ЛЕКЦИЯ 16

Тензоры Бианки как операторы. — Отщепление бесследных тензоров. — Гауссова кривизна и скалярная кривизна. — Тензор кривизны при $n = 2$. — Геометрическая интерпретация секционной кривизны. — Полная кривизна области на поверхности. — Вращение векторного поля на кривой. — Вращение поля касательных векторов. — Формула Гаусса — Бонне. — Триангулируемые поверхности. — Теорема Гаусса — Бонне.

Тензоры Бианки как операторы

Конструкция скалярного произведения (23) лекции 15 немедленно переносится и на тензорные поля из $\Lambda^2\mathcal{X}$.

Пусть $X, Y \in \Lambda^2\mathcal{X}$, и пусть в некоторой карте $(U, x^1, \dots \dots, x^n)$

$$X = \sum_{i<j} X^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Y = \sum_{k<l} Y^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \wedge \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Тогда формула

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i<j} \sum_{k<l} g_{ij,kl} X^{ij} Y^{kl} \tag{1}$$

определяет на U функцию $\langle X, Y\rangle$, не зависящую от выбора координат $x^1, \dots, x^n$. Поэтому эта формула корректно определяет функцию $\langle X, Y\rangle$ на всем многообразии $\mathcal{X}$.

Инвариантно функция $\langle X, Y\rangle$ задается формулой

$$\langle X, Y\rangle(p) = (X_p, Y_p), \qquad p \in \mathcal{X},$$

где справа имеется в виду скалярное произведение (23) лекции 15 в (псевдо)евклидовом пространстве $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$.

Мы будем называть функцию $\langle X, Y\rangle$ *скалярным произведением* полей X и Y. (Острые скобки $\langle \dots \rangle$ вместо обычных круглых употребляются здесь по традиции.)

Используя это скалярное произведение, мы можем каждый тензор Бианки R отождествить с линейным (над алгеброй $\mathsf{F}\mathcal{X}$) оператором

$$R\colon \Lambda^2\mathcal{X} \to \Lambda^2\mathcal{X}. \tag{2}$$

Для любых полей $X, Y \in \Lambda^2\mathcal{X}$ этот оператор удовлетворяет соотношению

$$\langle RX, Y\rangle = R(X, Y).$$

В произвольной карте компоненты Z^{ij} поля $Z = RX$ задаются формулой

$$Z^{ij} = \sum_{k<l} R^{ij}{}_{kl} X^{kl} = \frac{1}{2} R^{ij}{}_{kl} X^{kl},$$

коэффициенты $R^{ij}{}_{kl}$ которой (элементы матрицы оператора R в базисе $\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$, $i < j$, модуля $\Lambda^2\mathcal{X}$ над U) получаются подъемом индексов в компонентах тензора кривизны:

$$R^{ij}{}_{kl} = \sum_{a<b} g^{ij,ab} R_{ab,kl}, \tag{3}$$

где

$$g^{ij,kl} = \begin{vmatrix} g^{ik} & g^{il} \\ g^{jk} & g^{jl} \end{vmatrix}$$

— компоненты метрического тензора с поднятыми индексами.

Задача 1. Покажите, что при $i < j$ и $k < l$

$$\sum_{a<b} g_{ij,ab} g^{ab,kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i,j) = (k,l), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что

$$R^{ij}{}_{kl} = g^{jb} R^i{}_{b,kl}$$

в точном соответствии с правилами подъема индексов.

Поскольку функционал R симметричен, *оператор R самосопряжен*, т. е.

$$\langle RX, Y\rangle = \langle X, RY\rangle$$

для любых полей $X, Y \in \Lambda^2\mathcal{X}$.

Отщепление бесследных тензоров

След оператора (2) выражается формулой

$$\sum_{i<j} R^{ij}{}_{ij} = \frac{1}{2} R^{ij}{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{ik} g^{jl} R_{ij,kl} = \frac{1}{2} g^{jl} R^k_{j,kl}. \tag{5}$$

Удвоенный след (5) мы будем обозначать символом $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = g^{ik} g^{jl} R_{ij,kl} = g^{jl} R^k_{j,kl}. \tag{6}$$

Кроме того, мы положим

$$K = \frac{\mathcal{R}}{n(n-1)}. \tag{7}$$

Сравнение формул (3) и (4) немедленно обнаруживает, что тензор Бианки с компонентами $g_{ij,kl}$ (см. задачу 10 лекции 15), интерпретированный как оператор $\Lambda^2\mathcal{X} \to \Lambda^2\mathcal{X}$, имеет компоненты $\delta^i_k\delta^j_l$, т. е. является тождественным оператором. На этом основании этот тензор обозначается символом E.

След тензора E равен $\dfrac{n(n-1)}{2}$ и, значит, для него $K = 1$. Поэтому *произвольный тензор Бианки R единственным образом представляется в виде*

$$R = KE + R_0, \tag{8}$$

где R_0 — бесследный тензор (для которого $K = 0$).

Гауссова кривизна и скалярная кривизна

***Определение* 1.** В случае, когда R является тензором кривизны (псевдо)риманова пространства $\mathcal{X}$, функция K называется *гауссовой кривизной* этого пространства, а функция $\mathcal{R}$ — его *скалярной кривизной*.

