ЛЕКЦИЯ 14

Конформные координаты. — Конформные структуры. — Минимальные поверхности. — Объяснение их названия. — Задача Плато. — Свободные релятивистские струны. — Простейшая задача вариационного исчисления для функций двух переменных. — Экстремали функционала площади. — Случай $n = 3$. — Представление иинимальных поверхностей с помощью голоморфных функций. — Формулы Вейерштрасса. — Присоединенные минимальные поверхности.

Конформные координаты Вещественные координаты u и v на поверхности $\mathcal{X}$ можно заменить одной комплексной координатой $w = u + iv$. В случае, когда координаты u и v изотермичны, мы будем называть координату w *конформной координатой* на поверхности. (Некоторые авторы применяют это название и к координатам u и v.)

Формула (23) лекции 13 означает, что в конформной координате линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2 = \lambda^2\, dw\, d\overline{w}; \tag{1}$$

иначе говоря,

$$ds = \lambda|dw|. \tag{2}$$

Пусть $z = x + iy$ и $w = u + iv$ — две конформные координаты (определениые соответственно в координатных окрестностях U и V). Тогда на пересечении $U \cap V$ будут иметь место равенства

$$dw = \frac{\partial w}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial \overline{z}}d\overline{z}, \quad d\overline{w} = \overline{\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}}dz + \overline{\frac{\partial w}{\partial z}}d\overline{z}$$

(мы пользуемся обозначениями, подробно объясненными в лекции III.12; заметим, что $\overline{dz} = d\overline{z}$ и $\overline{d\overline{z}} = dz$), а значит, и равенство

$$dw\,d\overline{w} = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\overline{\frac{\partial w}{\partial z}} + \frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\overline{\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}}\right)dz\,d\overline{z} + \frac{\partial w}{\partial z}\overline{\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}}dz^2 + \frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\overline{\frac{\partial w}{\partial z}}d\overline{z}^2.$$

Но так как обе координаты z и w конформны, и потому формы $dz\,d\overline{z}$ и $dw\,d\overline{w}$ пропорциональны, то это равенство возможно тогда, когда $\frac{\partial w}{\partial z}\overline{\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}} = 0$, т. е. когда либо $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, либо $\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0$ в каждой точке пересечения $U \cap V$.

Но легко видеть (проверьте!), что якобиан функций u, v по x, y выражается формулой

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial z} & \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} \\ \overline{\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}} & \overline{\dfrac{\partial w}{\partial z}} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right|^2. \tag{3}$$

Поэтому ни в одной точке из $U \cap V$ функции $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}$ в нуль одновременно не обращаются. Значит, множества нулей этих функций (являющиеся — в силу непрерывности — замкнутыми множествами в $U \cap V$) взаимно дополнительны (и потому открыты). Следовательно, если множество $U \cap V$ связно, то либо $\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$, либо $\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$ всюду на $U \cap V$. В первом случае функция перехода $w = w(z)$ голоморфна на $U \cap V$ и карты (U, z), (V, w) ориентированы согласованно, а во втором — функция $w = w(z)$ антиголоморфна и ориентации карт (U, z), (V, w) не согласованы.

Заметим, что функция $w = w(z)$ *тогда и только тогда антиголоморфна, когда функция* $w = w(\bar{z})$ *голоморфна.*

Конформные структуры

Все это мотивирует следующее определение, в котором $\mathcal{X}$ — произвольная поверхность, вообще говоря, римановой метрикой не снабженная.

***Определение* 1.** Комплексные карты (U, z) и (V, w) на поверхности $\mathcal{X}$ называются *конформно согласованными*, если на каждой компоненте множества $U \cap V$ (при $U \cap V \neq \emptyset$) одна координата (скажем, w) является либо голоморфной, либо антиголоморфной функцией другой координаты z. Атлас, состоящий из конформно согласованных карт, называется *конформным атласом*. О двух конформных атласах говорят, что они определяют на $\mathcal{X}$ одну и ту же *конформную структуру*.

Задача 1. Докажите, что *любой конформный атлас содержится в единственном максимальном конформном атласе.*

Поэтому конформные структуры можно отождествлять с максимальными конформными атласами.

Накрытие $\widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ (в частности, диффеоморфизм) поверхностей с конформной структурой называется *кон-*

формным, если в конформных атласах оно записывается голоморфными или антиголоморфными функциями.

Задача 2. Докажите, что

А. *Для любого гладкого накрытия $\widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ поверхности $\mathcal{X}$ с конформной структурой существует на поверхности $\widetilde{\mathcal{X}}$ единственная конформная структура, по отношению к которой накрытие конформно.*

Б. *Для любого конформного накрытия $\widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ группа* $\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{X}}$ *его автоморфизмов (скольжений) состоит из конформных диффеоморфизмов поверхности $\widetilde{\mathcal{X}}$.*

В. *Если в гладком накрытии $\widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ многообразие $\widetilde{\mathcal{X}}$ является поверхностью с конформной структурой, и если*

а *накрытие регулярно*;

б *его группа автоморфизмов состоит из конформных диффеоморфизмов,*

то на $\mathcal{X}$ существует единственная конформная структура, по отношению к которой накрытие конформно.

