ЛЕКЦИЯ 15

Риманов тензор кривизны. — Симметрии риманова тензора. — Риманов тензор как функционал. — Тождество Уокера и его следствия. — Рекуррентные пространства. — Виртуальные тензоры кривизны. — Восстановление тензора Бианки по его значениям на бивекторах. — Секционные кривизны. — Формула для секционной кривизны.

Риманов тензор кривизны Для (псевдо)риманова пространства $\mathcal{X}$ можно посредством метрического тензора g спустить вниз верхний индекс тензора кривизны R, т. е. ввести в рассмотрение тензор типа $(4,0)$ с компонентами

$$R_{ij,kl} = g_{ip}R^{p}{}_{j,kl}. \tag{1}$$

Обратим внимание, что спущенный индекс мы считаем первым. Именно по этой причине компоненты тензора R обозначаются символом $R^{j}{}_{i,kl}$.

***Определение* 1.** Тензор с компонентами (1) называется *римановым* (или *ковариантным*) *тензором кривизны*. Мы будем обозначать его прежним символом R.

Заметим, что в отличие от контравариантного тензора кривизны, определяющегося исключительно связностью, *риманов тензор зависит от метрики* g и при не меняющем связности переходе от g к λg, $\lambda \neq 0$, (см. лекцию 11) умножается на λ.

Идентифицированный (см. замечание 2 лекции III.18) с полилинейным отображением

$$\mathfrak{a}\mathcal{X} \times \mathfrak{a}\mathcal{X} \times \mathfrak{a}\mathcal{X} \times \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathsf{F}\mathcal{X},$$

$$(X, Y, Z, W) \mapsto R_{ij,kl}X^{i}Y^{j}Z^{k}W^{l},$$

риманов тензор задается формулой

$$R(X, Y, Z, W) = (R(Z, W)Y, X) \tag{2}$$

для любых $X, Y, Z, W \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$.

Симметрии риманова тензора Все симметрии тензора кривизны сохраняются, конечно, и для риманова тензора. В частности, этот тензор удовлетворяет тождеству Бианки

$$R(X, Y, Z, W) + R(X, Z, W, Y) + R(X, W, Y, Z) = 0 \tag{3}$$

и кососимметричен по последним двум аргументам:

$$R(X, Y, W, Z) = -R(X, Y, Z, W), \tag{4}$$

т. е. его компоненты кососимметричны по последним двум индексам:

$$R_{ij,lk} = -R_{ij,kl}.$$

Неожиданным является тот факт, что он кососимметричен и по первым двум аргументам.

Предложение 1. *Для любых векторных полей* $X, Y, Z, W \in a\mathcal{X}$ *имеет место тождество*

$$R(Y, X, Z, W) = -R(X, Y, Z, W) \tag{5}$$

Мы дадим три доказательства этого важного предложения.

Первое доказательство. Тождество (5) равносильно (ср. задачу 5 лекции 6) тождеству

$$R(X, X, Z, W) = 0, \tag{5'}$$

которое мы поэтому и будем доказывать.

Сначала мы докажем тождество (5′) в дополнительном предположении, что

$$[Z, W] = 0. \tag{6}$$

В этом предположении

$$R(X, X, Z, W) = (\nabla_Z\nabla_W X - \nabla_W\nabla_Z X, X) = \\ = (\nabla_Z\nabla_W X, X) - (\nabla_W\nabla_Z X, X),$$

и, значит, тождество (5′) равносильно утверждению, что скалярное произведение $(\nabla_W\nabla_Z X, X)$ симметрично по Z и W.

Имея это в виду, мы применим к функции $|X|^2 = (X, X)$ на $\mathcal{X}$ сначала оператор Z, а затем оператор W:

$$Z(X, X) = (\nabla_Z X, X) + (X, \nabla_Z X) = 2(\nabla_Z X, X),$$
$$WZ(X, X) = 2(\nabla_W\nabla_Z X, X) + 2(\nabla_Z X, \nabla_W X).$$

Конечно, скалярное произведение $(\nabla_Z X, \nabla_W X)$ симметрично по Z и W. Кроме того, так как $ZW - WZ = [Z, W]$, то в силу условия (6) выражение $WZ(X, X)$ также симметрично по Z и W. Следовательно, скалярное произведение $(\nabla_W \nabla_Z X, X)$ действительно симметрично по Z и W.

Это доказывает тождество (5′) (а потому и тождество (5)) при условии (6).