Эта терминология объясняется тем, что *в случае, когда $\mathcal{X}$ является поверхностью евклидова пространства, функция K совпадает с гауссовой кривизной этой поверхности в смысле лекции* III.4. Действительно, предположим, для упрощения вычислений, что поверхность отнесена к полудекартовым координатам u, v, в которых ее первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = du^2 + G dv^2 \tag{9}$$

(см. лекцию 13). Тогда для коэффициентов связности Γ^i_{jk} будут иметь место (см. формулы (3) лекции III.5) равенства

$$\Gamma^1_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{если } (j,k) \neq (2,2), \\ -\dfrac{1}{2}G_u, & \text{если } (j,k) = (2,2), \end{cases}$$

$$\Gamma^2_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{если } (j,k) = (1,1), \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{G_u}{G}, & \text{если } (j,k) = (1,2) \text{ или } (2,1), \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{G_v}{G}, & \text{если } (j,k) = (2,2). \end{cases}$$

(Так как при $n = 2$ формулы (5') лекции 11 равносильны формулам (2') лекции 11, идентичным — с точностью до обозначений — формулам (3) лекции III.5, то коэффициенты связности Γ^i_{jk} из лекции III.5 — это в точности коэффициенты римановой связности на $\mathcal{X}$.)

Поэтому

$$R^1_{2,12} = \frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial u} - \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial v} + \Gamma^1_{1p}\Gamma^p_{22} - \Gamma^1_{2p}\Gamma^p_{12} = $$
$$= \frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial u} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} = -\frac{1}{2}G_{uu} + \frac{G_u^2}{4G},$$

и, значит, так как $g^{21} = 0$ и $g^{22} = G^{-1}$,

$$R^{12}{}_{12} = -\frac{2G_{uu}G - G_u^2}{4G^2} = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

В то же время в рассматриваемом случае $K = R^{12}{}_{12}$. Следовательно,

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}},$$

что полностью согласуется с формулой (8) лекции III.5. □

Кривизны $\mathcal{R}$ и K, подобно риманову тензору, не определяются только связностью и при не меняющем связности переходе от g к λg, $\lambda \neq 0$, приобретают множитель $1/\lambda$.

Выбор между $\mathcal{R}$ и K определяется обычно соображениями удобства и традицией.

Тензор кривизны при $n=2$

При $n = 2$ (в случае, когда многообразие $\mathcal{X}$ является поверхностью) тензор кривизны алгебраически выражается через метрический тензор и гауссову кривизну.

***Предложение* 1.** *При $n = 2$ любой тензор Бианки R имеет вид KE, т. е. его компоненты выражаются формулой*

$$R_{ij,kl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \qquad (10)$$

Доказательство. Так как $\dim B\mathcal{X} = 1$, то в разложении (8) член R_0 равен нулю. □

В этом смысле тензор кривизны поверхности полностью характеризуется ее гауссовой кривизной K.

В формуле (10) все отличные от нуля компоненты равны $\pm R_{12,12}$. Поэтому эта формула фактически сводится к одному равенству

$$R_{12,12} = K \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}, \tag{10'}$$

в обозначениях Гаусса имеющему вид

$$R_{12,12} = K(EG - F^2). \tag{10''}$$

(Подчеркнем, что компонента $R_{12,12}$ и определитель $EG - F^2$ зависят от выбора локальных координат. Инвариантное значение имеет только их отношение K.)

В случае, когда $\mathcal{X}$ является поверхностью трехмерного евклидова пространства, сравнение формулы (10″) с формулой для гауссовой кривизны поверхности из лекции III.4 (стр. 79) немедленно показывает, что *компонента $R_{12,12}$ тензора кривизны равна определителю $LN - M^2$ второй квадратичной формы поверхности.*

При $n = 2$ в пространстве $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ имеется только одна двумерная плоскость π — само $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$. Поэтому секционная кривизна $K_{p_0}(\pi)$ тоже только одна.

Задача 2. **Докажите, что** *этой секционной кривизной является значение K_{p_0} гауссовой кривизны K в точке p_0.*

Это, в частности, объясняет, почему $K_{p_0}(\pi)$ называется кривизной.

Геометрическая интерпретация секционной кривизны

Секционные кривизны риманова пространства $\mathcal{X}$ произвольной размерности также могут быть интерпретированы как гауссовы кривизны.

Двумерные подмногообразия пространства $\mathcal{X}$ мы будем называть *поверхностями в $\mathcal{X}$*.

Пусть $p_0 \in \mathcal{X}$, $U^{(0)}$ — нормальная окрестность вектора 0 линеала $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$, и $\pi \subset \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ — произвольная плоскость в $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$. Пусть, далее, $\mathcal{X}_\pi = \exp_{p_0}(U^{(0)} \cap \pi)$ — поверхность в $\mathcal{X}$, являющаяся образом этой плоскости (или — точнее — ее части $U^{(0)} \cap \pi$) при диффеоморфизме $\exp_{p_0}|_{U^{(0)}}$. [Наглядно, поверхность $\mathcal{X}_\pi$ заметается геодезическими, исходящими из точки p_0 и касающимися в p_0 плоскости π.] Ясно, что касательной плоскостью к поверхности $\mathcal{X}_\pi$ в точке p_0 является плоскость π.

