ЛЕКЦИЯ 17

Характеристические числа. — Характеристическое число Эйлера. — Оператор Ходжа. — Число Эйлера $4m$-мерного многообразия. — Эйлерова характеристика многообразий произвольной размерности. — Теорема о сигнатуре. — Тензор Риччи риманова пространства. — Тензор Риччи тензора Бианки. — Тензоры Эйнштейна и Вейля. — Случай $n = 3$. — Пространства Эйнштейна. — Критерий Томаса.

Характеристические числа

Из теоремы Гаусса — Бонне предыдущей лекции непосредственно следует, что *полная кривизна*

$$\iint_{\mathcal{X}} K\,d\sigma \qquad (1)$$

поверхности $\mathcal{X}$ не зависит от выбора на $\mathcal{X}$ римановой метрики (*одна и та же для всех метрик*). Этот факт может быть независимо выведен также из результатов лекции IV.23.

Пусть $\mathcal{X}$ — пока произвольное гладкое многообразие.

Определение 1. Характеристические классы (см. лекцию IV.22) касательного расслоения многообразия $\mathcal{X}$ называются *характеристическими классами многообразия $\mathcal{X}$*.

В случае, когда многообразие $\mathcal{X}$ компактно и ориентируемо, группа $H^n\mathcal{X}$, $n = \dim\mathcal{X}$, изоморфна, как мы знаем (см. следствие 1 теоремы 2 лекции III.25), группе $\mathbb{R}$. Изоморфизм зависит от ориентации и при выбранной ориентации задается формулой $c \mapsto c[\mathcal{X}]$, где

$$c[\mathcal{X}] = \int_{\mathcal{X}} c, \qquad c \in H^n\mathcal{X}.$$

[Символом $\int_{\mathcal{X}} c$ обозначается интеграл $\int_{\mathcal{X}} \omega$, где ω — произвольная замкнутая форма класса c. Как мы знаем (см. лекцию III.29), последний интеграл не зависит от выбора формы ω.]

Для каждого характеристического класса c степени n число $c[\mathcal{X}]$ называется *характеристическим c-числом* ориентированного многообразия $\mathcal{X}$. (Ср. в лекции IV.23 определения характеристических чисел Чженя и Понтрягина).

Числа $c[\mathcal{X}]$ зависят от ориентации многообразия $\mathcal{X}$ и при смене ее меняют знак:

$$c[-\mathcal{X}] = -c[\mathcal{X}].$$

Характеристическое число Эйлера Исключение составляет *характеристическое число Эйлера*

$$e[\mathcal{X}] = \int_{\mathcal{X}} e(\tau_{\mathcal{X}}),$$

которое, как непосредственно следует из утверждения задачи 6 лекции IV.23, не зависит от выбора ориентации многообразия $\mathcal{X}$ (и, значит, фактически определено для любого компактного ориентируемого многообразия $\mathcal{X}$).

По определению, чтобы найти $e[\mathcal{X}]$, мы должны выбрать в $\tau_{\mathcal{X}}$ некоторую связность. Естественно взять связность Леви-Чивита, отвечающую некоторой римановой метрике g на $\mathcal{X}$. Тогда при $n = 2l$ для числа $e[\mathcal{X}]$ будет иметь место формула

$$e[\mathcal{X}] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^l \int_{\mathcal{X}} \operatorname{Pf} R,$$

где $\operatorname{Pf} R$ — дифференциальная форма, на каждой координатной окрестности U являющаяся пфаффианом $\operatorname{Pf}\widetilde{\Omega}$ матрицы $\widetilde{\Omega}$ форм кривизны метрики g в некотором положительно ориентированном ортонормированном (но, вообще говоря, не голономном!) базисе $X_1, \ldots, X_n$ модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ над окрестностью U. (См. определение 5 лекции IV.23; мы опускаем теперь множитель $(-1)^l$.)