Ср. задачи 4, 5 и 6 лекции 3.

Задача 3. Докажите, что *любая изометрия поверхностей* (см. определение 6 лекции III.3) *задается в конформных координатах голоморфными или антиголоморфными функциями* (является по отношению к индуцированным на поверхностях конформным структурам конформным диффеоморфизмом).

Конечно, каждый комплексно аналитический атлас конформен (и обладает тем свойством, что любые две его карты положнтельно согласованы). Обратно, из формулы (3) непосредственно следует, что любой конформный атлас, состоящий из положительно согласованных карт, является комплексно аналитическим атласом. Поэтому *ориентированные поверхности с конформной структурой — это в точности одномерные комплексно аналитические (хаусдорфовы и паракомпактные) многообразия* (которые мы, пользуясь заимствованной из теории функций терминологией, будем называть *римановыми поверхностями*).

[Стоит, однако, заметить, что класс конформных отображений римановых поверхностей шире класса их комплексно аналитических изоморфизмов (он включает и диффеоморфизмы, задаваемые антиголоморфными функциями).]

В свете определения 1 предшествующие ему рассуждения доказывают следующее предложение.

Предложение 1. *Каждая риманова метрика на поверхности однозначно определяет на $\mathcal{X}$ некоторую конформную структуру (являющуюся для ориентируемой поверхности комплексно аналитической структурой).* □

Следствие 1. *На любой поверхности существует хотя бы одна конформная структура.* □

Следствие 2. *Каждая ориентируемая поверхность комплексифицируема (является овеществлением одномерного комплексно аналитического многообразия).* □

Этот последний факт мы уже отмечали в лекции IV.8.

Заметим, что риманова метрика на поверхности в формулировке следствий 1 и 2 никак не участвует. Она была нужна лишь для доказательства.

Минимальные поверхности Один из наиболее замечательных классов поверхностей — в теории которых изотермические (конформные) координаты играют решающую роль — вводится следующим определением.

Определение 2. Поверхность $\mathcal{X}$ в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ называется *минимальной поверхностью*, если ее средняя кривизна H тождественно равна нулю:

$$H = 0,$$

т. е. если в каждой ее точке главные кривизны k_1 и k_2 поверхности $\mathcal{X}$ отличаются лишь знаком:

$$k_2 = -k_1$$

(индикатриса Дюпена — в предположении, что $k_1 k_2 \neq 0$ — является равнобочной гиперболой).

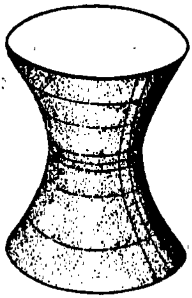
Рибокур называл минимальные поверхности *элласоидами*, но этот термин не привился.

Согласно проделанным в лекции III.4 вычислениям, примером минимальных поверхностей служит *катеноид*

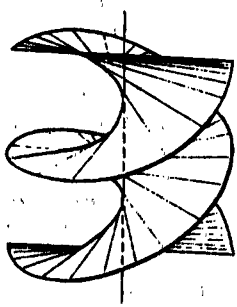
$$\boldsymbol{r}(u,v) = \operatorname{ch} v \cos u \cdot \boldsymbol{i} + \operatorname{ch} v \sin u \cdot \boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}, \tag{4}$$

а также *геликоид*

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \operatorname{sh} v \cos u \cdot \boldsymbol{i} + \operatorname{sh} v \sin u \cdot \boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}. \tag{5}$$



Катеноид



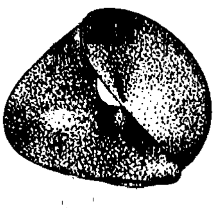
Геликоид

Другой пример доставляет нам так называемая *поверхность Эннепера*

$$\boldsymbol{r}(u,v) = u(3+3v^2-u^2)\boldsymbol{i} - v(3+3u^2-v^2)\boldsymbol{j} - 3(u^2-v^2)\boldsymbol{k}. \tag{6}$$

Задача 4. Докажите, что поверхность (6) минимальна.

Поверхность Эннепера имеет самопересечения, т. е. является погруженным двумерным многообразием (см. лекцию 3). Напротив, катеноид и геликоид (а также, конечно, и плоскость, тривиальным образом являющаяся минимальной поверхностью) представляют собой вложенные поверхности без самопересечений.



Поверхность Эннепера

Можно показать (см. ниже замечание 1), что ни одна полная минимальная поверхность не может содержаться в конечной части пространства $\mathbb{R}^3$ (и, в частности, не компактна). С топологической точки зрения простейшие некомпактные поверхности — это поверхности, получающиеся из компактных удалением конечного числа точек (проколов) или — что равносильно — непересекающихся кругов. Например, топологически плоскость, а также геликоид — это сфера (компактная поверхность) с одним проколом, а катеноид — это сфера с двумя проколами. Геометрически каждому проколу отвечает уходящий в бесконечность раструб поверхности. На катеноиде оба раструба отчетливо видны, но, например, единственный раструб геликоида настолько закручен, что едва ли заслуживает этого наименования. На техническом языке топологии уходящие в бесконечность раструбы поверхности называются ее *концами*. Таким образом, плоскость и геликоид имеют один конец, катеноид имеет их два.