Предложение 2. *Гауссова кривизна $K(\mathcal{X}_\pi)_{p_0}$ поверхности $\mathcal{X}_\pi$ в точке p_0 равна секционной кривизне $K_{p_0}(\pi)$ риманова пространства $\mathcal{X}$ в точке p_0 по двумерному направлению π.*

Доказательство. Выбрав в $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ базис, первые два вектора которого порождают плоскость π, рассмотрим в нормальной окрестности $U = \exp_{p_0} U^{(0)}$ точки p_0 соответствующие нормальные координаты $x^1, \ldots, x^n$.

Согласно формуле (25) лекции 15, при $A = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{p_0}$ и $B = \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_{p_0}$, секционная кривизна $K_{p_0}(\pi)$ выражается в этих координатах формулой

$$K_{p_0}(\pi) = \frac{R^{(0)}_{12,12}}{g^{(0)}_{11}g^{(0)}_{22} - (g^{(0)}_{12})^2}.$$

С другой стороны, поверхность $\mathcal{X}_\pi$ (целиком лежащая в U) имеет в координатах $x^1, \ldots, x^n$ уравнения $x^3 = 0, \ldots, x^n = 0$, а функции $u = x^1$ и $v = x^2$ являются на $\mathcal{X}_\pi$ локальными координатами (определенными, впрочем, на всей поверхности $\mathcal{X}_\pi$). Поэтому если $\widetilde{R}$ — тензор римановой кривизны этой поверхности, то согласно формуле (10)

$$K(\mathcal{X}_\pi)_{p_0} = \frac{\widetilde{R}^{(0)}_{12,12}}{\widetilde{g}^{(0)}_{11}\widetilde{g}^{(0)}_{22} - (\widetilde{g}^{(0)}_{12})^2},$$

где $\widetilde{g}^{(0)}_{ij}$ — значения в точке p_0 метрического тензора поверхности $\mathcal{X}_\pi$. Поскольку по определению $\widetilde{g}^{(0)}_{ij} = g^{(0)}_{ij}$, отсюда следует, что для доказательства предложения 2 достаточно доказать, что

$$\widetilde{R}^{(0)}_{12,12} = R^{(0)}_{12,12}. \tag{11}$$

С этой целью мы заметим, что так как координаты $x^1, \ldots, x^n$ нормальны, то (см. замечание 1 лекции 15) для компоненты $R^{(0)}_{12,12}$ имеет место формула

$$\widetilde{R}^{(0)}_{12,12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^2 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x^1 \partial x^2}\right)^{(0)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1}\right)^{(0)}$$

(см. формулу (9′) лекции 15).

Но так как координаты u и v на $\mathcal{X}_\pi$ также нормальны (почему?), то для числа $\widetilde{R}^{(0)}_{12,12}$ имеет место аналогичная формула

$$\widetilde{R}^{(0)}_{12,12} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 \widetilde{g}_{12}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 \widetilde{g}_{11}}{\partial v \partial v} - \frac{\partial^2 \widetilde{g}_{22}}{\partial u \partial u}\right)^{(0)}.$$

Поскольку $\widetilde{g}_{ij} = g_{ij}$ на U и $u = x^1$, $v = x^2$, это доказывает равенство (11) и вместе с ним предложение 2. $\square$

Полная кривизна области на поверхности

Возвращаясь к поверхностям (которые для наглядности мы можем считать поверхностями евклидова пространства), мы заметим, что согласно формуле (21) лекции 15 (и утверждению задачи 2) для гауссовой кривизны K произвольной поверхности $\mathcal{X}$ имеет место формула

$$K = \lim_{s \to 0} \frac{\varphi}{\sigma}. \tag{12}$$

Здесь в первую очередь следует иметь в виду, что при $n = 2$ ситуация, к которой относится формула (12), существенно упрощается, поскольку теперь нет нужды ни выбирать вспомогательную двумерную поверхность — ее роль будет играть само многообразие $\mathcal{X}$, — ни проектировать обнесенный вектор на ее касательную плоскость. В частности, это означает, что угол φ в формуле (12) является не чем иным, как *углом поворота* вектора ξ_0 при его параллельном обнесении вдоль петли.

Это позволяет проинтегрировать дифференциальное соотношение (12) и найти поворот φ вдоль любой гомотопной нулю петли или — в более геометрической, но по существу равносильной постановке — вдоль любой простой замкнутой кривой, ограничивающей область, диффеоморфную кругу.

Дальнейшие рассуждения фактически будут реализацией для случая $n = 2$ намеченного в начале лекции IV.20 интеграционного подхода к вычислению суженной группы голономии. Этот подход удается провести сравнительно легко благодаря абелевости группы $SO(2) \cong \mathbb{S}^1$.

Пусть сначала поверхность $\mathcal{X}$ элементарна, т. е. покрывается единственной картой (которую мы будем считать диффеоморфной открытому кругу (u, v)-плоскости $\mathbb{R}^2$). Для случая, когда $\mathcal{X}$ является поверхностью евклидова пространства, это по определению (ср. лекцию III.3) означает, что $\mathcal{X}$ обладает параметризацией вида

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v), \tag{13}$$

где (u, v) пробегает открытый круг $\mathbb{B}$ плоскости $\mathbb{R}^2$.

