой стороны, по определению наибольшей нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ существует соединяющая точки p_0 и q кривая γ, для длины s_γ которой имеют место неравенства



$$\rho(p_0, q) \leqslant s_\gamma \leqslant \rho(p_0, q) + \varepsilon.$$

Пусть r — точка пересечения кривой γ со сферой Σ_δ (хотя бы одна такая точка существует, так как по условию $q \notin U_\delta$, а $p_0 \in U_\delta$). Тогда

$$s_\gamma \geqslant \rho(p_0, r) + \rho(r, q) = \delta + \rho(r, q) \geqslant \delta + \rho(p, q)$$

и, значит, $\delta + \rho(p, q) \leqslant \rho(p_0, q) + \varepsilon$, что в силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ возможно только при

$$\delta + \rho(p, q) \leqslant \rho(p_0, q).$$

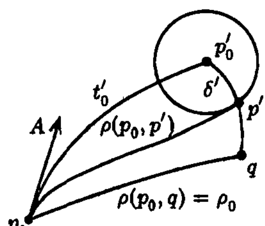
Вместе с (10) это доказывает лемму. □

Пусть $\gamma = \gamma_{p_0, A}$ — геодезическая, $t \mapsto \exp_{p_0} tA$, и пусть $\rho_0 = \rho(p_0, q)$.

Лемма 2. *Для любого t, $\delta \leqslant t \leqslant \rho_0$, имеет место равенство*

$$\rho(\gamma(t), q) = \rho_0 - t. \tag{11}$$

Доказательство. При $t = \delta$ равенство (11) переходит в утверждение леммы 1. Это означает, что множество C всех чисел t отрезка $[\delta, \rho_0]$ оси $\mathbb{R}$, для которых имеет место (11), непусто. Пусть t_0 — его наименьшая верхняя грань. Лемма 2 будет доказана, если мы покажем, что $t_0 = \rho_0$.



Пусть $t_0 < \rho_0$. Тогда существует нормальная шаровая δ'-окрестность точки $p'_0 = \gamma(t_0)$, не содержащая точки q, и точка p' геодезической сферы $\Sigma_{\delta'}$, для которой расстояние до точки q достигает минимума. При этом согласно лемме 1 будет иметь место равенство

$$\rho(p_0', q) = \delta' + \rho(p', q)$$

и, значит, равенство

$$\rho(p', q) = \rho_0 - (t_0 + \delta') \tag{12}$$

(так как по непрерывности $\rho(p_0', q) = \rho_0 - t_0$). Поэтому в силу неравенства треугольника (примененного к точкам p_0, p' и q) имеем

$$\rho(p_0, p') \geqslant \rho(p_0, q) - \rho(p', q) = \rho_0 - (\rho_0 - (t_0 + \delta')) = t_0 + \delta'.$$

С другой стороны, мы можем непосредственно предъявить кусочно гладкую кривую длины $t_0 + \delta'$, соединяющую точку p_0 с точкой p', — ею будет геодезическая ломаная, составленная из сегмента геодезической γ от p_0 до p_0' (длины t_0) и нормального геодезического сегмента $\gamma_{p_0', p'}$ (длины δ'). Поэтому, во-первых, $\rho(p_0, p') = t_0 + \delta'$ и, во-вторых, эта геодезическая ломаная является кратчайшей. Но являясь кратчайшей и, значит, гладкой кривой, эта ломаная не может иметь излома (и потому является геодезической). Имея с максимальной геодезической $\gamma = \gamma_{p,A}$ общий сегмент, она сама должна быть сегментом этой геодезической. Поэтому точка $\gamma(t_0 + \delta')$ геодезической γ (находящаяся от точки p_0 на расстоянии $t_0 + \delta'$) должна совпадать с точкой p'. В силу (12) это означает, что имеет место включение $t_0 + \delta' \in C$, для верхней грани t_0 невозможное. Полученное противоречие доказывает, что $t_0 = \rho_0$. □

Контрольный вопрос. Где в этом рассуждении использовано условие геодезической полноты?