Полной кривизной поверхности $\mathcal{X}$ называется интеграл по $\mathcal{X}$ от ее гауссовой кривизны K (ср. ниже лекцию 16). Для некомпактной поверхности эта кривизна вполне может быть бесконечна.

Задача 5. Докажите, что полная кривизна геликоида равна $-\infty$, а катеноида равна -4π.

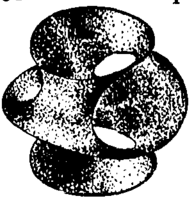
•

Полная кривизна плоскости равна, конечно, нулю.

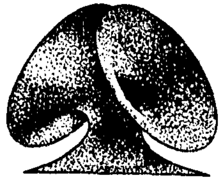
Вложенную полную поверхность, гомеоморфную компактной поверхности с конечным числом проколов и имеющую конечную полную кривизну, мы — для сокращения формулировок — будем называть *поверхностью конечного типа*.

Сравнительно давно было показано — хотя и затруднительно указать, кто сделал это первым, — что плоскость является единственной минимальной поверхностью конечного типа с одним концом. В 1982 г. Шен доказал аналогичный результат в отношении поверхностей конечного типа с двумя концами — единственной такой поверхностью является катеноид.

До 1984 г., кроме плоскости и катеноида, фактически не было известно никаких других минимальных поверхностей конечного типа. Решающий прорыв был сделан в 1984 г. молодыми американскими математиками Д. Хоффманом и У. Миксом, которые с существенным использованием компьютерной графики, в чем им помогал однофамилец Д. Хоффмана программист Дж. Хоффман, построили целую серию новых минимальных поверхностей конечного типа с тремя концами. Поверхности Хоффмана и Миикса отличаются красотой и симметричностью. Простейшая из



этих поверхностей, гомеоморфная тору с тремя отверстиями, изображена на рисунке слева. А на рисунке справа изображен так называемый *триноид* — минимальная поверхность



с самопересечениями, гомеоморфная сфере с тремя отверстиями. (Заметим, что реализовать сферу с тремя отверстиями в виде вложенной минимальной поверхности нельзя.)

Объяснение их названия Чтобы объяснить, почему поверхности с $H = 0$ называются минимальными, мы рассмотрим на классе P_C всех поверхностей $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^3$ с данным краем C *функционал площади*:

$$\text{поверхность } \mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad \text{ее площадь } \sigma\mathcal{X}.$$

Если поверхность $\mathcal{X}$ подвергается деформации, гладко (в понятном смысле) зависящей от параметра t и неподвижной на C, то ее площадь $\sigma\mathcal{X}$ (предполагаемая конечной) оказывается гладкой функцией от t. В случае, когда для любой деформации производная этой функции при значении параметра, отвечающем исходной поверхности $\mathcal{X}$, равна нулю, говорят — по очевидной аналогии с рассмотренным в лекции 12 функционалом длины, — что поверхность $\mathcal{X}$ является *экстремалью функционала площади в* P_C. В частности, поверхность $\mathcal{X}$ является экстремалью функционала площади, если среди всех близких поверхностей из P_C ее площадь минимальна.

Полная (без края) поверхность называется *экстремалью функционала площади*, если любая ее часть, ограниченная произвольной кусочно гладкой кривой C, является экстремалью этого функционала в P_C.

Так вот, оказывается — и ниже мы это покажем, — что *минимальные поверхности — это в точности экстремали функционала площади*. Это и объясняет их название (в XIX веке — когда оно было предложено — не очень беспокоились по поводу различия минимумов и экстремумов; кроме того, можно показать — мы этого делать не будем, — что каждая достаточно малая часть минимальной поверхности, ограниченная кусочно гладкой кривой, имеет наименьшую площадь среди всех поверхностей с тем же краем — подобно тому, как каждый достаточно малый отрезок геодезической является кратчайшей).

Чтобы подчеркнуть последнее обстоятельство, минимальные поверхности называются иногда *локально минимальными* поверхностями.

Задача Плато Согласно общему физическому принципу равновесия мыльная пленка, натянутая на контур, занимает под воздействием сил поверхностного натяжения положение, энергия которого не может быть уменьшена малыми вариациями. Поскольку эта энергия — как показывается в теории гибких эластичных пленок — пропорциональна площади, отсюда следует, что *мыльные пленки физически реализуют минимальные поверхности.*

Здесь имеются в виду поверхности с краем. Для поверхностей без края, разбивающих пространство на две области — внутреннюю и внешнюю, ситуация контролируется теоремой Пуассона, утверждающей, что граница раздела двух находящихся в равновесии сред является поверхностью постоянной средней кривизны $H = h\Delta p$, где h — коэффициент поверхностного натяжения, а Δp — разность давлений внутри и снаружи поверхности (для поверхности с краем, не разбивающей пространство, $\Delta p = 0$ и, значит, $H = 0$). Эта теорема объясняет, в частности, почему мыльные пузыри — когда они не очень велики и можно пренебрегать силой тяжести — имеют сферическую форму.