Пусть C — матрица перехода от ортонормированного базиса $X_1, \ldots, X_n$ к одноименному голономному базису

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x^n}. \tag{2}$$

Тогда согласно формуле (8) лекции 15

$$C^T \widetilde{\Omega} C = \widehat{\Omega},$$

где $\widehat{\Omega}$ — матрица с элементами

$$\Omega_{ij} = \sum_{k<l} R_{ij,kl} dx^k \wedge dx^l. \tag{3}$$

Поэтому (см. формулу (8) лекции II.10)

$$\operatorname{Pf}\widehat{\Omega} = \det C \cdot \operatorname{Pf}\widetilde{\Omega}.$$

Поскольку $(\det C)^2 = \det g$, где g — матрица $\|g_{ij}\|$, этим доказано, что *в каждой карте* $(U, x^1, \ldots, x^n)$ *форма* $\operatorname{Pf} R$ *имеет вид*

$$\frac{1}{\sqrt{\det g}} \operatorname{Pf}\widehat{\Omega}, \tag{4}$$

где $\widehat{\Omega}$ — *матрица с элементами* (3).

При $n = 2$ (и $l = 1$) пфаффианом $\operatorname{Pf}\widehat{\Omega}$ является форма

$$\widehat{\Omega}_{12} = R_{12,12}\, du \wedge dv,$$

т. е. (см. формулу (10′′) лекции 16) форма

$$K(EG - F^2)\, du \wedge dv,$$

где $EG - F^2 = \det g$. Следовательно, при $n = 2$ форма (4) имеет вид

$$K\sqrt{EG - F^2}\, du \wedge dv.$$

Поскольку $\sqrt{EG - F^2}\, du \wedge dv$ — это в точности элемент площади поверхности $\mathcal{X}$, тем самым доказано, что *при* $n = 2$ *число Эйлера* $e[\mathcal{X}]$ *выражается формулой*

$$e[\mathcal{X}] = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{X}} K\, d\sigma. \tag{5}$$

Этим, во-первых, заново установлена независимость интеграла (1) от выбора метрики, а, во-вторых, доказано, что *характеристическое число Эйлера совпадает с эйлеровой характеристикой*:

$$e[\mathcal{X}] = \chi(\mathcal{X}). \tag{6}$$

В частности, это объясняет, почему названия чисел $e[\mathcal{X}]$ и $\chi(\mathcal{X})$ по существу идентичны.

Оператор Ходжа

Аналог формулы (5) имеет место для любого n, ио чтобы его вывести, иадо серьезио потрудиться. Мы ограничимся случаем $n = 4m$.

Из линейной алгебры мы зиаем (см. теорему 1 лекции II.9б), что для любого n-мериого ориеитированного евклидова простраиства $\mathcal{V}$ и любого k, $0 \leqslant k \leqslant n$, на линейном пространстве $\Lambda^k\mathcal{V}$ кососимметрических теизоров степени k действует оператор Ходжа $*$, переводящий каждый тензор из $\Lambda^k\mathcal{V}$ в теизор из $\Lambda^{n-k}\mathcal{V}$. В частиости, для любого n-мериого ориеитроваииого риманова пространства $\mathcal{X}$ оператор $*$ действует иа пространствах $\Lambda^k\mathsf{T}_p\mathcal{X} = (\Lambda^k\mathcal{X})_p$, $p \in \mathcal{X}$. Поэтому формула

$$(*X)_p = *(X_p), \qquad p \in \mathcal{X}, \quad X \in \Lambda^k\mathcal{X},$$

корректно определяет $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейиый оператор

$$*\colon \Lambda^k\mathcal{X} \to \Lambda^{n-k}\mathcal{X}, \tag{7}$$

также называемый *оператором Ходжа.*

В частности, при $n = 2l$ и $k = l$

$$*\colon \Lambda^l\mathcal{X} \to \Lambda^l\mathcal{X}. \tag{8}$$

При этом согласио формуле (17) лекции II.9б

$$*^2 = (-1)^{(n+1)k} \tag{9}$$

(и, в частности, $*^2 = (-1)^l$ при $k = l$).

Элемеит объема dV риманова простраиства $\mathcal{X}$, трактуемый как кососимметрический теизор степени n (типа $(0, n)$) на $\mathcal{X}$, мы будем в этой лекции обозначать символом $\mathfrak{e}$.