Теперь мы уже без труда можем завершить доказательство теоремы 1.

Действительно, при $t = \rho_0$ из равенства (11) следует, что $q = \gamma(\rho_0)$, а так как длина геодезического сегмента $\gamma|_{[0,\rho_0]}$ равна $\rho_0 = \rho(p_0, q)$, то, следовательно, этот сегмент и будет кратчайшей, соединяющей точку p_0 с точкой q. □

Теорема 1 известна как **теорема Хопфа — Ринова**.

Связные римановы пространства, обладающие свойствами **а** и (или) **б** из теоремы 1, называются *полными*.

Замечание 3. Как показывает пример 3, на псевдоримановы пространства теорема Хопфа — Ринова непосредственно не переносится. Вместе с тем можно показать (попробуйте сделать это самостоятельно!), что теорему Хопфа — Ринова (а также и другие результаты этой лекции, например, гладкость кривых минимума и свойство экстремалей быть локально кривыми минимума) можно перенести на любые лагранжианы L, для которых в каждой карте $(U, q^1, \ldots, q^n)$ симметрическая матрица

$$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right\|$$

положительно определена (в любой точке окрестности U).

Замечание 4. Свойство **в** означает, в частности, что любые две точки пространства $\mathcal{X}$ можно соединить геодезической. В этом ослабленном виде оно имеет смысл для любого пространства аффинной связности, и возникает вопрос, не вытекает ли оно из геодезической полноты, и для каких пространств? Ответ оказывается отрицательным. Контрпример доставляет связность Картана (как мы знаем, геодезически полная; см. лекцию 6) на группе Ли $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ унимодулярных матриц второго порядка. Действительно, алгебра Ли этой группы состоит из вещественных матриц X вида

$$\left\| \begin{matrix} x & y \\ z & -x \end{matrix} \right\|.$$

Так как $X^2 = \delta E$, где $\delta = x^2 + yz = -\det X$, то

$$e^X = \operatorname{ch}\sqrt{\delta}\cdot E + (1/\sqrt{\delta})\operatorname{sh}\sqrt{\delta}\cdot X$$

(при $\delta \neq 0$; если $\delta = 0$, то $e^X = E + X$), и, значит, для того, чтобы матрица

$$A = \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\| \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$$

имела вид e^X — и, следовательно, принадлежала некоторой однопараметрической подгруппе, — необходимо выполнение неравенства $a+d \geqslant -2$. [Заметим, что число $\sqrt{\delta}$ либо вещественно, либо чисто мнимо; на самом деле для того, чтобы матрица $A \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ имела вид e^X, необходимо и достаточно, — докажите! — чтобы либо $a + d > -2$, либо $a = d = -1$, $b = c = 0$, т. е. $A = -E$.] Таким образом, отнюдь не любой элемент группы $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ принадлежит хотя бы одной однопараметрической подгруппе, т. е. может быть соединен с элементом E геодезической связности Картана.

Замечание 5. В лекции 26 мы покажем — см. предложение 2 лекции 26, — что на любой компактной группе Ли связность Картана порождается римановой метрикой и, значит, указанный в замечании 4 феномен для этой связности невозможен, т. е. *любой элемент компактной группы Ли содержится в некоторой однопараметрической подгруппе* (экспоненциальное отображение надъективно). Тем не менее, можно ли соединить геодезической любые точки произвольного геодезически полного компактного пространства аффинной связности, до сих пор, по-видимому, неизвестно.

Замечание 6. Любопытно, что *на компактном многообразии могут существовать и не геодезически полные аффинные связности.* Примером может служить — докажите! — перенесенная на $\mathbb{S}^1$ метрическая связность на $\mathbb{R}$, индуцированная метрикой $ds^2 = e^x dx^2$.