Впервые мыльные пленки изучал бельгийский физик Плато, в честь которого задача построения минимальных поверхностей с данным краем (а также ее многомерные аналоги) называется задачей Плато. Эта задача оказалась очень трудной и связанной с самыми рафинированными вопросами современной математики. Мы ею заниматься не будем.

Свободные релятивистские струны Минимальные поверхности — правда, не в пространстве $\mathbb{R}^3$ — неожиданным образом появляются также в теории элементарных частиц или, более точно, — в теории адронов.

По современным представлениям — убедительно подкрепленным экспериментальными данными — адроны состоят из кварков, связанных друг с другом глюонными полями Янга — Миллса. Чтобы объяснить так называемое невылетание кварков (отсутствие их в свободном состоянии), предполагается, что на малых расстояниях (порядка размера адрона) энергетически более выгодны конфигурации глюонных полей, не заполняющих — подобно классическим полям — все пространство, а концентрирующихся вдоль линий, соединяющих кварки. Тогда сила притяжения между кварками, независимо от расстояния между ними, будет — как можно показать — постоянной, и потому никакое внешнее воздействие не может развести кварки и породить свободный кварк. Наглядно можно представить себе, что кварки соединены тонкой трубкой глюонного поля, в пределе вырождающейся в линию — струну. Сами кварки также, по-видимому, полезно представлять себе в виде маленькой — возможно, заузленной — замкнутой трубки глюонного поля. На далеких расстояниях такие трубки ведут себя как невзаимодействующие частицы, но достаточно сближенные, они сплетаются в один адрон. [Представление о частицах как трубках поля очень старое. Еще в начале этого века электрон пытались рассматривать как кольцо, свитое из силовых линий электромагнитного поля. Эта точка зрения оказалась тупиковой и была отброшена. С кварками и глюонами дело обстоит — будем надеяться — иначе.]

В классическом релятивистском приближении мы, таким образом, приходим — отвлекаясь от полей и становясь на феноменологическую точку зрения — к задаче изучения динамики одномерно протяженных объектов — струн. В процессе своего движения струна заметает в четырехмерном пространстве-времени Минковского некоторую поверхность (ее «мировую линию»), которую мы и будем рассматривать как адекватный геометрический образ струны.

Конечно, не любая поверхность в пространстве Минковского будет в этом смысле струной. Для этого в первую очередь необходимо, чтобы в каждой точке поверхности касательная плоскость имела сигнатуру $(1,1)$, и, значит, чтобы в этой точке можно было говорить о времениподобных векторах (в направлении которых — в соответствующей системе отсчета — течет время) и о пространственноподобных векторах (задающих — в сечении — мгновенное положение струны). Если

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

— параметризация струны в окрестности некоторой точки, то это условие равносильно (докажите!) отрицательности определителя Грама

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_u^2 & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v & \boldsymbol{r}_v^2 \end{vmatrix} = EG - F^2.$$

Мы будем называть такие поверхности *поверхностями сигнатуры* $(1,1)$.

Задача 6. Докажите, что *элемент площади поверхности сигнатуры* $(1,1)$ *равен* $\sqrt{|EG-F^2|} = \sqrt{F^2 - EG}$. [Указание. О площади фигур на псевдоевклидовой плоскости см. лекцию II.12а.]

Локальные координаты u, v на поверхности сигнатуры $(1,1)$ называются *изотермическими*, если первая квадратичная форма поверхности имеет в этих координатах вид

$$ds^2 = \lambda(du^2 - dv^2), \qquad \lambda > 0.$$

Ср. определение 2 лекции 13.

Задача 7. *Докажите, что в окрестности произвольной точки поверхности сигнатуры* $(1,1)$ *существуют изотермические координаты.*

В физике изотермические координаты называются ортонормированной калибровкой. Таким образом, ортонормированная калибровка струны (поверхности сигнатуры $(1,1)$) характеризуется равенствами

$$\boldsymbol{r}_u^2 + \boldsymbol{r}_v^2 = 0, \quad \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = 0$$

или — что равносильно — равенствами

$$(\boldsymbol{r}_u + \boldsymbol{r}_v)^2 = 0.$$

Определенные условия накладывает также и динамика струны.

Вообще говоря, уравнения движения механической системы определяются из соответствующего вариационного принципа, т. е. (см. лекцию 11) представляют собой экстремали отвечающего этой системе лагранжиана. Например, лагранжианом свободной (не подверженной никаким внешним воздействиям) материальной точки служит длина касательного вектора, и, соответственно этому, траекторией такой частицы является геодезическая, т. е. в пустом (плоском) пространстве — прямая. Представляя себе струну, состоящую из материальных точек, взаимодействие между которыми не вносит никакого вклада в действие (в частности, это означает отсутствие обычных сил упругости; представление с позиций классической физики абсурдное, но для глюонных струн, по-видимому, оправданное), мы — как нетрудно понять — получим отсюда в качестве лагранжиана струны не длину, а площадь, т. е. придем к уже известному нам функционалу площади. Поэтому *с математической точки зрения свободная релятивистская струна — это не что иное, как минимальная поверхность сигнатуры* $(1,1)$ *в пространстве Минковского.*

