ЛЕКЦИЯ 13

Риманов элемент объема. — Дискриминантный тензор. — Формула Фосса — Вейля. — Случай $n = 2$. — Оператор Лапласа в римановом пространстве. — Формулы Грина. — Существование гармонических функций с отличным от нуля дифференциалом. — Сопряженные гармонические функции. — Изотермические координаты. — Полудекартовы координаты. — Декартовы координаты.

Риманов элемент объема В римановом (и псевдоримановом) пространстве $\mathcal{X}$ можно измерять не только длины, но и объемы, т. е. (см. лекцию III. 24) на $\mathcal{X}$ можно определить естественную плотность объема dV.

Действительно, пусть (U, h) — произвольная карта (псевдо)риманового пространства $\mathcal{X}$, и пусть $\|g_{ij}\|$ — матрица компонент метрического тензора g в карте (U, h), а

$$\det g = |g_{ij}|$$

— ее определитель. Из формулы преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса (см. формулу (5) лекции II.5) непосредственно вытекает, что при замене координат определитель $\det g$ умножается на квадрат якобиана функций перехода. Следовательно, положив

$$dV^U = \sqrt{|\det g|}$$

(как всегда, имеется в виду арифметический квадратный корень), мы получим на $\mathcal{X}$ некоторую плотность объема dV. (Конечно, в случае риманова пространства переходить от $\det g$ к $|\det g|$ нет нужды.)

Плотность dV принято обозначать символом

$$\sqrt{|\det g|}\, dx^1 \ldots dx^n \quad \text{или} \quad \sqrt{|\det g|}\, dx. \tag{1}$$

***Определение* 1.** Плотность (1) называется *римановым элементом объема* на (псевдо)римановом многообразии $\mathcal{X}$.

При $n = 2$ это уже известный нам элемент площади $\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ на поверхности (см. лекцию III. 3).

Если многообразие $\mathcal{X}$ ориентируемо и ориентировано, то — см. предложение 1 лекции III. 25 — от плотности dV можно перейти к соответствующей форме максимальной степени. Эта форма также называется *элементом объема* (иногда — *элементом ориентированного объема*) и обозначается прежним символом dV.

По определению

$$dV = \sqrt{|\det g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

в каждой положительно ориентированной карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$.

Дискриминантный тензор Коэффициенты формы dV составляют тензорное поле типа $(n, 0)$ на $\mathcal{X}$. Это поле называется *дискриминантным тензором* (псевдо)риманова многообразия $\mathcal{X}$. По традиции этот тензор обозначается символом e (употребляется также символ ε), а его компоненты — символом $e_{i_1 \ldots i_n}$ (или $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$). Таким образом, в каждой карте (U, h)

$$e_{i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} \varepsilon_\sigma e_{1 \ldots n}, & \text{если индексы } i_1, \ldots, i_n \text{ различны;} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{2}$$

где ε_σ — знак подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

и

$$e_{1 \ldots n} = \sqrt{|\det g|},$$

если карта (U, h) положительно ориентирована;

$$e_{1 \ldots n} = -\sqrt{|\det g|},$$

если ориентация этой карты отрицательна.

Например, при $n = 2$

$$\begin{Vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \pm\sqrt{EG - F^2} \\ \mp\sqrt{EG - F^2} & 0 \end{Vmatrix},$$

где знаки $\pm$ зависят от ориентации карты.

Формула Фосса — Вейля С дискриминантным тензором тесно связана линейная дифференциальная форма

$$\gamma = \Gamma^i_{ik}\, dx^k \tag{3}$$

(см. лекцию 2).

Предложение 1. *Имеет место формула*

$$\gamma = d \ln \sqrt{|\det g|}. \tag{4}$$

Доказательство. Из формулы (5′) лекции 11 следует, что

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} g^{ip} \left(\frac{\partial g_{pi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^p} \right) = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k},$$

т. е.

$$\gamma = \frac{1}{2} g^{ij} dg_{ij} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(g^{-1} dg),$$

где g — матрица $\|g_{ij}\|$. С другой стороны, по правилам матричного исчисления

$$d \ln \sqrt{|\det g|} = \frac{1}{2} d \ln |\det g| = \frac{1}{2} d \ln e^{\operatorname{Tr} \ln g} = \frac{1}{2} d \operatorname{Tr} \ln g = $$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(d \ln g) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(g^{-1} dg);$$

см., в частности, формулы (6) и (12) лекции III.11. □

Формула (4) известна как **формула Фосса — Вейля**.

Следствие 1. *Дискриминантный тензор ковариантно постоянен:*

$$\nabla_X e = 0$$

для любого векторного поля X на $\mathcal{X}$.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$(\nabla_j e)_{i_1 \dots i_n} = 0$$

для любых индексов j и $i_1, \dots, i_n$. Поскольку, согласно общим правилам ковариантного дифференцирования (см. формулу (5) лекции 2),

$$(\nabla_j e)_{i_1 \dots i_n} = \frac{\partial e_{i_1 \dots i_n}}{\partial x^j} - \sum_{s=1}^{n} \Gamma^p_{j i_s} e_{i_1 \dots i_{s-1} p\, i_{s+1} \dots i_n}, \tag{5}$$

для этого нужно показать, что для любых индексов j и $i_1, \ldots, i_n$ равна нулю правая часть этой формулы.