Условие (6) выполнено, в частности, над произвольной координатной окрестностью U для базисных координатных полей $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$, $W = \frac{\partial}{\partial x^l}$. Следовательно, по доказанному, компоненты

$$R_{ij,kl} = R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)$$

риманова тензора кососимметричны по i и j. Поэтому тождество (5) выполнено для любых полей X, Y, Z, W. $\square$

В т о р о е д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что в каждой карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ компоненты $R_{ij,kl}$ риманова тензора кососимметричны по i и j, т. е. что кососнмметрична матрица

$$\widehat{\Omega} = \|\Omega_{ij}\|,$$

состоящая из форм

$$\Omega_{ij} = \sum_{k<l} R_{ij,kl} dx^k \wedge dx^l.$$

Введем с этой целью ортонормированный (не голономный!) базис $X_1, \ldots, X_n$ модуля $\mathfrak{a}U = \Gamma(\tau_{\mathcal{X}}|_U)$ и свяжем матрицу $\widehat{\Omega}$ с матрицей $\widetilde{\Omega}$ форм кривизны римановой связности в базисе $X_1, \ldots, X_n$, являющейся — как непосредственно вытекает из предложения 4 лекции IV.11 и структурного уравнения Картана (формула (1) лекции 4) — кососимметричной матрицей.

Пусть C — матрица перехода от ортонормированного базиса $X_1, \ldots, X_n$ к голономному базису

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x^n}. \tag{7}$$

Тогда, как известно из линейной алгебры,

$$\Omega = C^{-1}\widetilde{\Omega}C,$$

где $\Omega = \|\Omega^i_j\|$ — матрица форм кривизны римановой связности в базисе (7). С другой стороны, как мы знаем из лекции IV.19,

$$\Omega^i_j = \sum_{k<l} R^i_{j,kl} dx^k \wedge dx^l,$$

и, значит,

$$\Omega_{ij} = g_{ip}\Omega^p_j,$$

т. е.

$$\widehat{\Omega} = G\Omega,$$

где $G = \|g_{ij}\|$ — матрица метрического тензора g в базисе (7).

Поскольку $G = C^T C$ (см. формулу (19) лекции I.12), этим доказано, что

$$\widehat{\Omega} = C^T \widetilde{\Omega} C. \tag{8}$$

Следовательно, матрица $\widehat{\Omega}$ одновременно с матрицей $\widetilde{\Omega}$ кососимметрична. □

Третье доказательство. Так как

$$g_{ip}\Gamma^p_{jk} = \Gamma_{i,jk},$$

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right),$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{k,ij} + \Gamma_{j,ik}$$

(см. формулы (2′), (3) и (5) лекции 11), то

$$g_{ip}\left(\frac{\partial \Gamma^p_{lj}}{\partial x^k} + \Gamma^p_{kq}\Gamma^q_{lj}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ip}\Gamma^p_{lj}) - \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^k}\Gamma^p_{lj} + \Gamma_{i,kq}\Gamma^q_{lj} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}\right) - (\Gamma_{i,kp} + \Gamma_{p,ki})\Gamma^p_{lj} + \Gamma_{i,kq}\Gamma^q_{lj} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k}\right) - \Gamma_{p,ki}\Gamma^p_{lj}.$$

Переставив k, l и вычитая, мы — после очевидного преобразования — получим для компонент $R_{ij,kl}$ риманова тензора формулу

$$R_{ij,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + \\ + g_{pq}(\Gamma^p_{li}\Gamma^q_{kj} - \Gamma^p_{ki}\Gamma^q_{lj}). \quad (9)$$

Поскольку оба слагаемые этой формулы очевидным образом кососимметричны по i и j, это доказывает предложение 1. □

Замечание 1. Если локальные координаты $x^1, \ldots$ $\ldots, x^n$ являются нормальными координатами, центрированными в точке p_0, и, значит (см. предложение 1 лекции 2), коэффициенты связности Γ^i_{kj} равны нулю в точке p_0, то для значения $R^{(0)}_{ij,kl}$ компонент $R_{ij,kl}$ в точке p_0 в формуле (9) остается лишь первое слагаемое:

$$R^{(0)}_{ij,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l}\right)^{(0)} \quad (9')$$

Замечание 2. Использованный в первом доказательстве трюк с условием (6) имеет общий характер. Его можно, например, применить для упрощения доказательства предложения 2 лекции 2. С другой стороны, за счет некоторого усложнения вычислений можно, конечно, всегда обойтись и без него.

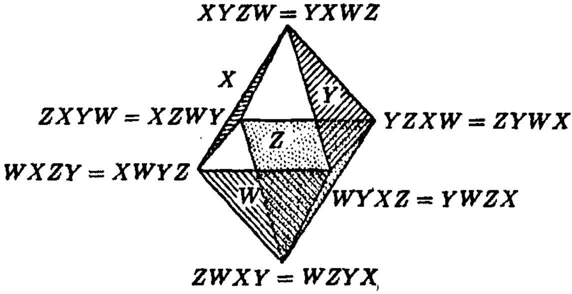
Задача 1. Переделайте первое доказательство предложения 1 в доказательство, не использующее предположения (6). Докажите также предложение 2 лекции 2, используя это предположение.