Простейшая задача вариационного исчисления для функций двух переменных

Решению задачи об экстремалях функционала площади мы предпошлем общее обсуждение многомерных вариационных задач (подобно тому, как это мы сделали в лекции 11 в отношении функционала длины). Для простоты мы ограничимся двумерными задачами первого порядка в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть L — произвольная гладкая функция на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{3n}$ (которую мы в дальнейшем будем называть *лагранжианом*). Точки пространства $\mathbb{R}^{3n}$ мы отождествим с тройками вида $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)$, где $\boldsymbol{r} = (x^1, \ldots, x^n)$, $\boldsymbol{r}_u = (x_u^1, \ldots, x_u^n)$, $\boldsymbol{r}_v = (x_v^1, \ldots, x_v^n)$ — произвольные векторы пространства $\mathbb{R}^3$ (вопреки обозначению, никак друг с другом не связанные).

Пусть, далее, W — произвольное открытое множество плоскости $\mathbb{R}^2$ (удобно считать это множество выпуклым и ограниченным кусочно гладкой линией; в принципе эти условия излишни, но без них формулировки и доказательства, вообще говоря, усложняются без особой на то нужды).

Параметризацией мы будем называть произвольное гладкое отображение $\boldsymbol{r}\colon W \to \mathbb{R}^n$, т. е. гладкую вектор-функцию

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v), \quad \boldsymbol{r}(u, v) \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

точки $(u, v) \in W$ (Ср. определение 1 лекции III.3; условий регулярности и мономорфности мы теперь не налагаем.)

Каждая параметризация (7) определяет по формулам

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v), \quad \boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v), \quad \boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) \tag{8}$$

гладкое отображение $W \to \mathbb{R}^{3n}$ и, значит, при заданном лагранжиане $L = L(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)$, — функцию

$$(u, v) \mapsto L(\boldsymbol{r}(u, v), \boldsymbol{r}_u(u, v), \boldsymbol{r}_v(u, v))$$

на области W. Пусть

$$S = \iint\limits_W L du dv \tag{9}$$

— интеграл от этой функции по области W (или — что то же самое — по ее замыканию $\overline{W}$).

Поступая так же, как в лекции 11, мы введем в рассмотрение произвольное гладкое отображение η: $W \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\eta}(u, v) = (\eta^1(u, v), \ldots, \eta^n(u, v))$, равное нулю на границе ∂W области W, и параметризацию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\varepsilon(u, v)$, определенную формулой

$$\boldsymbol{r}_\varepsilon(u, v) = \boldsymbol{r}(u, v) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(u, v), \qquad |\varepsilon| < \varepsilon_0. \tag{10}$$

Интеграл (9) для параметризации (10) является гладкой функцией от ε, и потому можно говорить о его производной $S'(0)$ в точке $\varepsilon = 0$.

По правилу дифференцирования интегралов по параметру

$$S'(0) = \iint\limits_W \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \boldsymbol{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_u} \boldsymbol{\eta}_u + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_v} \boldsymbol{\eta}_v \right) du dv,$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \left(\frac{\partial L}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x^n} \right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_u} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_u^1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_u^n} \right), \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_v} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_v^1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_v^n} \right),$$

$$\boldsymbol{\eta}_u = \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial \eta^n}{\partial u} \right), \quad \boldsymbol{\eta}_v = \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial v}, \ldots, \frac{\partial \eta^n}{\partial v} \right)$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \boldsymbol{\eta} = \frac{\partial L}{\partial x^i} \eta^i, \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_u} \boldsymbol{\eta}_u = \frac{\partial L}{\partial x_u^i} \frac{\partial \eta^i}{\partial u}, \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_v} \boldsymbol{\eta}_v = \frac{\partial L}{\partial x_v^i} \frac{\partial \eta^i}{\partial v}$$

— скалярные произведения этих векторов. Но

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_u} \boldsymbol{\eta}_u = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_u} \boldsymbol{\eta} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_u} \right) \boldsymbol{\eta},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_v} \boldsymbol{\eta}_v = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_v} \boldsymbol{\eta} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_v} \right) \boldsymbol{\eta},$$

и потому, согласно формуле Грина (см. формулу (7) лекции III.27),

$$S'(0) = \iint\limits_W \left[\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_v}\right)\right]\eta\, du\, dv + \\ + \oint\limits_{\partial W}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_v}\eta\, du - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_u}\eta\, dv\right).$$

Поскольку $\eta = 0$ на ∂W, интеграл по ∂W равен нулю, и, значит,

$$S'(0) = \iint\limits_W \left[\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_v}\right)\right]\eta\, du\, dv.$$

Задача 8. **Выведите из этой формулы, что** $S'(0) = 0$ для **всех** η **тогда и только тогда, когда**

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_v}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{11}$$

[Указание. Докажите аналог леммы 1 лекции 11.]

Векторное дифференциальное уравнение (11) называется *уравнением Эйлера — Остроградского*.

***Определение* 3**. Параметризация (7), удовлетворяющая уравнению (11), называется *экстремалью лагранжиана* L (или интеграла (9)).

Ср. определение 4 лекции 11.