Случай 1. Среди индексов $i_1, \ldots, i_n$ есть одинаковые. Если существует более двух одинаковых индексов $i_1, \ldots, i_n$, то правая часть формулы (5) очевидным образом равна нулю. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что среди индексов $i_1, \ldots, i_n$ имеется два и только два одинаковых индекса и, значит, в ряду $1, \ldots, n$ имеется один и только один индекс, отличный от всех индексов $i_1, \ldots, i_n$. При этом если $i_a = i_b$ и $k \neq i_1, \ldots, i_n$, то правая часть формулы (5) будет равна

$$\Gamma^k_{ji_a} e_{i_1 \ldots i_{a-1} k i_{a+1} \ldots i_n} + \Gamma^k_{ji_b} e_{i_1 \ldots i_{b-1} k i_{b+1} \ldots i_n}$$

(суммирование по k не производится!), т. е. с точностью до множителя $\Gamma^k_{ji_a} = \Gamma^k_{ji_b}$ будет равна $(\varepsilon_\sigma + \varepsilon_\tau) e_{1 \ldots n}$, где ε_σ и ε_τ — знаки подстановок

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n \\ i_1 \ldots i_{a-1}\; k\; i_{a+1} \ldots i_n \end{pmatrix},$$

и

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n \\ i_1 \ldots i_{b-1}\; k\; i_{b+1} \ldots i_n \end{pmatrix}.$$

Но так как эти подстановки отличаются, как легко видеть, на транспозицию (ik), где $i = i_a = i_b$, то $\varepsilon_\tau = -\varepsilon_\sigma$. Поэтому в рассматриваемом случае правая часть формулы (5) равна нулю.

Случай 2. Все индексы $i_1, \ldots, i_n$ различны. Тогда в каждой сумме $\Gamma^p_{ji_s} e_{i_1 \ldots i_{s-1} p i_{s+1} \ldots i_n}$ будет отлично от нуля только одно слагаемое (отвечающее индексу $p = i_s$). Поэтому правая часть формулы (5) будет в этом случае равна

$$\frac{\partial e_{i_1 \ldots i_n}}{\partial x^j} - \sum_{s=1}^{n} \Gamma^{i_s}_{ji_s} e_{1 \ldots i_s \ldots n} = \frac{\partial e_{i_1 \ldots i_n}}{\partial x^j} - \Gamma^i_{ji} e_{1 \ldots n} =$$

$$= \varepsilon_\sigma \left[\frac{\partial \sqrt{|\det g|}}{\partial x^j} - \Gamma^i_{ji} \sqrt{|\det g|} \right],$$

где ε_σ — знак подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, согласно формуле Фосса — Вейля (4)

$$\Gamma^i_{ji} = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{|\det g|}$$

(напомним, что риманова связность по определению симметрична и, значит, $\Gamma^i_{ji} = \Gamma^i_{ij}$), и, значит, выражение в скобках равно нулю. □

Геометрически это следствие означает, что *параллельный перенос сохраняет риманов объем.* С этой точки зрения оно наглядно очевидно.

Случай $n=2$ При $n=2$ дискриминантный тензор часто используется для спуска и подъема индексов. Так, например, свертка тензора e с векторным полем даст линейную дифференциальную форму. Если поле имело компоненты $X^1 = X$, $X^2 = Y$, то форма будет иметь коэффициенты $\varepsilon Y, -\varepsilon X$, где для упрощения формул обозначено $\varepsilon = \sqrt{EG - F^2}$, т. е. будет иметь вид

$$\varepsilon Y\, du - \varepsilon X\, dv, \tag{6}$$

где u и v — локальные координаты. Конечно, это сопоставление полей формам отличается от сопоставления, осуществляемого метрическим тензором (см. лекцию 11), но подобно последнему перестановочно с ковариантными дифференцированиямн.

Иногда удобио комбинировать эти сопоставлеиия. Например, свернув форму (6) с метрическим тензором g^{ij}, мы снова получим векторное поле, но уже с компонентами

$$\frac{FX+GY}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad -\frac{EX+FY}{\varepsilon}. \tag{7}$$

[Здесь мы пользуемся стандартными в теории поверхностей обозначениями

$$g_{11} = E, \quad g_{12} = F, \quad g_{22} = G.$$

Напомним, что в этих обозначениях

$$g^{11} = \frac{G}{\varepsilon^2}, \quad g^{12} = -\frac{F}{\varepsilon^2}, \quad g^{22} = \frac{E}{\varepsilon^2}, \tag{8}$$

где $\varepsilon^2 = EG - F^2$.]

З а д а ч а 1. Покажите, что *поле* (7) *ортогонально (в каждой точке) исходному полю.* [У к а з а н и е. $g_{ij}X^i g^{jk} e_{kl} X^l = e_{il} X^i X^l = 0.$]

Подняв с помощью метрического тензора оба индекса дискриминантного тензора, мы получим тензор типа (0, 2) с компонентами

$$e^{ij} = g^{ik} g^{jl} e_{kl}. \tag{9}$$

Этот тензор также кососимметричен (ибо $e^{ji} = g^{jk} g^{il} e_{kl} = -g^{il} g^{jk} e_{lk} = -e^{ij}$), а его компонента e^{12} выражается формулой

$$e^{12} = g^{1k} g^{2l} e_{kl} = \varepsilon(g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21}) = \varepsilon \frac{1}{EG - F^2} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Поскольку

$$\begin{Vmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & -1/\varepsilon \\ 1/\varepsilon & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

это означает, что *матрица* $\|e^{ij}\|$ *обратна матрице* $-\|e_{ij}\|$. (Подобно тому как матрица $\|g^{ij}\|$ обратна матрице $\|g_{ij}\|$.)