Из доказанных симметрий риманова тензора уже чисто алгебраически вытекает еще одна замечательная симметрия этого тензора.

Предложение 2. *При перестановке первой и второй пар аргументов риманов тензор не меняется:*

$$R(Z, W, X, Y) = R(X, Y, Z, W). \quad (10)$$

Доказательство. Сопоставим вершинам октаэдра перестановки букв X, Y, Z, W, как указано на схеме (перестановки, получающиеся друг от друга одновременными транспозициями первой и второй пары, считаем одинаковыми). Тогда для четырех заштрихованных граней октаэдра перестановки, отвечающие их вершинам, будут иметь одну и ту же первую компоненту (указанную на схеме в центре грани), а остальные три компоненты будут получаться



друг из друга циклированием. Поэтому каждой такой грани будет соответствовать тождество Бианки (3). Сложив тождества, отвечающие двум верхним заштрихованным граням, и вычтя тождества, отвечающие двум нижнним граням, мы после деления на 2 как раз и получим тождество (10) (так как все члены, отвечающие вершинам экваториального квадрата, сократятся). $\square$

Формула (10) немедленно следует также из формулы (9).

На основании предложения 2 мы нмеем право записывать значения риманова тензора на векторных полях $X, Y, Z, W \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ формулой

$$R(X, Y, Z, W) = (R(X, Y)W, Z)$$

или формулой

$$R(X, Y, Z, W) = -(R(X, Y)Z, W),$$

где слева и справа поля X, Y, Z, W расположены в одной последовательности. (Кстати сказать, последняя формула объясняет, почему многие авторы предпочитают определять тензор кривизны с противоположным знаком; см. замечание 1 лекции IV.19.)

Поэтому, в частности, тождество Бианки мы можем писать в виде

$$R(X, Y, Z, W) + R(Z, X, Y, W) + R(Y, Z, X, W) = 0.$$

Риманов тензор как функционал Для изучения следствий свойств симметрии риманова тензора удобно ввести в рассмотрение $\mathsf{F}\mathcal{X}$-модуль $\Lambda^2\mathcal{X}$ всех кососимметрических тензорных полей типа $(0,2)$ на многообразии $\mathcal{X}$. В произвольной карте $(U, x^1, \dots, x^n)$ многообразия $\mathcal{X}$ компоненты X^{ij} каждого поля $\boldsymbol{X}$ из $\Lambda^2\mathcal{X}$ составляют кососимметрическую матрицу $\|X^{ij}\|$ и поле $\boldsymbol{X}$ на U выражается через координатные бивекторы $\dfrac{\partial}{\partial x^i} \wedge \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ по формуле

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i<j} X^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{1}{2} X^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ формула

$$(X \wedge Y)_p = X_p \wedge Y_p, \qquad p \in \mathcal{X}$$

определяет поле $X \wedge Y \in \Lambda^2\mathcal{X}$ (*внешнее произведение* полей X и Y), для которого

$$(X \wedge Y)^{ij} = X^i Y^j - X^j Y^i$$

в каждой карте $(U, x^1, \dots, x^n)$. Поля вида $X \wedge Y$ мы будем называть *бивекторными полями* на $\mathcal{X}$ и их множество будем обозначать символом $A^2\mathcal{X}$. Подчеркнем (ср. лекцию II.8), что, вообще говоря, множество $A^2\mathcal{X}$ линейным подпространством (и, тем более, подмодулем) не является.

Риманов тензор R естественным образом отождествляется с симметрическим $\mathsf{F}\mathcal{X}$-билинейным функционалом R на $\Lambda^2\mathcal{X}$, задаваемым в каждой карте формулой

$$R(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \sum_{i<j} \sum_{k<l} R_{ij,kl} X^{ij} Y^{kl}. \tag{11}$$

Так как при $X^{ij} = X^i Y^j - X^j Y^i$ и $Y^{kl} = Z^k W^l - Z^l W^k$

$$\sum_{i<j} \sum_{k<l} R_{ij,kl} X^{ij} Y^{kl} =$$

(раскрываем скобки)

$$= \sum_{i<j} \sum_{k<l} R_{ij,kl} X^i Y^j Z^k W^l - \sum_{i<j} \sum_{k<l} R_{ij,kl} X^i Y^j Z^l W^k -$$

$$- \sum_{i<j} \sum_{k<l} R_{ij,kl} X^j Y^i Z^k W^l + \sum_{i<j} \sum_{k<l} R_{ij,kl} X^j Y^i Z^l W^k =$$