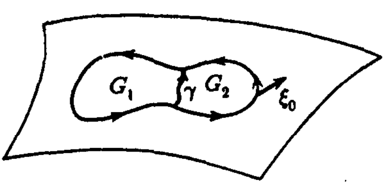
В силу этого предположения мы можем применять к областям на $\mathcal{X}$ результаты, доказанные в курсе анализа для плоских областей.

Кроме того, поверхность $\mathcal{X}$ мы можем считать ориентированной.

Задача 3. Пусть G — область на элементарной поверхности, ограниченная кусочно гладкой простой замкнутой кривой Γ. Докажите, что

а. *Для любой точки $p_0 \in \Gamma$ угол поворота φ вектора $\boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ при обходе области G в положительном направлении (так, чтобы область оставалась слева) не зависит от выбора вектора $\boldsymbol{\xi}_0$ и один и тот же для всех точек $p_0 \in \Gamma$.*

Это означает, что φ зависит исключительно от области G, т. е. — на принятом в анализе языке — является *функцией области*.



б. *Функция области φ аддитивна*, т. е. если область G разрезана некоторой простой кривой γ на две области G_1 и G_2, то

$$\varphi(G) = \varphi(G_1) + \varphi(G_2).$$

[Указание. При обходе областей G_1 и G_2 мы дважды проходим кривую γ в противоположных направлениях.]

в. *Функция области φ гладка*, т. е. для любой точки p поверхности $\mathcal{X}$ и любой последовательности областей $\{G_m\}$, содержащих точку p_0 и стягивающихся к этой точке (т. е. таких, что $\operatorname{diam} G_m \to 0$ при $m \to \infty$), существует предел

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\varphi(G_m)}{|G_m|}, \tag{14}$$

где $|G_m|$ — площадь области G_m (этот предел называется — см. курс анализа — *плотностью* аддитивной функции области φ в точке p).

г. *Плотность* (14) *равна гауссовой кривизне* K_p *поверхности* $\mathcal{X}$ *в точке* p. [Указание. См. формулу (12)].

В силу известной теоремы анализа о восстановлении гладкой аддитивной функции области по ее плотности отсюда немедленно вытекает следующее предложение.

Предложение 3. *Для любой области G на элементарной поверхности $\mathcal{X}$, ограниченной кусочно гладкой простой замкнутой кривой, угол поворота φ касательных векторов при обходе границы Γ этой области равен интегралу по области G от гауссовой кривизны поверхности:*

$$\varphi = \iint K d\sigma. \quad \square \tag{15}$$

Здесь $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$ — элемент площади поверхности (см. лекцию III.3 или III.24).

Фигурирующий в формуле (15) интеграл называется *полной кривизной* области G на поверхности $\mathcal{X}$.

Задача 4. Пусть поверхность $\mathcal{X}$ не элементарна, и пусть G — ориентированная область на $\mathcal{X}$, диффеоморфная плоской области с кусочно гладкой границей (состоящей, вообще говоря, из нескольких кусочно гладких простых замкнутых кривых). Пусть, далее, φ — сумма углов поворота по всем граничным кривым, снабженных индуцированной ориентацией. Докажите, что формула (15) остается в силе и в этом более общем случае.

Вращение векторного поля на кривой

Предложение 3 можно с пользой переформулировать. Пусть на поверхности $\mathcal{X}$ (которую мы по-прежнему предполагаем элементарной) задано всюду отличное от нуля векторное поле

$\alpha(u, v)$. [Мы будем называть это поле *референтным*. Примером референтного поля может служить координатное поле $\dfrac{\partial}{\partial u}$, т. е. при отождествлении $\mathcal{X}$ с $\mathbb{B}$ — поле единичных векторов, параллельных оси абсцисс и направленных в ее положительную сторону, а в случае, когда $\mathcal{X}$ представляет собой поверхность евклидова пространства с параметризацией (13), — поле координатных векторов r_u.]

Пусть, далее, Γ — произвольная жорданова кривая на поверхности $\mathcal{X}$ с параметрическими уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, а $\zeta = \zeta(t)$ — непрерывное векторное поле на кривой Γ, ни в одной точке этой кривой не равное нулю.

Тогда для любого $t \in I$ однозначно определен угол $\widehat{\theta}(t)$ от вектора $\alpha(t)$ к вектору $\zeta(t)$, принадлежащий полуинтервалу $(-\pi, \pi]$.

Вообще говоря, функция $\widehat{\theta}(t)$ разрывна — в отдельных точках она может испытывать скачок в $\pm 2\pi$.

Задача 5. Докажите что *существует одна и только одна непрерывная функция θ: $I \to \mathbb{R}$, обладающая тем свойством, что $\theta(0) = \widehat{\theta}(0)$, и такая, что*

$$\theta(t) - \widehat{\theta}(t) = 2\pi N \quad \text{для любого } t \in I, \tag{16}$$

где N — некоторое целое число (зависящее от t).