Полезно также иметь в виду соотношение

$$g^{ij} e_{jk} = e^{ij} g_{jk}, \tag{10}$$

означающее, что для матриц $g = \|g_{ij}\|$ и $e = \|e_{ij}\|$ выполнены тождества

$$g^{-1} e = -e^{-1} g.$$

Проще всего соотношение (10) проверяется непосредственным вычислением:

$$e^{ij} g_{jk} = g^{ip} g^{jq} g_{jk} e_{pq} = g^{ip} e_{pk} = g^{ij} e_{jk}.$$

В обозначениях Гаусса оно имеет вид

$$\begin{Vmatrix} G/\varepsilon^2 & -F/\varepsilon^2 \\ -F/\varepsilon^2 & E/\varepsilon^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1/\varepsilon \\ -1/\varepsilon & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} E & F \\ F & G \end{Vmatrix}$$

и также проверяется непосредственным вычислением.

Оператор Лапласа в римановом пространстве

Пусть снова $n \geqslant 2$. По определению (см. формулу (1) лекции 11) для любой гладкой функции u на (псевдо)римановом пространстве $\mathcal{X}$ компоненты $(\operatorname{grad} u)^i$ ее градиента $\operatorname{grad} u$ в каждой карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ многообразия $\mathcal{X}$ выражаются формулами

$$(\operatorname{grad} u)^i = g^{ik}\frac{\partial u}{\partial x^k}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Задача 2. Покажите, что инвариантным образом поле $\operatorname{grad} u$ характеризуется соотношением

$$Xu = (X, \operatorname{grad} u),$$

которое должно быть выполнено для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$.

Так как операция ∇_X ковариантного дифференцирования $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейна по X, то компоненты

$$(\nabla_k \operatorname{grad} u)^i = \frac{\partial(\operatorname{grad} u)^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj}(\operatorname{grad} u)^j$$

частных ковариантных производных поля $\operatorname{grad} u$ являются компонентами тензорного поля типа $(1,1)$ на $\mathcal{X}$. Поэтому след

$$\Delta u = (\nabla_i \operatorname{grad} u)^i \tag{11}$$

этого тензорного поля является корректно определенной функцией на $\mathcal{X}$. Это означает, что формула (11) определяет некоторый — очевидно, линейный над $\mathbb{R}$ — оператор

$$\Delta\colon \mathsf{F}\mathcal{X} \to \mathsf{F}\mathcal{X}. \tag{12}$$

(Здесь существенно используется предположение о том, что многообразие $\mathcal{X}$ принадлежит классу C^∞. Для многообразий класса C^r, $r < \infty$, функции Δu будут, вообще говоря, функциями лишь класса C^{r-2}.)

В случае, когда $\mathcal{X}$ является евклидовым пространством, а $x^1, \ldots, x^n$ — прямоугольными координатами $x^1, \ldots, x^n$, функция Δu выражается формулой

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

т. е. оператор Δ является известным из анализа оператором Лапласа. На этом основании оператор (12) и в общем случае называется *оператором Лапласа* (впрочем, употребляется также название *оператор Бельтрами*; см. ниже), а функции $u \in \mathsf{F}\mathcal{X}$, для которых $\Delta u = 0$, называются *гармоническими* (по отношению к данной римановой метрике на $\mathcal{X}$).

По определению в каждой карте функция Δu выражается формулой

$$\Delta u = \frac{\partial(\operatorname{grad} u)^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ij}(\operatorname{grad} u)^j.$$

Но согласно формуле Фосса — Вейля (4)

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j}(\ln\sqrt{|\det g|}) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x^j},$$

где для сокращения формул, как и выше в случае $n = 2$, положено $\varepsilon = \sqrt{|\det g|}$. Поэтому

$$\Delta u = \frac{\partial(\operatorname{grad} u)^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x^j}(\operatorname{grad} u)^j = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x^i}(\varepsilon \operatorname{grad} u)^i,$$

т. е.

$$\Delta = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\varepsilon g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right). \tag{13}$$

При $n = 2$ (для поверхностей) оператор (13) в обозначениях Гаусса выражается — см. равенства (8) — формулой

$$\Delta = \frac{\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{G\frac{\partial}{\partial u} - F\frac{\partial}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{-F\frac{\partial}{\partial u} + E\frac{\partial}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{14}$$

(как всегда в теории поверхностей, символы u и v обозначают здесь локальные координаты).

Эта формула была впервые получена Бельтрами, который обозначил результат применения оператора (14) к функции f через $\Delta_2 f$ и назвал его в т о р ы м д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы м п а р а м е т р о м этой функции. (Первый дифференциальный параметр Бельтрами $\Delta_1 f$ является не чем иным, как скалярным квадратом $(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)$ градиента; см. лекцию III.3.) Этот термин (вместе с обозначением $\Delta_2 f$) некоторые авторы употребляют до сих пор.