(переименовываем индексы суммирования)

$$= \sum_{i<j} \sum_{k<l} R_{ij,kl} X^i Y^j Z^k W^l - \sum_{i<j} \sum_{l<k} R_{ij,lk} X^i Y^j Z^k W^l -$$
$$- \sum_{j<i} \sum_{k<l} R_{ji,kl} X^i Y^j Z^k W^l + \sum_{j<i} \sum_{l<k} R_{ji,lk} X^i Y^j Z^k W^l =$$

(переставляем индексы у компонент тензора и объединяем суммы)

$$= \sum_{i,j} \sum_{k,l} R_{ij,kl} X^i Y^j Z^k W^l,$$

то для любых векторных полей $X, Y, Z, W \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$

$$R(X \wedge Y, Z \wedge W) = R_{ij,kl} X^i Y^j Z^k W^l \tag{12}$$

в каждой карте U и, значит,

$$R(X \wedge Y, Z \wedge W) = R(X, Y, Z, W) \tag{13}$$

на всем многообразии $\mathcal{X}$.

При инвариантном определении функционала (11) он задается на $A^2\mathcal{X}$ посредством формулы (13), а затем по линейности распространяется на весь модуль $\Lambda^2\mathcal{X}$. Конечно, при этом подходе требуется доказывать как возможность распространения, так и его единственность.

Замечание 3. Обратим внимание на то, что при выводе формул (12) и (13) мы использовали лишь кососимметричность компонент $R_{ij,kl}$ по i, j и k, l.

Тождество Уокера и его следствия

Так как оператор кривизны $R(X, Y)$ (см. формулу (18) лекции 2) кососимметричен по X и Y, то по аналогичным соображениям для любого поля $\boldsymbol{Z} \in \Lambda^2\mathcal{X}$ определен оператор $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{Z})$, при $\boldsymbol{Z} = X \wedge \wedge Y$ совпадающий с оператором $R(X, Y)$ (мы пишем $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{Z})$ вместо естественного $R(\boldsymbol{Z})$, потому что последний символ мы ниже будем употреблять в другом смысле). Этот оператор представляет собой дифференцирование тензорных полей на $\mathcal{X}$ и, значит, в частности, применим к риманову тензору кривизны. Поэтому для любых полей $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \Lambda^2\mathcal{X}$ на $\mathcal{X}$ определена функция $(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{Z})R)(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ и ясно, что риманово пространство $\mathcal{X}$, рассматриваемое как пространство аффинной связности, тогда и только тогда полусимметрично (удовлетворяет условию (30) лекции 4), когда

$$(R(Z)R)(X,Y)=0 \tag{14}$$

тождественно, $X,Y,Z\in\Lambda^2\mathcal{X}$.

Задача 2. Докажите следующее тождество Уокера:

$$(R(Z)R)(X,Y)+(R(X)R)(Y,Z)+(R(Y)R)(Z,X)=0.$$

Запишите это тождество в компонентах двумя разными способами (в виде квадратичного соотношения на компоненты и в виде линейного соотношения на их вторые частные ковариантные производные).

Предположим, что на $\Lambda^2\mathcal{X}$ существуют такой $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейный функционал ξ и такой $\mathsf{F}\mathcal{X}$-билинейный симметрический функционал S, что

$$(R(Z)R)(X,Y)=\xi(Z)S(X,Y) \tag{15}$$

для любых полей $X,Y,Z\in\Lambda^2\mathcal{X}$. Оказывается, что тогда в каждой точке $p\in\mathcal{X}$ хотя бы один из функционалов ξ или S равен нулю и, значит, равен нулю и тензор $R(Z)R$ (*риманово пространство, тензор кривизны которого обладает свойством* (15), *полусимметрично*). Действительно, в силу тождества Уокера

$$\xi(Z)S(X,Y)+\xi(X)S(Y,Z)+\xi(Y)S(Z,X)=0. \tag{16}$$

Пусть в точке $p\in\mathcal{X}$ функционал ξ не равен нулю, т. е. существует такое поле $Z_0\in\Lambda^2\mathcal{X}$, что $\xi(Z_0)_p=1$. Тогда при $Z=Z_0$ из (16) следует, что

$$S(X,Y)_p+\xi(X)_pS(Y,Z_0)_p+\xi(Y)_pS(Z_0,X)_p=0, \tag{16$'$}$$

и далее, при $Y=Z_0$, — что

$$2S(X,Z_0)_p+\xi(X)_pS(Z_0,Z_0)_p=0, \tag{16$''$}$$

и, наконец, при $X=Z_0$, — что

$$3S(Z_0,Z_0)_p=0,$$

т. е. что $S(Z_0, Z_0)_p = 0$. Но тогда в силу (16″) $S(X, Z_0)_p = 0$, и потому в силу (16′) $S(X, Y)_p = 0$ для любых $X, Y \in \Lambda^2\mathcal{X}$, т. е. функционал S в точке $p \in \mathcal{X}$ равен нулю.