Мы будем называть функцию $\theta(t)$ *угловой функцией* поля ζ на кривой Γ (при данном референтном поле α), а разность

$$\Delta_\Gamma(\zeta) = \theta(1) - \theta(0)$$

ее значений в начальной и конечной точках кривой Γ — *поворотом поля ζ на Γ*.

Если кривая Γ замкнута и $\zeta(0) = \zeta(1)$, то в силу свойства (16) отношение

$$V_\Gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma(\zeta) \tag{17}$$

является целым числом. Оно называется *вращением поля ζ вдоль кривой* Γ.

Задача 6. Пусть для простоты коэффициент F первой квадратичной формы поверхности равен нулю (координатная сеть ортогональна). Покажите, что в этом случае *для вращения произвольного гладкого поля ζ*

вдоль замкнутой кривой Г *имеет место формула*

$$V_\Gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_\Gamma \frac{(\sqrt{E}\xi)d(\sqrt{G}\eta) - (\sqrt{G}\eta)d(\sqrt{E}\xi)}{E\xi^2 + G\eta^2}, \tag{18}$$

где ξ *и* η — *компоненты поля* ζ. Подчеркнем, что в этой формуле кривая Г гладкой не предполагается.

Пусть кривая Г вместе с полем ζ непрерывно деформируется (подвергается гомотопии), причем в процессе деформации кривая Г остается замкнутой, а поле ζ нигде не обращается в нуль. (Такие деформации мы назовем *допустимыми.*) Более того, пусть непрерывно варьируется референтное поле α и даже заданная на $\mathcal{X}$ риманова метрика ds^2, т. е. непрерывно меняются (с сохранением свойства положительной определенности — неравенств $E > 0$ и $EG - F^2 > 0$) коэффициенты E, F, G этой метрики (для поверхности в евклидовом пространстве это означает, что поверхность подвергается *изотопии* — непрерывной деформации, изменяющей, вообще говоря, длины кривых на поверхности и углы между ними). Тогда вращение $V_\Gamma(\zeta)$ поля ζ также будет меняться непрерывно и, следовательно, являясь целым числом, останется прежним. Таким образом, *вращение* $V_\Gamma(\zeta)$ *не меняется при всех допустимых деформациях* (кривой Г, поля ζ, метрики ds^2 и поля α).

Задача 7. Покажите, что любые два референтных поля (а также любые две римановы метрики ds^2) деформируемы друг в друга (на поверхности, диффеоморфной кругу).

Поэтому *вращение* $V_\Gamma(\zeta)$ *фактически не зависит ни от поля* α, *ни от метрики* (5).

Вращение поля касательных векторов Если кривая Г гладка, то на ней определено *поле касательных векторов* τ (с компонентами $\dot{u}$ и $\dot{v}$). Если кривая Г регулярна, то это поле всюду отлично от нуля, и потому — если кривая Г замкнута — определено его вращение $V_\Gamma(\tau)$.

Лемма 1. *Для произвольной замкнутой регулярной кривой* Г *вращение поля касательных векторов равно единице:*

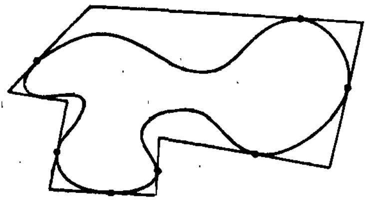
$$V_\Gamma(\tau) = 1. \tag{19}$$

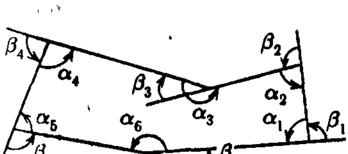
Мы дадим два доказательства этой леммы.

Первое доказательство. Согласно утверждению задачи 7, мы без ограничения общности можем считать поверхность $\mathcal{X}$ евклидовой плоскостью (или открытым кругом плоскости), а референтное поле — постоянным полем $\dfrac{\partial}{\partial u}$. Тогда для любого $t \in I$ тангенс $\operatorname{tg}\theta(t)$ значения $\theta(t)$ угловой функции поля τ в точке t будет не чем иным, как наклоном касательной к кривой Γ в ее точке $\Gamma(t)$ (с координатами $u(t)$, $v(t)$). Поэтому будет существовать такое разбиение

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1 \tag{20}$$

отрезка I, что для любого $k = 1, \ldots, n$ угол (из полуинтервала $(-\pi, \pi]$) между ориентированными касательными к кривой Γ (т. е. между соответствующими касательными векторами) в точках $\Gamma(t_{k-1})$ и $\Gamma(t_k)$ равен приращению $\theta(t_k) - \theta(t_{k-1})$ этой функции. Более того, наглядно очевидно, что при достаточной мелкости разбиения (20) касательные в точках $\Gamma(t_k)$ при продолжении до пересечения с касательными в точках $\Gamma(t_{k-1})$ и $\Gamma(t_{k+1})$ (условно считается, что $t_{n+1} = t_1$) будут образовывать простой (не имеющий самопересечений) замкнутый многоугольник (с внешними углами $\theta(t_k) - \theta(t_{k-1})$).