Таким образом, в частности, *каждая параметризация* (7), *доставляющая минимум интегралу* (9) *в классе всех параметризаций, совпадающих друг с другом на* ∂W, *является экстремалью лагранжиана* L.

Пример 1 (Интеграл Дирихле). Пусть

$$L = \frac{E+G}{2}, \quad \text{где } E = \boldsymbol{r}_u^2,\ G = \boldsymbol{r}_v^2.$$

(Соответствующий интеграл

$$\frac{1}{2}\iint\limits_W (E+G)\, du\, dv \tag{12}$$

называется *интегралом Дирихле.*) В этом случае

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_u} = \mathbf{r}_u, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_v} = \mathbf{r}_v, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

и уравнение (11) имеет вид

$$\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 0, \tag{13}$$

означающий, что *все компоненты $x^i(u,v)$ параметризации $\mathbf{r}(u,v)$ являются гармоническими функциями.*

Называя параметризацию, удовлетворяющую уравнению (13), *гармонической*, мы, таким образом, получаем, что *экстремали интеграла Дирихле — это в точности гармонические параметризации.*

Экстремали функционала площади

Рассмотрим теперь интересующий нас в первую очередь функционал площади

$$\iint \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \tag{14}$$

являющийся интегралом вида (9) с лагранжианом $L = \sqrt{EG - F^2}$, где E и G — те же, что и выше, а $F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v$.

Интеграл (14) не меняется при переходе к эквивалентной (см. лекцию III.3) параметризации. (Лагранжиан L задает на W плотность; см. пример 2 лекции III.24.) Поэтому (ср. в лекции 12 случай лагранжиана длины) необходимо наложить на рассматриваемые параметризации дополнительное условие.

Определение 4. Параметризация (7) называется *изотермической*, если $E = G$ и $F = 0$.

Ср. определение 2 лекции 13.

Для изотермической параметризации интеграл (14) совпадает с интегралом Дирихле (12), и, значит, изотермическая параметризация тогда и только тогда служит экстремалью лагранжиана площади $\sqrt{EG - F^2}$, когда она является экстремалью интеграла Дирихле, т. е. представляет собой гармоническую параметризацию.

Таким образом, *экстремали лагранжиана площади — это в точности гармонические и одновременно изотермические параметризации* (и все параметризации, им эквивалентные).

Чтобы применить этот результат к поверхностям, мы для любой поверхности $\mathcal{X}$ пространства $\mathbb{R}^n$ (вообще говоря, с самопересечениями) введем в рассмотрение гладкое отображение $i\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$, осуществляющее погружение поверхности $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой карты (U, h) на $\mathcal{X}$ (для которой множество $W = h(U)$ представляет собой выпуклую область с кусочно гладкой границей) отображение $i \circ h^{-1}$, являющееся в силу наших определений некоторой параметризацией $\boldsymbol{r}\colon W \to \mathbb{R}^n$, будет тем, что обычно называется *параметризацией поверхности $\mathcal{X}$ в окрестности U*. Утверждение, что эта параметризация изотермична, в точности означает, что изотермична карта (U, h) (т. е. изотермичны локальные координаты u, v этой карты), а утверждение, что эта параметризация гармонична, — что отображение i записывается в карте (U, h) гармоническими функциями, т. е. — ввиду изотермичности координат u и v — функциями, гармоническими в U по отношению к римановой метрике на $\mathcal{X}$.

С другой стороны, ясно, что поверхности, являющиеся экстремалями функционала площади в введенном выше смысле, — это в точности поверхности, параметризации которых являются экстремалями лагранжиана площади $\sqrt{EG - F^2}$. Следовательно, *экстремали функционала площади — это в точности поверхности $\mathcal{X}$, погружение $\mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ которых задается гармоническими на $\mathcal{X}$ функциями*, т. е., на менее инвариантном языке, — поверхности, локально задающиеся такими вектор-функциями

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v),$$

что

$$\boldsymbol{r}_u^2 = \boldsymbol{r}_v^2, \quad \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = 0, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{r}_{uu} + \boldsymbol{r}_{vv} = 0. \tag{16}$$

Условие (15) обеспечивает изотермичность, а условие (16) — в присутствии условия (15) — гармоничность.

Задача 9. Покажите, что для поверхности сигнатуры $(1,1)$ в пространстве Минковского условие минимальности в изотермических координатах имеет вид

$$\boldsymbol{r}_{uu} = \boldsymbol{r}_{vv}. \tag{16$'$}$$

С точки зрения физики (16$'$) есть уравнение движения струны в ортонормальной калибровке.

Подчеркнем, что в отличие от уравнения (16), являющегося уравнением эллиптического типа, уравнение (16′) представляет собой уравнение гиперболического типа. Это определяет принципиальное различие в поведении струн (минимальных поверхностей пространства Минковского) и минимальных поверхностей евклидова пространства. Например, как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение уравнения (16′) имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(u+v) + \boldsymbol{f}(u-v),$$

где $\boldsymbol{f}$ — произвольная — даже не гладкая, если допустить к рассмотрению обобщенные производные — функция, тогда как решения уравнения (16), являясь гармоническими функциями, необходимо вещественно аналитичны.