Рекуррентные пространства Тензор P на римановом пространстве $\mathcal{X}$ называется *рекуррентным*, если на $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ существует такой $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейный функционал ξ, что

$$\nabla_X P = \xi(X)P \tag{17}$$

для любого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$. Пространство $\mathcal{X}$ называется *рекуррентным*, если рекуррентен его тензор кривизны R.

Оказывается, что *каждое рекуррентное пространство $\mathcal{X}$ полусимметрично*. Действительно, если (17) выполнено при $P = R$, то

$$\nabla_X \nabla_Y R = \nabla_X(\xi(Y)R) = X\xi(Y)R + \xi(Y)\xi(X)R$$

для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$, и потому равенство

$$\begin{aligned} R(X,Y)R &= (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})R = \\ &= (X\xi(Y) - Y\xi(X) - \xi([X,Y]))R = (d\xi(X,Y))R \end{aligned}$$

(см. формулу (6) лекции III.19) означает, что тензор R удовлетворяет условию (15) с $S = R$ и $\xi(Z) = d\xi(X, Y)$ при $Z = X \wedge Y$. Поэтому пространство $\mathcal{X}$ полусимметрично. □

Замечание 4. Если $R \neq 0$ (пространство $\mathcal{X}$ не плоское), то $d\xi(X, Y) = 0$ для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$. Отсюда следует (докажите!), что на пространстве $\mathcal{X}$ существует (вообще говоря, только локально) такая функция φ, что

$$\xi(X) = X\varphi$$

для любого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ (ковектор ξ является градиентом).

Задача 3. Докажите, что *если на римановом пространстве $\mathcal{X}$ существует такое отличное от нуля тензорное поле ξ типа $(m, 0)$, $m \geqslant 2$, что для любых полей $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ имеет место равенство*

$$\nabla_{X_1} \ldots \nabla_{X_m} R = \xi(X_1, \ldots, X_m)R,$$

то пространство $\mathcal{X}$ локально симметрично.

Виртуальные тензоры кривизны Тождество Бианки для тензора кривизны означает, что на $A^2\mathcal{X}$ функционал R удовлетворяет тождеству

$$R(X\wedge Y, Z\wedge W)+R(Y\wedge Z, X\wedge W)+R(Z\wedge X, Y\wedge W) = 0. \quad (18)$$

Это тождество также называется *тождеством Бианки*.

Определение 2. Произвольный симметрический билинейный функционал R на $\Lambda^2\mathcal{X}$, (т. е., иначе говоря, тензор типа $(4,0)$, кососимметричный по первой и второй паре индексов и не меняющийся при перестановке этих пар), удовлетворяющий на $A^2\mathcal{X}$ тождеству (18), называется *виртуальным тензором кривизны* (или *тензором Бианки*) на многообразии $\mathcal{X}$.

Заметим, что в этом определении не предполагается, что многообразие $\mathcal{X}$ является римановым (или псевдоримановым) пространством.

В силу известного из линейной алгебры биективного соответствия между симметрическими билинейными и квадратичными функционалами, мы каждый тензор Бианки будем отождествлять с соответствующим квадратичным функционалом $X \mapsto R(X)$ на $\Lambda^2\mathcal{X}$, где $R(X) = R(X, X)$.

Все тензоры Бианки на многообразии $\mathcal{X}$ образуют $\mathsf{F}\mathcal{X}$-модуль $\boldsymbol{B}\mathcal{X}$.

Для произвольного $\mathsf{F}\mathcal{X}$-подмодуля $\boldsymbol{A}$ модуля всех тензорных полей на многообразии $\mathcal{X}$ (некоторого фиксированного типа) и любой координатной окрестности $U \subset \mathcal{X}$ мы будем символом $\boldsymbol{A}|_U$ обозначать $\mathsf{F}U$-модуль, состоящий из ограничений полей из $\boldsymbol{A}$ на U. В случае, когда все модули вида $\boldsymbol{A}|_U$ свободны и имеют одну и ту же размерность m (над $\mathsf{F}U$), мы будем говорить, что *размерность модуля $\boldsymbol{A}$ равна m*, и будем писать

$$\dim \boldsymbol{A} = m$$

(а базисы модулей $\boldsymbol{A}|_U$ будем называть — впрочем, мы это уже неоднократно делали — *базисами модуля $\boldsymbol{A}$ над U*).