Поскольку сумма внешних углов произвольного простого многоугольника равна 2π (по известной теореме элементарной геометрии сумма внутренних углов простого n-угольника равна $(n-2)\pi$, а каждый внутренний угол α_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, связан со смежным внешним углом β_k соотношением $\alpha_k + \beta_k = \pi$; поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k = \sum_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k) = n\pi - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n\pi - (n-2)\pi = 2\pi),$$

это доказывает, что

$$\theta(1) - \theta(0) = \sum_{k=1}^{n} [\theta(t_k) - \theta(t_{k-1})] = 2\pi,$$

т. е. что $V_\Gamma(\tau) = 1$. □

Апелляция к наглядной очевидности в этом доказательстве устраняется с трудом. В следующем доказательстве демонстрируется общий метод, как это можно (и нужно) делать.

Второе доказательство. Введем на евклидовой плоскости комплексную координату z. Тогда кривая Γ будет иметь уравнение вида $z = z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, а каждое векторное поле ζ на Γ будет не чем иным, как комплекснозначной функцией ζ на Γ.

Задача 8. Покажите, что

$$V_\Gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \oint_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

(Ср. формулу (18).)

Из теории функций комплексного переменного известна теорема Римана, согласно которой на области G, ограниченной простой кривой Γ, существует голоморфная функция $w = w(z)$, осуществляющая конформное отображение этой области на единичный круг $|w| < 1$. При этом по теореме о соответствии границ функция $w(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$ и осуществляет ее гомеоморфизм на замкнутый круг $|w| = 1$. Следовательно, уравнение

$$w = w(z(t))$$

задает на w-плоскости окружность $w\overline{w} = 1$. Без ограничения общности можно, конечно, считать, что параметр t на кривой Γ выбран таким образом, что на окружности $w\overline{w} = 1$ он является натуральным параметром, и потому производная $\dot{w}(t)$ по t функции $w(t) = w(z(t))$ в каждой точке t равна $iw(t)$. С другой стороны по правилу дифференцирования сложной функции

$$\dot{w}(t) = w'(z(t))\dot{z}(t)$$

и, следовательно,

$$\dot{z}(t) = \frac{iw(z(t))}{w'(z(t))}.$$

Это означает, что векторное поле τ на кривой Γ (задающееся функцией $\dot z(t)$) является ограничением на Γ функции $\zeta = i\frac{w}{w'}$, и потому

$$V_\Gamma(\tau) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\oint_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\oint_\Gamma \left(\frac{dw}{w} - \frac{dw'}{w'}\right)$$

(см. задачу 8). Но функция w' не имеет нулей в области G, и, значит, по теореме Коши

$$\oint_\Gamma \frac{dw'}{w'} = 0.$$

Следовательно,

$$V_\Gamma(\tau) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\oint_\Gamma \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\oint_{|w|=1} \frac{dw}{w} = 1. \quad \square$$

Здесь вся трудность доказательства переложена на плечи теории функций комплексного переменного.

Лемму 1 можно обобщить и на кривые, которые лишь *кусочно регулярны*, т. е. составлены из конечного числа регулярных дуг. Каждая такая кривая имеет конечное число *точек излома*, в которых касательный вектор скачком поворачивается на некоторый угол. Общий поворот касательного вектора на кривой (являющийся суммой поворотов на регулярных дугах и скачков в точках излома) мы снова обозначим через $\Delta_\Gamma(\tau) = 2\pi V_\Gamma(\tau)$. Так как разбиения (20), обладающие указанными выше свойствами, существуют, очевидно, и для кусочно регулярных кривых (нужно лишь точки разбиения выбирать вне точек излома), то *лемма 1 справедлива для любых кусочно регулярных кривых.*

Заметим, что для прямолинейных многоугольников на евклидовой плоскости обобщенная таким образом лемма 1 сводится к теореме о сумме внутренних углов n-угольника.

Лемма 1 позволяет отказаться от референтного поля (вносящего неприятный элемент произвола) и измерять все углы от касательных векторов, т. е. для произвольного векторного поля ζ на кривой Γ заменить угловую функцию $\theta(t)$ функцией $\vartheta(t) = \theta(t) - \theta_\tau(t)$, где θ_τ — угловая функция поля касательных векторов. Это изменит вращение V_Γ точно на единицу.

Формула Гаусса — Бонне Пусть поле ζ состоит из параллельных (вдоль кривой Г) векторов.

В случае, когда поверхность $\mathcal{X}$ представляет собой плоскость и, значит, все векторы $\zeta(t)$ параллельны в обычном элементарно-геометрическом смысле (равны как свободные векторы), производная $\dot\vartheta(t)$ функции $\vartheta(t)$ является (с точностью до знака) не чем иным, как кривизной плоской кривой Г (см. лекцию III.2). В общем случае эта производная, взятая с противоположным знаком, называется *геодезической кривизной* кривой Г на поверхности $\mathcal{X}$ и обозначается символом $k_g(t)$.

Заметим, что *от выбора поля ζ кривизна k_g не зависит* (но зависит от ориентации кривой Г).