Случай $n = 3$

Пусть теперь $n = 3$. В изотермических координатах известная формула для средней кривизны

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}$$

(см. лекцию III.4, стр. 79) приобретает вид

$$H = \frac{1}{2}\frac{L+N}{E},$$

где $L = \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n}$ и $N = \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n}$. Поскольку вектор $\boldsymbol{n}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$, это доказывает, что *в изотермических координатах равенство $H = 0$ равносильно соотношению*

$$(\boldsymbol{r}_{uu} + \boldsymbol{r}_{vv})\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = 0. \tag{17}$$

Но продифференцировав соотношения (15), характеризующие изотермические координаты, по u и v, мы получим, что

$$\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_{uu} = \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{uv}, \quad \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v + \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_{uv} = 0,$$
$$\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_{uv} = \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{vv}, \quad \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v + \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_{vv} = 0,$$

и, значит, — что

$$(\boldsymbol{r}_{uu} + \boldsymbol{r}_{vv})\boldsymbol{r}_u = 0, \quad (\boldsymbol{r}_{uu} + \boldsymbol{r}_{vv})\boldsymbol{r}_v = 0,$$

т. е. что вектор $\boldsymbol{r}_{uu} + \boldsymbol{r}_{vv}$ ортогонален обоим векторам $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$. Поэтому этот вектор коллинеарен (отличному от нуля!) вектору $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$, и, следовательно, *равенство* (17) *возможно* *только тогда, когда вектор* $\boldsymbol{r}_{uu} + \boldsymbol{r}_{vv}$ *равен нулю*, т. е. когда изотермическая параметризация $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ поверхности гармонична.

Этим и доказано высказанное выше утверждение о совпадении класса минимальных в смысле определения 2 поверхностей в $\mathbb{R}^3$ с поверхностями, являющимися экстремалями функционала площади.

На этом основании мы и для любого $n \geqslant 3$ будем называть поверхности в $\mathbb{R}^n$, являющиеся экстремалями функционала площади, *минимальными поверхностями*. По доказанному, это в точности поверхности с параметризациями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, обладающими свойствами (15) и (16), или, на более инвариантном языке, поверхности, погружение $\mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ которых в $\mathbb{R}^n$ задается гармоническими на $\mathcal{X}$ функциями.

Замечание 1. Так как (см. лекцию 13) на компактной поверхности любая гармоническая функция постоянна, то, как уже отмечалось выше, *в* $\mathbb{R}^n$ *не существует компактных минимальных поверхностей.*

Представление минимальных поверхностей с помощью голоморфных функций

Из анализа известно, что любая гармоническая функция от u и v является — вообще говоря, лишь локально — вещественной частью некоторой голоморфной (однозначной аналитической) функции комплексного переменного $w = u + iv$. Следовательно, любую гармоническую (удовлетворяющую условию (16)) параметризацию мы можем — вообще говоря, лишь в некоторой окрестности произвольной точки ее области определения — записать в виде

$$\boldsymbol{r} = \operatorname{Re} \boldsymbol{f}(w), \tag{18}$$

где $\boldsymbol{f}(w)$ — некоторая голоморфная (т. е. имеющая голоморфные компоненты) вектор-функция. При этом согласно соотношениям Коши — Римана $\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{r}_u - i\boldsymbol{r}_v$, и потому

$$\boldsymbol{f}'^2 = (\boldsymbol{r}_u^2 - \boldsymbol{r}_v^2) - 2i\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v,$$

откуда следует, что условия изотермичности (15) равносильны равенству $\boldsymbol{f}'^2 = 0$.

Таким образом, мы видим, что *минимальные поверхности евклидова пространства — это в точности поверхности, допускающие параметризацию* *вида* (18), *где* $f = f(w)$ — *такая голоморфная вектор-функция, что* $f'^2 = 0$.

Замечание 2. Комплексные кривые $\boldsymbol{r} = f(w)$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ (являющиеся с вещественной точки зрения поверхностями), для которых $f'^2 = 0$, называются *изотропными кривыми*. Они замечательны тем, что расстояние между любыми их точками — вычисленное по обычной формуле — равно нулю. Доказанное утверждение означает, таким образом, что *минимальные поверхности являются проекциями изотропных кривых при отображении* $\mathrm{Re}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$. На этом основании изотропные кривые называются также *минимальными линиями*.

Формулы Вейерштрасса Пусть снова $n = 3$ и пусть $f' = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$. Предполагая, что $c \neq 0$, и полагая $x = a/c$, $y = ib/c$, мы можем записать условие $f'^2 = 0$, т. е. условие $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, в виде уравнения гиперболы

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Рациональная параметризация

$$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

гиперболы подсказывает нам перейти от переменной w к переменной t (также комплексной!), связанной с w формулой

$$\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) = x,$$

т. е. формулой

$$t = \frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{c}$$

(напомним, что a и c являются функциями от w). Этот переход законен, если $x \neq \mathrm{const}$.