Формулы Грина

З а д а ч а 3. Пусть — в предположении, что многообразие $\mathcal{X}$ ориентировано — оператор $\operatorname{div}\colon \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathsf{F}\mathcal{X}$ определен формулой

$$(\operatorname{div} X)\omega = \mathfrak{L}_X\omega, \qquad X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}, \tag{15}$$

где ω — риманов элемент объема dV, а $\mathfrak{L}_X\omega$ — его производная Ли по X (см. лекцию III.17). Покажите, что на каждой координатной окрестности

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x^i}(\varepsilon X^i),$$

и, значит, в частности,

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u, \tag{16}$$

как и в элементарном анализе (см. лекцию III.28).

Требование ориентируемости многообразия $\mathcal{X}$ здесь на самом деле излишне.

Задача 4. Пусть $\nabla_\bullet X$ — линейный оператор $\mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}$, определенный формулой $Y \mapsto \nabla_Y X$, и пусть $\operatorname{Tr}\nabla_\bullet X$ — его след. Покажите, что:

а *если многообразие $\mathcal{X}$ ориентируемо, то*

$$\operatorname{div} X = \operatorname{Tr}\nabla_\bullet X \quad \textit{для любого поля } X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}; \tag{17}$$

б *если принять* (17) *за определение оператора* div, *то формула* (16) *сохранится.*

В силу формулы (7) лекции III.19 формулу (15) можно переписать в следующем виде:

$$(\operatorname{div} X)\,\omega = d\,(X \lrcorner\, \omega).$$

Поэтому если многообразие $\mathcal{X}$ компактно, то

$$\int\limits_{\mathcal{X}} \operatorname{div} X\, dV = 0 \tag{18}$$

для любого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ (мы снова обозначаем форму объема символом dV) и, в частности,

$$\int\limits_{\mathcal{X}} \Delta u\, dV = 0. \tag{18'}$$

[Это обобщение первой формулы Грина (см. формулу (22) лекции III.28) или, точнее, ее частного случая, получающегося при $\partial D = 0$. На этом основании формула (18′) (а иногда и формула (18)) называется обычно формулой Грина.]

Задача 5. Докажите, что *для любой функции $u \in \mathsf{F}\mathcal{X}$ имеет место формула*

$$\Delta u^2 = 2u \cdot \Delta u + 2|\operatorname{grad} u|^2.$$

В силу формулы Грина (18′) отсюда следует, что при $\Delta u = 0$

$$\int_{\mathcal{X}} |\operatorname{grad} u|^2 dV = 0,$$

и потому $\operatorname{grad} u = 0$, т. е. $u = \mathrm{const}$. Таким образом, *на компактном ориентируемом многообразии $\mathcal{X}$ не существует гармонических функций, отличных от констант.*

Задача 6. Докажите, что это верно и для неориентируемого многообразия $\mathcal{X}$. [Указание. Перейдите к двулистно накрывающему ориентируемому многообразию; см. предложение 1 лекции IV.9.]

Существование гармонических функций с отличным от нуля дифференциалом

Согласно формуле (13) для любой функции u имеет место равенство

$$\Delta u = g^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \ldots,$$

где многоточие обозначает члены, зависящие только от первых производных функции u. Поскольку для риманова пространства матрица $\|g^{ij}\|$ положительно определена, это по определению означает, что на римановом пространстве оператор Δ является линейным эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка.

Нам понадобится следующая лемма из теории эллиптических уравнений.

Лемма 1. *Пусть в окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^n$ задан линейный эллиптический дифференциальный оператор*

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + c(x) \qquad (19)$$

второго порядка (с переменными коэффициентами).

Если $c \leqslant 0$, то в некоторой окрестности U точки 0 существует такая гладкая функция u, что $Lu = 0$ и $du \neq 0$ всюду на U.

Несмотря на то, что лемма 1, как мы увидим, имеет в теории поверхностей основополагающее значение, мне неизвестны учебники или монографии по дифференциальной геометрии или теории уравнений в частных производных, где бы она доказывалась (или хотя бы четко формулировалась). Конечно, эта лемма является непосредственным следствием теоремы о локальной разрешимости задачи Коши, но ссылка на эту теорему не очень удовлетворительна, поскольку задача Коши для эллиптических уравнений обычно считается плохо поставленной (хотя бы потому, что ее решение заведомо не единственно) и теорема о ее локальной разрешимости излагается только в некоторых особо полных — или нестандартно ориентированных — монографиях (см., например, Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966, с. 237) и во всяком случае не включается в обязательный университетский курс. Поэтому мы дадим здесь доказательство леммы 1 (идея которого сообщена мне Е. М. Ландисом), опирающееся лишь иа факты, о которых с определенной уверенностью можно полагать, что они известны каждому студенту-математику. (Главным образом мы имеем здесь в виду теорему о разрешимости задачи Дирихле и так называемую оценку Шаудера; см. ниже утверждения 1 и 2.)

Пусть k — целое неотрицательное число, $0 < \alpha < 1$, D — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ и $\overline{D}$ — ее замыкание. Линейное пространство k раз дифференцируемых в D функций $u\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$, все k-е частные производные которых удовлетворяют в D условию Гёльдера с показателем α, мы будем обозначать символом $C^{k+\alpha}(D)$. (О функциях из $C^{k+\alpha}(D)$ говорят обычно, что они в D принадлежат *классу* $C^{k+\alpha}$.) Известно, что относительно нормы

$$\|u\|_{C^{k+\alpha}(D)} = \sum_{\nu=0}^{k} (\operatorname{diam} D)^{\nu} \max_{\substack{p_1,\ldots,p_n,\\ p_1+\ldots+p_n=\nu}} \sup_{x\in D} \left| \frac{\partial^{\nu} u}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}}(x) \right| +$$
$$+ (\operatorname{diam} D)^{k+\alpha} \max_{\substack{p_1,\ldots,p_n,\\ p_1+\ldots+p_n=k}} \sup_{\substack{x,y\in D,\\ x\neq y}} \frac{\left| \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}}(x) - \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}}(y) \right|}{|x-y|^{\alpha}}$$

линеал $C^{k+\alpha}(D)$ является банаховым пространством.