Очевидно, что *кривая* Г *тогда и только тогда является геодезической, когда ее геодезическая кривизна k_g тождественно равна нулю.*

Так как для поля ζ параллельных векторов $\dot\vartheta(t) = -k_g(t)$, то

$$\vartheta(1) - \vartheta(0) = -\int_\Gamma k_g\,dt,$$

и потому

$$\Delta_\Gamma(\zeta) = \theta(1) - \theta(0) = [\theta_\tau(1) - \theta_\tau(0)] + [\vartheta(1) - \vartheta(0)] = \Delta_\Gamma(\tau) - \int_\Gamma k_g\,dt,$$

т. е.

$$\Delta_\Gamma(\zeta) + \int_\Gamma k_g dt = \Delta_\Gamma(\tau)$$

(кривую Г мы пока замкнутой не предполагаем).

В случае, когда кривая Г кусочно регулярна, эта формула приобретает, очевидно, вид

$$\Delta_\Gamma(\zeta) + \int_\Gamma k_g dt + \sum\theta_i = \Delta_\Gamma(\tau),$$

где $\sum\theta_i$ — сумма углов θ_i поворота касательного вектора в точках излома. С другой стороны, если кривая Г замкнута (и, следовательно, — ввиду элементарности поверхности $\mathcal{X}$ — ограничивает некоторую область G), то поворот $\Delta_\Gamma(\zeta)$ поля ζ является не чем иным, как углом φ из формулы (15), и потому согласно этой формуле равен интегралу по области G от кривизны K. Ввиду леммы 1 это доказывает, что

$$\iint\limits_G K d\sigma + \oint\limits_\Gamma k_g\, dt + \sum \theta_i = 2\pi. \tag{21}$$

***Определение* 2**. Область G на произвольной (вообще говоря, не элементарной) поверхности $\mathcal{X}$ называется *криволинейным многоугольником*, если она ограничена простой кусочно регулярной кривой Γ и диффеоморфна кругу. (Для областей на элементарной поверхности второе условие вытекает из первого, но в общем случае эти условия независимы.) Точки излома границы Γ называются *вершинами* многоугольника G, а углы θ_i поворота касательной к кривой Γ в этих точках — в предположении, что многоугольник G, а, значит, и кривая Γ ориентированы — *внешними углами* многоугольника. Дополнительные углы $\pi - \theta_i$ называются *внутренними углами* многоугольника, а число

$$\delta G = \Sigma(\pi - \theta_i) - (n - 2)\pi = 2\pi - \sum \theta_i,$$

где n — число вершин многоугольника G, — его *угловым избытком*.

Формула (21) может быть теперь переписана в следующем виде

$$\delta G = \iint\limits_G K\, d\sigma + \oint\limits_\Gamma k_g dt. \tag{21$'$}$$

По доказанному она справедлива для любого ориентированного криволинейного многоугольника G, содержащегося в некоторой карте поверхности $\mathcal{X}$.

Задача 9. Докажите, что последняя оговорка излишня, т. е. что *формула* (21$'$) *справедлива для любого ориентированного криволинейного многоугольника на поверхности* $\mathcal{X}$. [Указание. Многоугольник G может быть разложен на многоугольники, каждый из которых содержится в некоторой карте.]

Формула (21) (или (21$'$)) называется **формулой Гаусса—Бонне**.

В частном случае *геодезического многоугольника* G (граница которого состоит из дуг геодезических) криволинейный интеграл по границе равен нулю и формула (21$'$)

приобретает вид

$$\delta G = \iint\limits_G K d\sigma \tag{21''}$$

(*угловой избыток геодезического многоугольника G равен интегралу по G от гауссовой кривизны K*).

При $K = \text{const}$ (для поверхностей постоянной кривизны; см. лекцию III.5) отсюда следует, что *угловой избыток геодезического многоугольника равен его площади, умноженной на K*. В частности, при $K = 0$ (на евклидовой плоскости) угловой избыток всегда равен нулю, при $K > 0$ (на сфере) угловой избыток положителен, а при $K < 0$ (на псевдосфере) угловой избыток отрицателен (в последнем случае обычно рассматривают величину $-\delta G$ и называют ее *угловым недостатком*).

Задача 10. Докажите последние утверждения в рамках соответствующих геометрий (евклидовой, сферической и Лобачевского). [Указание. В первую очередь рассмотрите случай треугольника. Конечно, случай евклидовой геометрии тривиален.]

Триангулируемые поверхности

Формула Гаусса — Бонне имеет интересные и важные чисто топологические следствия.

Определение 3. Двумерное гладкое многообразие (поверхность) называется *триангулируемым*, если существует такое конечное семейство точек $p_1, \ldots, p_a \in \mathcal{X}$ и такое семейство простых дуг $\gamma_1, \ldots, \gamma_b$ с концами в этих точках (и попарно не имеющих никаких других общих точек), что любая точка поверхности $\mathcal{X}$, не принадлежащая дугам $\gamma_1, \ldots, \gamma_b$, принадлежит одному (и только одному) криволинейному многоугольнику, граница которого составлена из некоторых этих дуг (короче говоря, поверхность триангулируема, если она может быть разложена в объединение конечного числа криволинейных многоугольников $G_1, \ldots, G_c$, соприкасающихся лишь по сторонам).

Задача 11. Покажите, что *что для любой триангулируемой поверхности существует ее разложение $\{G_1, \ldots, G_c\}$, состоящее из криволинейных треугольников.*

Это объясняет термин «триангулируемая поверхность».