Задача 1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — ортоиормироваиный положительио ориентироваиный базис модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ иад координатной окрестностью U (т. е. такой, что в любой точке $p \in U$ векторы $(X_1)_p, \ldots, (X_n)_p$ составляют положительно ориеитироваиный базис пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$). Покажите, что

$$\mathfrak{e} = X_1 \wedge \ldots \wedge X_n \qquad \text{над } U.$$

Теизор $\mathfrak{e}$ составляет базис $\mathsf{F}\mathcal{X}$-модуля $\Lambda^n\mathcal{X}$ иад $\mathcal{X}$, т. е. произвольиый кососимметрический теизор степени n

на $\mathcal{X}$ единственным образом представляется в виде $f\mathfrak{e}$, где $f \in \mathsf{F}\mathcal{X}$.

В частности, для любых тензоров $X, Y \in \Lambda^k\mathcal{X}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, тензор $X \wedge *Y$, имея степень n, представляется в таком виде. Соответствующую функцию f мы обозначим через $\langle X, Y \rangle$ Таким образом, по определению

$$X \wedge *Y = \langle X, Y \rangle \mathfrak{e}. \tag{10}$$

Задача 2. Покажите что *функционал* $X, Y \mapsto \langle X, Y \rangle$ *является скалярным умножением*, т. е. что этот функционал билинеен, симметричен и положительно определен (в том смысле, что число $\langle X, X \rangle$ положительно в любой точке, где $X \neq 0$). Покажите также, что *при* $k = 2$ *это скалярное умножение совпадает с умножением, определенным формулой* (1) *лекции* 16.

Для любых индексов $i_1, \ldots, i_k$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, мы положим

$$X_{i_1 \ldots i_k} = X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_k},$$

где, как и выше, $X_1, \ldots, X_n$ — векторные поля, составляющие положительно ориентированный ортонормированный базис модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ над координатной окрестностью U.

Задача 3. Покажите, что *тензоры* $X_{i_1 \ldots i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, *составляют ортонормированный базис модуля* $\Lambda^k\mathcal{X}$ *над* U.

Задача 4. Покажите, что *при* $n = 4m$ *оператор Ходжа* (8) *самосопряжен* (т. е. $\langle *X, Y \rangle = \langle X, *Y \rangle$ для любых тензоров $X, Y \in \Lambda^{2m}\mathcal{X}$).

Число Эйлера $4m$-мерного многообразия

Кроме этих сравнительно простых общих сведений об операторах Ходжа, имеющих безусловно и самостоятельный интерес, нам понадобятся также некоторые довольно головоломные вычисления с кососимметрическими матрицами более специального характера.

Задача 5. Докажите, что *для пфаффиана* $\operatorname{Pf} A$ *кососимметрической матрицы* $A = \|a^i_j\|$ *порядка* $n = 2l$ *имеет место формула*

$$\operatorname{Pf} A = \frac{1}{2^l l!} \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma a^{\sigma(1)}_{\sigma(2)} \ldots a^{\sigma(n-1)}_{\sigma(n)}, \tag{11}$$

где суммирование распространено на все подстановки σ степени n, а ε_σ, как всегда, — знак подстановки σ. [Указание. Докажите, что многочлен (11) удовлетворяет тождеству $\mathrm{Pf}(C^T AC) = \det C \cdot \mathrm{Pf}\, A$. Выведите отсюда, что он обладает характеристическими свойствами пфаффиана из предложения 2 лекции II.10.]

Задача 6. Покажите, что *для любого тензора Бианки R на n-мерном ($n = 2l$) римановом пространстве $\mathcal{X}$ и каждого k, $1 \leqslant k \leqslant l$, существует единственный $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейный оператор*

$$R_k\colon \Lambda^{2k}\mathcal{X} \to \Lambda^{2k}\mathcal{X},$$

обладающий тем свойством, что для любых векторных полей $X_1, \ldots, X_{2k} \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ имеет место формула

$$R_k(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{2k}) = \frac{1}{(2k)!}\sum_\rho \varepsilon_\rho R(X_{\rho(1)} \wedge X_{\rho(2)}) \wedge \ldots \wedge R(X_{\rho(2k-1)} \wedge X_{\rho(2k)}), \tag{12}$$

где суммирование распространено на все подстановки ρ степени $2k$. [Указание. Формула (12) однозначно определяет компоненты тензора R_k в каждой карте.]