Например, ясно, что

$$\dim \Lambda^2\mathcal{X} = \frac{n(n-1)}{2},$$

где, как всегда, $n = \dim \mathcal{X}$.

Задача 4. Докажите, что

$$\dim B\mathcal{X} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

[Указание. Имеющиеся у компонент произвольного тензора Бианки симметрии показывают, что если у его отличной от нуля компоненты $R_{ij,kl}$ имеется только два различных индекса (скажем, i и j), то эта компонента с точностью до знака равна компоненте $R_{ij,ij}$, а если только три (скажем, i,j и k), то эта компонента равна — опять с точностью до знака — одной из трех компонент $R_{ij,ik}$, $R_{ij,jk}$ и $R_{ik,jk}$. В случае, когда все четыре индекса i,j,k,l различны, также остаются только три компоненты $R_{ij,kl}$, $R_{ik,jl}$ и $R_{il,jk}$. Однако, в последнем случае одна из компонент выражается в силу тождества Бианки через две другие, так что в этом случае независимы только две компоненты. Поэтому общее число независимых компонент тензора Бианки равно

$$\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + 2\binom{n}{4} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.]$$

В частности,

$$\dim B\mathcal{X} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2, \\ 6 & \text{при } n = 3, \\ 20 & \text{при } n = 4 \end{cases}$$

(для бо́льших n нам эти размерности не понадобятся).

Восстановление тензора Бианки по его значениям на бивекторах

Пусть $R \in B\mathcal{X}$ и $p \in \mathcal{X}$.

Задача 5. Покажите, что *для любого поля $X \in \Lambda^2\mathcal{X}$ значение $R(X)_p$ функции $R(X)$ в точке p зависит только от значения $A = X_p$ поля X в точке p.* [Указание. Пусть A^{ij} — компоненты тензора $A \in \Lambda^2(\mathsf{T}_p\mathcal{X})$ в произвольной карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ (содержащей точку p). Тогда число $R(X)_p$ равно

$$\sum_{i<j}\sum_{k<l} R^{(0)}_{ij,kl} A^{ij} A^{kl},$$

где $R^{(0)}_{ij,kl}$ — значения компонент $R_{ij,kl}$ тензора R в точке p.]

Это значение обозначается символом $R(A)$. В случае, когда A является бивектором $A \wedge B$, $A, B \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$, оно выражается формулой

$$R(A \wedge B) = R^{(0)}_{ij,kl} A^i B^j A^k B^l. \tag{19}$$

Ср. формулу (12).

Таким образом, по определению для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ для значения $R(X \wedge Y)_p$ функции $R(X \wedge Y)$ в точке $p \in \mathcal{X}$ имеет место формула

$$R(X \wedge Y)_p = R(X_p \wedge Y_p).$$

Особая роль функций $R(X \wedge Y)$ определяется тем, что по ним полностью восстанавливается тензор R.

Предложение 3. *Если два тензора Бианки (рассматриваемые как квадратичные функционалы) совпадают на $A^2\mathcal{X}$, то они совпадают и на всем модуле $\Lambda^2\mathcal{X}$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $R(X \wedge Y) = 0$ для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$, то $R = 0$. С другой стороны, так как над каждой координатной окрестностью бивекторные поля порождают модуль $\Lambda^2\mathcal{X}$, то $R = 0$ тогда и только тогда, когда для любых векторных полей $X, Y, Z, W \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ функция

$$R(X, Y, Z, W) = R(X \wedge Y, Z \wedge W)$$

тождественно равна нулю.

Итак, нам дано, что $R(X, Y, X, Y) = 0$, а нужно доказать, что $R(X, Y, Z, W) = 0$.

С этой целью мы подставим в тождество $R(X, Y, X, Y) = 0$ вместо поля X поле $X + Z$. Так как

$$R(X + Z, Y, X + Z, Y) = \\ = R(X, Y, X, Y) + 2R(X, Y, Z, Y) + R(Z, Y, Z, Y),$$

то

$$R(X, Y, Z, Y) = 0.$$

Применив это соотношение вместо поля Y к полю $Y + W$ и учитывая, что

$$R(X, Y + W, Z, Y + W) = R(X, Y, Z, Y) + R(X, Y, Z, W) + \\ + R(X, W, Z, Y) + R(X, W, Z, W),$$

мы далее получим, что

$$R(X, Y, Z, W) + R(X, W, Z, Y) = 0,$$

т. е. что

$$R(X,Y,Z,W) = R(Y,Z,X,W).$$

Это означает, что при циклической перестановке полей X, Y, Z функция $R(X,Y,Z,W)$ не меняется. Поэтому ее циклирование по X, Y, Z лишь умножит эту функцию на 3. Поскольку же, согласно тождеству Бианки, результат этого циклирования должен быть равен нулю, это возможно только при $R = 0$. $\square$

Секционные кривизны Чтобы найти геометрический смысл чисел $R(A\wedge B)$ (для случая, когда R является тензором кривизны риманова пространства $\mathcal{X}$), мы воспользуемся конструкцией из лекции IV.19.