Задача 10. Покажите, что $x = \mathrm{const}$ *тогда и только тогда, когда рассматриваемая поверхность является плоскостью.*

В новой переменной вектор-функция f' приобретает вид

$$f' = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)c \cdot \boldsymbol{i} + \frac{1}{2i}\left(t + \frac{1}{t}\right)c \cdot \boldsymbol{j} + c \cdot \boldsymbol{k},$$

где теперь $c \not\equiv 0$ — функция от t (вообще говоря, не подчиненная никаким условиям, кроме голоморфности). Удобно положить $c = it\varphi'''$, где φ — голоморфная функция. Тогда

$$\boldsymbol{f}' = -i\frac{1-t^2}{2}\varphi''' \cdot \boldsymbol{i} + \frac{1+t^2}{2}\varphi''' \cdot \boldsymbol{j} + it\varphi''' \cdot \boldsymbol{k}.$$

Интегрируя и переходя к вещественным частям, мы получим параметризацию $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, для которой

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Im}\left(\frac{1-t^2}{2}\varphi'' + t\varphi' - \varphi\right), \\ y &= \operatorname{Re}\left(\varphi - t\varphi' + \frac{1+t^2}{2}\varphi''\right), \\ z &= \operatorname{Im}(\varphi' - t\varphi''), \end{aligned} \tag{19}$$

где t — комплексный параметр, а $\varphi = \varphi(t)$ — голоморфная функция от t, не являющаяся квадратным трехчленом (т. е. такая, что $\varphi''' \not\equiv 0$).

Этим доказано следующее предложение.

Предложение 2. *Вблизи любой своей точки каждая минимальная поверхность в* $\mathbb{R}^3$, *не являющаяся плоскостью, обладает параметризацией вида* (19).

Обратно, для любой голоморфной функции $\varphi = \varphi(t)$ *с* $\varphi''' \not\equiv 0$ *формулы* (19) *задают параметризацию некоторой минимальной поверхности.* □

Например, при $\varphi = it^3$, когда $\varphi' = 3it^2$ и $\varphi'' = 6it$, получается параметризация

$$x = \operatorname{Re}(3t - t^3), \quad y = -\operatorname{Im}(3t + t^3), \quad z = -\operatorname{Re} 3t^2,$$

совпадающая (если положить $t = u + iv$) с параметризацией (6) поверхности Эннепера. Таким образом, *при* $\varphi = it^3$ *получается поверхность Эннепера.*

При $\varphi = t\ln t - t$, когда $\varphi' = \ln t$ и $\varphi'' = 1/t$, получается параметризация

$$x = \operatorname{Im}\left(\frac{1+t^2}{2t}\right), \quad y = \operatorname{Re}\left(\frac{1-t^2}{2t}\right), \quad z = \operatorname{Im}\ln t,$$

переходящая при подстановке $t = e^w$ в параметризацию

$$x = \operatorname{Im} \operatorname{ch} w, \quad y = -\operatorname{Re} \operatorname{sh} w, \quad z = \operatorname{Im} w, \tag{20}$$

т. е., ввиду тождеств

$$\operatorname{ch} w = \operatorname{ch} u \cos v + i \operatorname{sh} u \sin v,$$

$$\operatorname{sh} w = \operatorname{sh} u \cos v + i \operatorname{ch} u \sin v,$$

где $w = u + iv$, в параметризацию

$$x = \operatorname{sh} u \sin v, \quad y = -\operatorname{sh} u \cos v, \quad z = v.$$

Заменив в последней параметризации u на v, а v на u, и одновременно x на y, а y на $-x$, мы получим уже знакомую нам параметризацию геликоида (5).

Таким образом, *при $\varphi = t \ln t - t$ получается геликоид.*

Присоединенные минимальные поверхности

Конечно, если в (18) заменить Re на Im, (что соответствует умножению вектор-функции $f(w)$ на $-i$), то снова получится параметризация минимальной поверхности, но, вообще говоря, другой. Эта поверхность называется *присоединенной* к данной. Конечно, если в (18) заменить Re на Im, (что соответствует умножению вектор-функции $f(w)$ на $-i$), то снова получится параметризация минимальной поверхности, но, вообще говоря, другой. Эта поверхность называется *присоединенной* к данной.

Замене Re на Im в (18) соответствует, как легко понять, замена Re на Im и Im на $-$Re в (19). В частности, при этой замене из параметризации (20) получается параметризация

$$x = -\operatorname{Re} \operatorname{ch} w, \quad y = -\operatorname{Im} \operatorname{sh} w, \quad z = -\operatorname{Re} w,$$

т. е. параметризация

$$x = -\operatorname{ch} u \cos v, \quad y = -\operatorname{ch} u \sin v, \quad z = -u,$$

переходящая при заменах $u \mapsto -v$, $v \mapsto -u$ и $x \mapsto -x$ в параметризацию катеноида (4)

Таким образом, *к геликоиду присоединен катеноид* (и обратно).

Задача 11. Докажите, что *присоединенные минимальные поверхности изометричны.*

Для катеноида и геликоида мы это уже знаем из лекции III.4.

Формулы (19) называются *формулами Вейерштрасса* (а также *формулами Эннепера — Вейерштрасса*). В литературе их можно найти в нескольких различных видах, впрочем, легко преобразующихся друг в друга.