Покажите, что *оператор (12) самосопряжен.*

Задача 7. Пусть, как всегда, $\Omega = \|\Omega^i_j\|$ — матрица форм кривизны метрики g в ортонормированном базисе $X_1, \ldots, X_n$ модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ над координатной окрестностью U, и пусть, как и выше, $n = 2l$. Покажите, что

$$\mathrm{Pf}\,\Omega = \frac{(2l)!}{2^l l!} R_l(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n), \tag{13}$$

где R_l — тензор R_k из задачи 6 при $k = l$, построенный по риманову тензору кривизны пространства $\mathcal{X}$. [Указание. Так как базис $X_1, \ldots, X_n$ ортонормирован, то $\Omega^i_j(X_p, X_q) = R(X_i, X_j, X_p, X_q)$ для любых i, j, p, q. Поэтому согласно формуле (11) для любых полей $Y_1, \ldots, Y_n$ имеет место равенство

$$\mathrm{Pf}\,\Omega(Y_1, \ldots, Y_n) =$$
$$= \frac{1}{2^l l!}\sum_\sigma \varepsilon_\sigma (\Omega^{\sigma(1)}_{\sigma(2)} \wedge \ldots \wedge \Omega^{\sigma(n-1)}_{\sigma(n)})(Y_1, \ldots, Y_n) =$$
$$= \frac{1}{4^l l!}\sum_{\sigma,\rho} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\rho \Omega^{\sigma(1)}_{\sigma(2)}(Y_{\rho(1)}, Y_{\rho(2)}) \ldots \Omega^{\sigma(n-1)}_{\sigma(n)}(Y_{\rho(n-1)}, Y_{\rho(n)}) =$$
$$= \frac{1}{4^l l!}\sum_{\sigma,\rho} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\rho R(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, Y_{\rho(1)}, Y_{\rho(2)}) \ldots R(X_{\sigma(n-1)}, X_{\sigma(n)}, Y_{\rho(n-1)}, Y_{\rho(n)}).$$

С другой стороны,

$$R_l(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n)(Y_1, \ldots, Y_n) =$$
$$= \frac{1}{(2l)!}\left(\sum_\rho \varepsilon_\rho R(X_{\rho(1)} \wedge X_{\rho(2)}) \wedge \ldots \wedge R(X_{\rho(n-1)} \wedge X_{\rho(n)})\right)(Y_1, \ldots, Y_n) =$$
$$= \frac{1}{2^l (2l)!}\sum_\rho \sum_\sigma \varepsilon_\rho \varepsilon_\sigma R(X_{\rho(1)}, X_{\rho(2)}, Y_{\sigma(1)}, Y_{\sigma(2)}) \ldots$$
$$\ldots R(X_{\rho(n-1)}, X_{\rho(n)}, Y_{\sigma(n-1)}, Y_{\sigma(n)}).]$$

Задача 8. Пусть $n = 4m$ (и, значит, $l = 2m$). Докажите, что в введенных выше обозначениях

$$R_l(X_1 \wedge \ldots \wedge X_n) = \frac{(l!)^2}{(2l)!} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_l\leqslant n} \cdots \sum R_m(X_{i_1\ldots i_l}) \wedge R_m(*X_{i_1\ldots i_l}). \qquad (14)$$

[Указание. Пусть ρ — произвольная подстановка степени n, и пусть $i_1 < \ldots < i_l$ — числа $\rho(1), \ldots, \rho(l)$, расположенные в порядке возрастания. Аналогично, пусть $j_1 < \ldots < j_l$ — расположенные в порядке возрастания числа $\rho(l+1), \ldots, \rho(n)$. Пусть, далее, α и β — такие подстановки степени l, что

$$i_{\alpha(1)} = \rho(1), \ldots, i_{\alpha(l)} = \rho(l), \quad j_{\beta(1)} = \rho(l+1), \ldots, j_{\beta(l)} = \rho(n).$$

Числа $i_1, \ldots, i_l$ и подстановки α, β однозначно определяют подстановку ρ, причем $\epsilon_\rho = (-1)^w \epsilon_\alpha \epsilon_\beta$, где w — число инверсий в перестановке $(i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_l)$.]