Пусть $p_0 \in \mathcal{X}$ и $\xi_0 \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ (нам теперь удобно несколько отойти от стандартных обозначений; в лекции IV.19 точка p_0 обозначалась символом b_0, а вектор ξ_0 — символом p_0). Как было показано в лекции IV.19, при параллельном переносе по «параллелограмму» со сторонами sA, sB, где $A, B \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$, вектор ξ_0 переходит в вектор

$$\xi_1 = \xi_0 - s^2 R(A,B)\xi_0 + O(s^3).$$

Пусть вектор ξ_0 принадлежит плоскости π векторов A и B (т. е. касательной плоскости к рассмотренной в лекции IV.19 вспомогательной двумерной поверхности). Тогда, вообще говоря, вектор ξ_1 этой плоскости принадлежать не будет. Пусть ξ_1' — ортогональная проекция вектора ξ_1 на плоскость π. Мы хотим вычислить угол φ между векторами ξ_0 и ξ_1' в плоскости π.

Не теряя общности, мы можем, конечно, считать вектор ξ_0 единичным. Дополним его до ортонормированного базиса ξ_0, η_0 плоскости π, задающего ту же ориентацию, что и базис A, B. Тогда для вектора $\xi_1' - \xi_0$ будет иметь место равенство вида

$$\xi_1' - \xi_0 = a\xi_0 + b\eta_0,$$

и интересующий нас угол φ будет удовлетворять соотношению

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{1+a}.$$

При этом

$$a = (\xi_1' - \xi_0, \xi_0) = (\xi_1 - \xi_0, \xi_0) =$$
$$= -s^2(R(A,B)\xi_0, \xi_0) + O(s^3) = O(s^3)$$

(ибо $(R(A,B)\xi_0, \xi_0) = 0$ в силу кососимметричности риманова тензора по первой паре аргументов) и, аналогично,

$$b = (\xi_1' - \xi_0, \eta_0) = (\xi_1 - \xi_0, \eta_0) = -s^2(R(A,B)\xi_0, \eta_0) + O(s^3).$$

Поскольку

$$\frac{b}{1+a} = b + O(a)$$

и

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi) = \operatorname{tg}\varphi + O(\operatorname{tg}^3\varphi),$$

отсюда следует, что

$$\varphi = -s^2(R(A,B)\xi_0, \eta_0) + O(s^3).$$

С другой стороны,

$$-(R(A,B)\xi_0, \eta_0) = R(A,B,\xi_0,\eta_0) = R(A \wedge B, \xi_0 \wedge \eta_0) =$$
$$= \frac{R(A \wedge B, A \wedge B)}{|A \wedge B|} = \frac{R(A \wedge B)}{|A \wedge B|},$$

где $|A \wedge B|$ — величина (ориентированная площадь) бивектора $A \wedge B$ (для которой $A \wedge B = |A \wedge B|(\xi_0 \wedge \eta_0)$ — см. лекцию I.14), и, значит,

$$\varphi = s^2 \frac{R(A \wedge B)}{|A \wedge B|} + O(s^3).$$

Поэтому

$$\lim_{s \to 0} \frac{\varphi}{s^2} = \frac{R(A \wedge B)}{|A \wedge B|}.$$

Поскольку число $s^2|A \wedge B|$ равно ориентированной площади σ параллелограмма плоскости π, построенного на векторах sA и sB, этим доказано, что

$$\lim_{s \to 0} \frac{\varphi}{\sigma} = \frac{R(A \wedge B)}{|A \wedge B|^2}.$$

Положив
$$K_{p_0}(\pi) = \frac{R(A \wedge B)}{|A \wedge B|^2}, \tag{20}$$
мы запишем эту формулу в следующем виде
$$K_{p_0}(\pi) = \lim_{s \to 0} \frac{\varphi}{\sigma}. \tag{21}$$

Задача 6. Покажите, что *число* $K_{p_0}(\pi)$ *зависит только от* (*неориентированной!*) *плоскости* π (что и оправдывает его обозначение).

Это число называется *секционной кривизной риманова пространства* $\mathcal{X}$ *в точке* p_0 *по двумерному направлению* π.

Для псевдориманова пространства $\mathcal{X}$ кривизна $K_{p_0}(\pi)$ определена в случае, когда плоскость π не изотропна.