Вместо $\|u\|_{C^{k+\alpha}(D)}$ мы, как правило, будем писать просто $\|u\|_{k+\alpha}$.

Пусть область D ограничена трижды дифференцируемой (класса C^3) гиперповерхностью ∂D, и пусть

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x^i} + c \tag{19'}$$

— эллиптический оператор с коэффициентами из $C^{\alpha}(D)$.

Утверждение 1 (оценка Шаудера). *Существует такая константа $C > 0$, что для любой функции $u \in C^{2+\alpha}(D)$ с $Lu \in C^{\alpha}(D)$ и $u|_{\partial D} = 0$ имеет место неравенство*

$$\|u\|_{2+\alpha} \leqslant C\|Lu\|_{\alpha}. \tag{20}$$

Константа C зависит только от области D, константы эллиптичности оператора L и максимума норм его коэффициентов в пространстве $C^{\alpha}(D)$.

Замечание 1. Собственно говоря, неравенство (20) является лишь частным случаем классической оценки Шаудера, относящимся к случаю, когда $u|_{\partial D} = 0$. Для наших целей этот частный случай вполне достаточен.

Замечание 2. Оценка Шаудера часто приводится (см., например, упомянутую выше книгу Берса, Джона и Шехтера, с. 244) в несколько ином виде, с заменой $\|Lu\|_{\alpha}$ на $\|Lu\|_{\alpha} + \|u\|_0$. Но можно показать (см., например, Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. — М.: Физматгиз, 1971, стр 272–273), что $\|u\|_0 \leqslant C_1\|Lu\|_{\alpha}$, где C_1 — некоторая константа, и поэтому эта оценка влечет за собой оценку (20).

Утверждение 2 (разрешимость задачи Дирихле). *Если $c \leqslant 0$ в D, то для любой функции $f \in C^{2+\alpha}(\partial D)$ существует такая функция $u \in C^{2+\alpha}(D)$, что*

$$Lu = 0 \quad \text{и} \quad u|_{\partial D} = f.$$

(По определению $f \in C^{2+\alpha}(\partial D)$, если в каждой карте гладкого многообразия ∂D функция f задается функциями класса $C^{2+\alpha}$.)

Пусть теперь, как всегда, $\overline{\mathbb{B}}_r$ — шар $\|x\| \leqslant r$ пространства $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в точке 0, $\mathbb{B}_r$ — его внутренность $\|x\| < r$, а $\mathbb{S}_r$ — ограничивающая его сфера. Пусть, далее, L — эллиптический оператор вида (19′), заданный в области D, содержащей точку 0, а r_0 — такое число, что шар $\overline{\mathbb{B}}_{r_0}$ (а потому и каждый шар $\mathbb{B}_r$, $0 < r \leqslant r_0$) содержится в D.

Ограничив коэффициенты оператора L на $\mathbb{B}_r$, $0 < r \leqslant r_0$, мы получим — очевидно, также эллиптический — оператор с коэффициентами из $C^{\alpha}(\mathbb{B}_r)$. Допуская определенную вольность, мы будем обозначать этот оператор прежним символом L.

Лемма 2. *Существует такая константа $C > 0$, зависящая только от оператора L и числа r_0, что для любого r, $0 < r \leqslant r_0$, и любой функции $w \in C^{2+\alpha}(\mathbb{B}_r)$ с $w|_{\mathbb{S}_r} = 0$ имеет место неравенство*

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x_1}\right| < Cr^2\|Lw\|_{\alpha} \qquad \text{на} \quad \overline{\mathbb{B}}_r.$$

Доказательство. Пусть $h\colon \overline{\mathbb{B}}_r \to \overline{\mathbb{B}}_1$ — гомотетия $x \mapsto x/r$. Эта гомотетия переводит оператор L в оператор $\widehat{L} = (h^*)^{-1} \circ L \circ h^*$, действующий на $C^{2+\alpha}(\overline{\mathbb{B}}_1)$, где h^* сопоставляет функции v на $\mathbb{B}_1$ функцию $h^*v\colon x \mapsto v(x/r)$ на $\mathbb{B}_r$. Очевидное вычисление показывает, что оператор $L_1 = r^2\widehat{L}$

на $C^{2+\alpha}(\mathbb{B}_1)$ задается формулой

$$L_1 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(rx)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + r\sum_{i=1}^{n} b_i(rx)\frac{\partial}{\partial x^i} + r^2 c(rx).$$

Если $v = (h^*)^{-1}w$ и $f = (h^*)^{-1}(Lw)$, то $L_1 v = r^2 f$, и, значит, согласно оценке Шаудера (примененной к оператору L_1 в области $\mathbb{B}_1$)

$$\|v\|_{2+\alpha} \leqslant Cr^2\|f\|_\alpha \qquad \text{на} \quad \mathbb{B}_1,$$