В силу формулы (10) и самосопряженности операторов $*$ и R_m

$$\begin{aligned} R_m(X_{i_1\ldots i_l}) \wedge R_m(*X_{i_1\ldots i_l}) &= \\ &= \langle R_m(X_{i_1\ldots i_l}), *R_m(*X_{i_1\ldots i_l})\rangle e = \\ &= \langle *R_m * R_m(X_{i_1\ldots i_l}), X_{i_1\ldots i_l}\rangle e, \end{aligned}$$

а в силу ортонормированности базиса $\{X_{i_1\ldots i_l}, 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant n\}$

$$\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_l\leqslant n} \cdots \sum \langle *R_m * R_m(X_{i_1\ldots i_l}), X_{i_1\ldots i_l}\rangle = \mathrm{Tr}(*R_m * R_m).$$

Поэтому, снова обозначив элемент объема e традиционным символом dV, мы ввиду формул (13) и (14) немедленно получим, что

$$\mathrm{Pf}\, R = \frac{l!}{2^l} \mathrm{Tr}(*R_m * R_m) dV$$

(на U а, значит, и на всем $\mathcal{X}$), т. е. что

$$e[\mathcal{X}] = \frac{l!}{(4\pi)^l} \int_{\mathcal{X}} \mathrm{Tr}(*R_m * R_m) dV. \qquad (15)$$

Это и есть аналог формулы (5) при $n = 4m$.

Эйлерова характеристика многообразий произвольной размерности

Имеет ли место для любого n аналог формулы (6)? Здесь прежде всего мы для любого n должны определить ее правую часть $\chi(\mathcal{X})$.

Можно показать (это трудная теорема!), что для любой компактной триангулируемой поверхности $\mathcal{X}$ эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{X})$ равна альтернированной сумме $h^0 - h^1 + h^2$ чисел $h^i = \dim H^i\mathcal{X}$ (т. е. — в случае, когда поверхность $\mathcal{X}$ связна и компактна — равна $2 - h^1$).

Для многообразий $\mathcal{X}$ произвольной размерности это наводит на мысль определить их эйлерову характеристику $\chi(\mathcal{X})$ формулой

$$\chi(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i h^i, \qquad h^i = \dim H^i\mathcal{X}.$$

[Если многообразие компактно, то согласно следствию 3 теоремы 3 лекции III.22 все линеалы $H^i\mathcal{X}$ конечномерны, и, значит, числа h^i определены.]

В топологии доказывается, что числа h^i, а, значит, и их альтернативная сумма $\chi(\mathcal{X})$ являются топологическими инвариантами, т. е. они одни и те же для любых гомеоморфных (даже не гладко!) многообразий.

Оказывается (это снова трудная теорема!), что при таком определении характеристики $\chi(\mathcal{X})$ *равенство* (6) *сохраняется для компактных и ориентируемых многообразий $\mathcal{X}$ произвольной размерности.* В частности, это означает, что формула (15) (и аналогичная формула при $n = 4m+2$) дает дифференциально-геометрический метод вычисления эйлеровой характеристики любых компактных и ориентируемых четномерных многообразий. [Так как $e(\xi) = 0$ при $\dim\xi$ нечетном, то согласно той же формуле (6) *эйлерова характеристика любого нечетномерного многообразия равна нулю.* (Это следует также из доказываемой в топологии теоремы двойственности Пуанкаре, утверждающей, что для любого i, $0 \leqslant i \leqslant n$, имеет место равенство $h^i = h^{n-i}$.)]

Теорема о сигнатуре

Равенство (6) (которое — заметим — мы доказали только при $n = 2$) является лишь одним из целого ряда замечательных соотношений, отождествляющих те или иные топологические инварианты с характеристическими числами. Чтобы дать представление о имеющихся здесь теоремах, мы сформулируем сейчас — к сожалению, без доказательства — знаменитую **теорему Хирцебруха о сигнатуре**.