Ясно, что любая триангулируемая поверхность компактна.

Для гладких поверхностей верно и обратное.

Лемма 2. *Любая компактная гладкая поверхность $\mathcal{X}$ триангулируема.*

Доказательство. Введем на поверхности $\mathcal{X}$ риманову метрику ρ. Рассуждение, доказывающее существование числа Морса (см. следствие 2 предложения 5 лекции 12), применимо не только к двуэлементным, но и к трехэлементным множествам. Поэтому для поверхности $\mathcal{X}$ существует такое число ρ_0, что любые три точки $p, q, r \in \mathcal{X}$, для которых

$$\rho(p,q) < \rho_0, \quad \rho(p,r) < \rho_0, \quad \rho(q,r) < \rho_0,$$

содержатся в одной нормальной выпуклой окрестности, и потому являются вершинами некоторого *геодезического треугольника* (открытого множества, ограниченного тремя геодезическими сегментами $\gamma_{p,q}, \gamma_{p,r}, \gamma_{q,r}$).

Несложное рассуждение (проведите его!) показывает теперь, что каждая точка поверхности $\mathcal{X}$ принадлежит некоторому геодезическому треугольнику, и, значит, — ввиду компактности поверхности $\mathcal{X}$ — что поверхность покрывается конечным семейством геодезических треугольников (вообще говоря, пересекающихся). Всевозможные непустые пересечения этих треугольников и будут составлять триангуляцию поверхности $\mathcal{X}$. $\square$

Замечание 1. Можно показать (это трудная теорема Радо), что утверждение о триангулируемости справедливо для любой (вообще говоря, негладкой) компактной поверхности, и, более того, если допустить так называемые *бесконечные триангуляции*, то триангулируемой окажется вообще любая поверхность (двумерное паракомпактное хаусдорфово топологическое многообразие).

Многоугольники $G_1, \ldots, G_c$ называются *гранями*, дуги $\gamma_1, \ldots, \gamma_b$ — *ребрами*, а точки $p_1, \ldots, p_a$ — *вершинами* поверхности $\mathcal{X}$ (или, точнее, данного ее разложения $\{G_1, \ldots, G_c\}$). Число

$$\chi(\mathcal{X}) = a - b + c$$

(число вершин минус число ребер плюс число граней) называется ***эйлеровой характеристикой*** компактной поверхности $\mathcal{X}$.

Теорема Гаусса — Бонне

Предложение 4. *Для компактной ориентируемой гладкой поверхности $\mathcal{X}$ эйлерова характеристика определена корректно (не зависит от выбора разложения $\{G_1, \dots, G_c\}$ поверхности $\mathcal{X}$ на многоугольники) и является топологическим инвариантом (одна и та же для всех диффеоморфных поверхностей).*

Доказательство. Выбрав на поверхности ориентацию и риманову метрику, применим к каждому криволинейному многоугольнику некоторой ее триангуляции $\{G_1, \dots, G_c\}$ формулу Гаусса — Бонне:

$$\delta G_i = \iint\limits_{G_i} K\,d\sigma + \oint\limits_{\Gamma_i} k_g\,dt.$$

(Предполагается, что ориентации многоугольников индуцированы ориентацией поверхности.) Сложив все эти формулы, мы получим равенство вида

$$\sum_{i=1}^{c} \delta G_i = \sum_{i=1}^{c} \iint\limits_{G_i} K\,d\sigma + \sum_{i=1}^{c} \oint\limits_{\Gamma_i} k_g\,dt.$$

Первая сумма справа равна полной кривизне

$$\iint\limits_{\mathcal{X}} K\,d\sigma$$

поверхности $\mathcal{X}$. Что же касается второй суммы, то, поскольку для каждого ребра γ_k оба многоугольника G_i, примыкающие к этому ребру, индуцируют на ребре γ_k противоположные ориентации, эта сумма равна сумме интегралов от k_g по парам противоположно ориентированных дуг и, значит, равна нулю.

С другой стороны, сумма слева равна

$$\sum_{i=1}^{c} \left[\sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} - (n_i - 2)\pi \right], \tag{22}$$

где $\beta_{i1}, \dots, \beta_{in_i}$ — внутренние углы многоугольника G_i, а n_i — число его сторон.

Но так как сумма углов, сходящихся в каждой вершине, равна 2π, то

$$\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} = 2\pi a,$$

а так как каждое ребро γ_k является стороной двух и только двух многоугольников G_i, то

$$\sum_{i=1}^{c} n_i = 2b.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{c} (n_i - 2)\pi = 2\pi(b - c),$$

и сумма (22) равна $2\pi(a - b + c) = 2\pi\chi(\mathcal{X})$.

Этим доказано, что

$$\chi(\mathcal{X}) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathcal{X}} K\, d\sigma. \tag{23}$$

Предложение 4 следует отсюда непосредственно, поскольку правая часть этого равенства от выбора многоугольников $G_1, \ldots, G_c$ не зависит. $\square$

Утверждение о справедливости формулы (23) называется *теоремой Гаусса — Бонне.*

З а м е ч а н и е 2. Эйлерова характеристика определена корректно и для неориентируемых многообразий, но доказательство этого факта требует совсем других методов.