где C зависит только от оператора L на $\mathbb{B}_1$ и числа r_0. (Заметим, что $v|_{\mathbf{S}_1} = 0$ тогда и только тогда, когда $w|_{\mathbf{S}_r} = 0$.) Поскольку отображение h^* очевидным образом сохраняет нормы $\|\cdot\|_{k+\alpha}$, это доказывает, что в условиях леммы 2 имеет место неравенство

$$\|w\|_{2+\alpha} \leqslant Cr^2\|Lw\|_\alpha \qquad \text{на} \quad \mathbb{B}_r.$$

Для завершения доказательства леммы 2 остается заметить, что $\left|\dfrac{\partial w}{\partial x_1}\right| \leqslant$ $\leqslant \|w\|_{2+\alpha}$ на $\mathbb{B}_r$. □

Доказательство леммы 1. Поскольку оператор (19) имеет вид (19′) с $c \leqslant 0$, к нему применимы утверждение 2 и лемма 2. Пусть, как и выше, r_0 — такое число, что оператор L определен на $\mathbb{B}_{r_0}$. Согласно утверждению 2 для любого r, $0 < r \leqslant r_0$, существует на $\overline{\mathbb{B}}_r$ такая функция u, что $Lu = 0$ в $\mathbb{B}_r$ и $u = -x_1$ на $\mathbf{S}_r$.

Пусть $w = u + x_1$. Тогда

$$Lw = Lu + Lx_1 = Lu + b_1 + cx_1 = f \qquad \text{на} \quad \mathbb{B}_r,$$

где $f = b_1 + cx_1$, и $w = 0$ на $\mathbf{S}_r$. Поэтому согласно лемме 2

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x_1}\right| < C_1 r^2 \qquad \text{на} \quad \mathbb{B}_r,$$

где

$$C_1 = C \cdot \max_r \|f\|_{C^\alpha(\mathbb{B}_r)}$$

не зависит от r. Поскольку

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + 1,$$

это доказывает, что при достаточно малом r функция $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ (а значит, и форма du) всюду в $\mathbb{B}_r$ отлична от нуля. □

Следствие 1. *Для любой точки p_0 риманова пространства $\mathcal{X}$ существуют такая ее окрестность U и такая гармоническая в U функция u, что $du \neq 0$ всюду на U.*

Доказательство. Оператор (14) имеет вид (19) с $c = 0$. □

Только это следствие нам и будет нужно.

Сопряженные гармонические функции

При $n = 2$ дифференциал $d\omega$ произвольной линейной дифференциальной формы $\omega = c_1 dx^1 + c_2 dx^2$ на координатной окрестности U (мы сейчас отступаем от обыкновения обозначать локальные координаты на поверхности буквами u и v) выражается формулой

$$d\omega = \left(\frac{\partial c_2}{\partial x^1} - \frac{\partial c_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 = (\nabla_1 c_2 - \nabla_2 c_1)\, dx^1 \wedge dx^2,$$

где (см. формулу (10) лекции IV.12)

$$\nabla_j c_i = \frac{\partial c_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ji} c_k, \qquad i, j = 1, 2,$$

(поскольку $\Gamma^k_{12} = \Gamma^k_{21}$, члены, содержащие Γ^k_{ji}, сокращаются). Поэтому *форма ω тогда и только тогда замкнута, когда $\nabla_1 c_2 = \nabla_2 c_1$, т. е. когда*

$$e^{ij} \nabla_j c_i = 0. \tag{21}$$

Имея это в виду, рассмотрим дифференциальную форму ω_u, являющуюся результатом свертывания дискриминантного тензора с векторным полем $\operatorname{grad} u$, где u — произвольная гладкая функция на U. Для этой формы $c_i = e_{ik} (\operatorname{grad} u)^k$, и, значит, ввиду ковариантного постоянства тензора e,

$$\nabla_j c_i = e_{ik} (\nabla_j \operatorname{grad} u)^k.$$

Следовательно,

$$e^{ij} \nabla_j c_i = e^{ij} e_{ik} (\nabla_j \operatorname{grad} u)^k = (\nabla_j \operatorname{grad} u)^j = \Delta u,$$

и потому *форма ω_u тогда и только тогда замкнута, когда функция u гармонична.*

Но если форма ω_u замкнута, то согласно лемме Пуанкаре в любой круговой координатной окрестности U произвольной точки $p_0 \in \mathcal{X}$ она является точным дифференциалом, т. е. на U существует такая функция v, что $dv = \omega_u$ и, значит,

$$(\operatorname{grad} v)^i = g^{ij}\frac{\partial v}{\partial x^j} = g^{ij}e_{jk}(\operatorname{grad} u)^k.$$

Ввиду ковариантного постоянства тензоров g и e отсюда следует, что для функции Δv имеет место формула

$$\Delta v = (\nabla_i \operatorname{grad} v)^i = g^{ij}e_{jk}(\nabla_i \operatorname{grad} u)^k,$$

т. е. — см. соотношение (10) — формула

$$\Delta v = e^{ij}g_{jk}(\nabla_i \operatorname{grad} u)^k = e^{ij}(\nabla_i \nabla u)_j,$$

где ∇u — форма du, рассматриваемая как ковекторное поле (т. е. поле с компонентами $\dfrac{\partial u}{\partial x^j} = g_{jk}(\operatorname{grad} u)^k$), и

$$(\nabla_i \nabla u)_j = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ji}\frac{\partial u}{\partial x^k} \tag{22}$$

— компоненты i-й частной ковариантной производной поля ∇u. Поскольку — как показывает формула (22) — компоненты $(\nabla_i \nabla u)_j$ симметричны по i и j, а тензор e^{ij} кососимметричен, отсюда следует, что $\Delta v = 0$, т. е. *v также является гармонической функцией.* Она называется гармонической функцией, *сопряженной* с гармонической функцией u.