Петлю, по которой мы обносим вектор ξ_0, чтобы получить угол φ, наглядно следует представлять себе как результат обхода в положительном направлении границы некоторого «искривленного параллелограмма», лежащего в многообразии $\mathcal{X}$ (точное описание которого, использующее фиксированные локальные координаты, а потому не имеющее инвариантного геометрического смысла, дано в лекции IV.19), а число σ — как площадь этого параллелограмма. С этой точки зрения формула (21) утверждает, что *секционная кривизна* $K_{p_0}(\pi)$ *представляет собой предельное значение угла* φ, *отнесенного к площади обходимой области.*

Формула для секционной кривизны

Чтобы получить аналитическую формулу для $K_{p_0}(\pi)$, нам понадобятся некоторые сведения из линейной алгебры.

Задача 7. Докажите, что *для любого* (*псевдо*)*евклидова пространства* $\mathcal{V}$ *на пространстве* $\Lambda^2\mathcal{V}$ *кососимметрических тензоров типа* $(0,2)$ *существует единственная* (*псевдо*)*евклидова метрика, удовлетворяющая для любых векторов* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ *соотношению*
$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \end{vmatrix}.$$

Ср. формулу (6) лекции I.15.

Задача 8. При $n = 3$ пространство $\Lambda^2\mathcal{V} = A^2\mathcal{V}$ естественно изоморфно (см. лекцию I.15) пространству $\mathcal{V}$. Покажите, что *этот изоморфизм является изометрией.*

Задача 9. Докажите, что *для любых векторов $a, b \in \mathcal{V}$ квадрат площади бивектора $a \wedge b$ равен его скалярному квадрату:*

$$|a \wedge b|^2 = (a \wedge b, a \wedge b).$$

При $n = 3$ это в точности формула (9) лекции I.15.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный базис пространства $\mathcal{V}$. Тогда, как мы знаем (см. лекцию II.8), бивекторы вида $e_i \wedge \wedge e_j$, $i < j$, составляют базис пространства $\Lambda^2\mathcal{V} = \mathcal{V} \wedge \mathcal{V}$. По определению *матрица $\|g_{ij,kl}\|$, $i < j$, $k < l$, метрических коэффициентов этого базиса задается формулой*

$$g_{ij,kl} = \begin{vmatrix} g_{ik} & g_{il} \\ g_{jk} & g_{jl} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Это означает, что для любых тензоров

$$A = \sum_{i<j} A^{ij} e_i \wedge e_j, \quad B = \sum_{k<l} B^{kl} e_k \wedge e_l$$

из $\Lambda^2\mathcal{V}$ их скалярное произведение выражается формулой

$$(A, B) = \sum_{i<j} \sum_{k<l} \begin{vmatrix} g_{ik} & g_{il} \\ g_{jk} & g_{jl} \end{vmatrix} A^{ij} B^{kl}. \tag{23}$$

Числа $g_{ij,kl}$ определены формулой (22) не только при $i < j$ и $k < l$, но и для любых i, j и k, l, причем получающийся массив чисел $g_{ij,kl}$ кососимметричен по i, j и k, l. Поэтому (см. вывод формулы (12) из формулы (11) и замечание 3) *для любых векторов $a, b \in \mathcal{V}$ квадрат $|a \wedge b|^2$ площади бивектора $a \wedge b$ выражается формулой*

$$|a \wedge b|^2 = g_{ij,kl} a^i b^j a^k b^l.$$

Мы будем применять эти утверждения — с соответствующими изменениями в обозначениях — к случаю, когда $\mathcal{V}$

представляет собой касательное пространство $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ (псевдо)риманова пространства $\mathcal{X}$ в некоторой его точке p_0.

Например, в этом случае для любых векторов $A, B \in \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ будет иметь место формула

$$|A \wedge B|^2 = g^{(0)}_{ij,kl} A^i B^j A^k B^l, \tag{24}$$

где A^i, B^j — координаты векторов A и B в произвольной (содержащей точку p_0) карте U многообразия $\mathcal{X}$, а $g^{(0)}_{ij,kl}$ — значения в точке p_0 функций $g_{ij,kl}$, определенных на U формулой (22). [В дальнейшем индекс (0) при $g_{ij,kl}$ мы будем, как правило, опускать.]

Для секционной кривизны это дает формулу

$$K_{p_0}(\pi) = \frac{R^{(0)}_{ij,kl} A^i B^j A^k B^l}{g^{(0)}_{ij,kl} A^i B^j A^k B^l}, \tag{25}$$

где A^i и B^j — координаты векторов пространства $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$, составляющих произвольный базис плоскости π (а $R^{(0)}_{ij,kl}$ — значения функций $R_{ij,kl}$ в точке p_0).

Задача 10. Покажите, что *определенные формулой* (22) *функции* $g_{ij,kl}$ *являются компонентами некоторого тензора Бианки.*