Заметим, что функция v определена только локально (в круговых координатных окрестностях) и лишь с точностью до постоянного слагаемого.

Задача 7. Докажите, что если $H^1\mathcal{X} = 0$ (см. лекцию III.20), то, распорядившись постоянными, можно локальные функции v выбрать так, чтобы они были ограничениями единой функции, определенной на всем многообразии $\mathcal{X}$. (В этом случае принято говорить, что сопряженная функция v определена глобально.)

Задача 8. Докажите, что *функция u сопряжена с функцией $-v$* (с точностью до знака отношение сопряженности гармонических функций взаимно).

Отметим, что

а *Градиенты функций u и v ортогональны:*

$$(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) = 0.$$

б *Длины этих градиентов одинаковы:*

$$(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u) = (\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} v).$$

Задача 9. Докажите эти утверждения.

В частиости, мы видим, что *если* $\operatorname{grad} u \neq 0$ *в окрестности* U, *то векторы* $\operatorname{grad} u$ *и* $\operatorname{grad} v$ *составляют в каждой точке* $p \in U$ *ортонормированный базис двумерного евклидова пространства* $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$.

С другой стороны, легко видеть (проверьте!), что якобиан функций u и v с точностью до множителя ϵ^2 равен определителю

$$\begin{vmatrix} (\operatorname{grad} u)^1 & (\operatorname{grad} u)^2 \\ (\operatorname{grad} v)^1 & (\operatorname{grad} v)^2 \end{vmatrix},$$

составленному из координат векторов $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{grad} v$. Поэтому если $\operatorname{grad} u \neq 0$ и, значит, векторы $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{grad} v$ составляют базис, то этот якобиан отличеи от нуля, и потому в некоторой окрестности точки p_0 — которую мы снова обозиачим через U — функции u и v будут локальиыми координатами.

Поскольку условию $\operatorname{grad} u \neq 0$ (которое равносильно, очевидно, условию $du \neq 0$) мы в силу следствия леммы 1 всегда можем удовлетворить (выбрав окрестность U достаточно малой), этим доказано, что *в окрестности каждой точки* $p_0 \in \mathcal{X}$ *существуют локальные координаты* u, v, *являющиеся сопряженными гармоническими функциями.*

Задача 10. Покажите, что *в этих координатах первая квадратичная форма поверхности имеет вид*

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2), \tag{23}$$

где $\lambda = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u)^{-1/2}$. [Указание. Воспользуйтесь свойствами **а** и **б**.]

Изотермические координаты

Определение 2. Локальные координаты u и v, в которых первая квадратичная форма поверхности имеет вид (23), называется *изотермическими координатами.*

Это название объясняется тем, что, как показывается в теории тепла, на термически изолированной нагретой поверхности, выполненной из материала с постоянной теплопроводностью, координатные линии $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ тогда и только тогда являются изотермами, когда первая квадратичная форма поверхности имеет вид (23).

Предложение 2. *В окрестности любой точки произвольной поверхности существуют изотермические координаты.*

Доказательство. Ими будут координаты, являющиеся сопряженными гармоническими функциями u и v. □

Пример 1. Географические координаты u и v на сфере трехмерного евклидова пространства не изотермичны (первая квадратичная форма сферы в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u\, dv^2;$$

см. формулу (36) лекции III.3). Чтобы получить изотермические координаты, надо, оставив неизменной долготу v, преобразовать широту u по формуле

$$u_1 = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Действительно, как показывает очевидное вычисление, в координатах u_1, v — которые мы снова обозначим через u, v — первая квадратичная форма сферы имеет вид

$$ds^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}(du^2 + dv^2),$$

т. е. вид (23) с $\lambda = \dfrac{1}{\operatorname{ch} u}$. Изотермичны и координаты

$$x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v,$$

поскольку в этих координатах

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2}(dx^2 + dy^2). \tag{24}$$

[Обратим внимание на то, что $x + iy = e^{u+iv}$.]

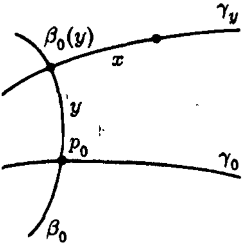
В изотермических координатах оператор Лапласа выражается формулой

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right),$$

которая лишь множителем отличается от формулы для оператора Лапласа в прямоугольных координатах на плоскости. Поэтому гармонические функции на поверхности — это в точности функции, выражающиеся в изотермических координатах обычными гармоническими функциями двух переменных. В частности, отсюда следует, что *локальные координаты u,v тогда и только тогда изотермичны, когда они являются гармоническими функциями (они автоматически окажутся сопряженными).*

Полудекартовы координаты В определенном отношении изотермические координаты аналогичны евклидовым координатам на плоскости. Другие координаты, аналогичные евклидовым, строятся следующим образом.

Пусть p_0 — произвольная точка поверхности $\mathcal{X}$, а u, v — локальные координаты, определенные в окрестности точки p_0 и равные нулю в p_0. Пусть, далее, β_0 — произвольная регулярная кривая на $\mathcal{X}$, проходящая через точку p_0. Параметр на кривой β_0 мы обозначим через y и будем считать, что точке p_0 отвечает значение $y = 0$. Для каждого y (для которого определена точка $\beta_0(y)$) мы обозначим через γ_y геодезическую, проходящую через точку $\beta_0(y)$ под прямым углом к кривой β_0.



(В частности, γ_0 — это геодезическая, проходящая через точку p_0 под прямым углом к кривой β_0.) Пусть x — натуральный параметр на геодезической γ_y, отсчитываемый от точки $\beta_0(y)$, и пусть

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{25}$$

— уравнения геодезической γ_y в локальных координатах u, v (числа x и y мы считаем по абсолютной величине достаточно малыми).

Так как $u = u(0, y)$ и $v = v(0, y)$ — это, очевидно, не что иное, как уравнения кривой β_0, то для любого y_0 частные производные $u_y(0, y_0), v_y(0, y_0)$ представляют собой компоненты касательного вектора к кривой β_0 в точке $\beta_0(y_0)$. В частности, компонентами этого вектора в точке p_0 являются числа $u_y(0,0), v_y(0,0)$.

С другой стороны, компонентами касательного вектора в точке p_0 к кривой γ_0 являются числа $u_x(0,0), v_x(0,0)$.

Поскольку эти два вектора в точке p_0 по условию ортогональны и, значит, линейно независимы, отсюда следует, что якобиан $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ функций (25) отличен от нуля в точке p_0 (а значит, и в некоторой окрестиости этой точки). Поэтому x и y являются вблизи точки p_0 локальными координатами на $\mathcal{X}$. Обозначив x и y снова через u и v, мы видим, что нами доказано следующее предложение.

Предложение 3. *В окрестности любой точки p_0 поверхности $\mathcal{X}$ существуют такие центрированные в p_0 локальные координаты u, v, что*

а *координатные линии* $v = \mathrm{const}$ (*отнесенные к параметру u*) *являются геодезическими;*

б *эти геодезические ортогональны координатной линии* $u = 0$;

в *на каждой геодезической* $v = \mathrm{const}$ *координата u является натуральным параметром.*

Эти координаты называются *полудекартовыми.*

Из условия **в** следует, что в полудекартовых координатах u, v коэффициент E первой квадратичной формы поверхности тождественно равен 1. Поэтому $E_v = 0$ и, значит (см. вторую из формул (3) лекции III.5),

$$F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u.$$

Задача 11. Покажите, что *условие* **а** *выполнено тогда и только тогда, когда* $\Gamma_{11}^1 = 0$ *и* $\Gamma_{11}^2 = 0$.

Мы видим, следовательно, что в координатах u, v имеет место тождественное равенство $F_u = 0$, откуда вытекает, что $F(u,v) = F(0,v)$ для любых u и v. Поскольку, с другой стороны, согласно условию **б**, $F(0,v) = 0$ для всех v, этим доказано, что $F = 0$ тождественно.

Таким образом, *в полудекартовых координатах u, v первая квадратичная форма поверхности имеет вид*

$$ds^2 = du^2 + G dv^2. \tag{26}$$

Замечание 3. В частности, мы видим, что *все линии* $u = \mathrm{const}$ *ортогонально пересекают геодезические* $v = \mathrm{const}$. Это утверждение, аналогичное лемме Гаусса из лекции 12, часто также называется леммой Гаусса.

Обратим внимание на то, что — в отличие от полугеодезических координат — *полудекартовы координаты* u, v *определены в точке* p_0.

Декартовы координаты В определенном отношении изотермические координаты аналогичны евклидовым координатам на плоскости. Другие координаты, аналогичные евклидовым, строятся следующим образом.

По построению координатная линия $u = 0$ может быть любой. В случае, когда эта линия является геодезической, а координата v является на этой линии натуральным параметром, полудекартовы координаты u, v называются *декартовыми координатами.*

Подчеркнем, что для декартовых координат линии $u = c$ при $c \neq 0$ геодезическими, вообще говоря, не являются.

Пример 2. Декартовыми координатами на сфере являются обычные географические координаты (u — широта, v — долгота). Линиями $v = \text{const}$ являются меридианы, а линией $u = 0$ — экватор. При $c \neq 0$ параллели $u = c$ геодезическими не являются.

Задача 12. Вычислите первую квадратичную форму плоскости Лобачевского в декартовых координатах. Выразите декартовы координаты на плоскости Лобачевского через бельтрамиевы координаты (см. лекцию II.12в).

Так как на линии $u = 0$ декартова координата v является натуральным параметром, то $G(0, v) = 1$ для любого v, а так как эта линия является геодезической, то $\Gamma^1_{22}(0, v) = 0$ и $\Gamma^2_{22}(0, v) = 0$ (ср. утверждение задачи 11). Поэтому (см. формулы (3) лекции III.5) $G_u(0, v) = 0$ (а также $G_v(0, v) = 0$). Мы видим, следовательно, что *для декартовых координат* u, v *имеют место равенства*

$$G(0, v) = 1, \quad G_u(0, v) = 0. \tag{27}$$

Утверждение о существовании локальных координат u, v, в которых первая квадратичная форма имеет вид (26) с коэффициентом G, обладающим свойствами (27), составляет содержание «леммы Гаусса» из лекции III.5. Тем самым мы можем теперь считать эту лемму доказанной.