Пусть $\mathcal{X}$ — гладкое ориентированное многообразие размерности $n = 4m$. Тогда формула

$$Q(x) = \int_{\mathcal{X}} \omega \wedge \omega, \qquad x = [\omega] \in H^{2m}\mathcal{X},$$

корректно определяет на линеале $H^{2m}\mathcal{X}$ квадратичный функционал Q. Сигнатура этого функционала (разность положительного и отрицательного индексов инерции) обозначается символом $\operatorname{sign} \mathcal{X}$ и называется *сигнатурой многообразия* $\mathcal{X}$.

Задача 9. Покажите, что *функционал Q невырожден.*

В топологии показывается, что подобно эйлеровой характеристике сигнатура является топологическим инвариантом.

В лекции IV.23 была описана конструкция, позволяющая по любому формальному ряду

$$F = F_0 + F_1 + \ldots + F_r + \ldots,$$

где F_r — однородный симметрический многочлен от n переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ степени r, строить неоднородный характеристический класс c^F. Пусть $c_n^F[\mathcal{X}]$ — значение n-й компоненты этого класса на касательном расслоении многообразия $\mathcal{X}$. Мы определим *характеристическое F-число* $\tau^F[\mathcal{X}]$ формулой

$$\tau^F[\mathcal{X}] = \int_{\mathcal{X}} c_n^F[\mathcal{X}].$$

Особо интересен частный случай, когда формальный ряд F определяется формулой

$$F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = Q(\lambda_1) \ldots Q(\lambda_n),$$

где $Q(\lambda)$ — некоторый формальный степенной ряд от переменной λ. В этом случае F-число $\tau^F[\mathcal{X}]$ называется *Q-родом* многообразия и обозначается символом $Q[\mathcal{X}]$.

Теорема (о сигнатуре). *Имеет место равенство*

$$\operatorname{sign}\mathcal{X} = L[\mathcal{X}],$$

где

$$L(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\operatorname{th}\sqrt{\lambda}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}}{(2k)!}B_k\lambda^k.$$

Здесь B_k, $k \geqslant 1$ — так называемые *числа Бернулли*:

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_2 = \frac{1}{30},\quad B_3 = \frac{1}{42},\quad B_4 = \frac{1}{30},\quad B_5 = \frac{5}{66},$$
$$B_6 = \frac{691}{2730},\quad B_7 = \frac{7}{6},\quad B_8 = \frac{3617}{510},\quad B_9 = \frac{43867}{798},\ldots$$

[Существует несколько конкурирующих обозначений чисел Бернулли. Мы выбрали то, в котором все чнсла Бернулли положительны и отличны от $1/2$.]

Доказательство теоремы о сигнатуре выходит за рамки этого курса.

Задача 10. Докажите, что

$$L[\mathcal{X}] = \begin{cases} \frac{1}{3}p_1[\mathcal{X}] & \text{при } n = 4,\\ \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)[\mathcal{X}] & \text{при } n = 8,\\ \frac{1}{945}(62p_3 - 13p_1p_2 + 2p_1^3)[\mathcal{X}] & \text{при } n = 12,\end{cases}$$

где $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — классы Понтрягина многообразия $\mathcal{X}$.

Тензор Риччи риманова пространства

Обратимся теперь к тензорам Риччи.

Определение 2. Тензор Риччи (см. определение 3 лекции 2) римановой связности (псевдо)риманова пространства $\mathcal{X}$ называется *тензором Риччи пространства* $\mathcal{X}$ и обозначается символом $\operatorname{Ric}\mathcal{X}$ (а его компоненты — символами R_{ij}).

По определению

$$R_{ij} = R^k_{i,kj}$$

и, значит,

$$R_{ij} = g^{pq}R_{pi,qj}. \tag{16}$$

Задача 11. Покажите, что на каждой координатной окрестности U (или, более общо, на каждом открытом множестве $U \subset \mathcal{X}$, над которым касательное расслоение $\tau_{\mathcal{X}}$ параллелизуемо) тензор Риччн задается формулой

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} R(X_i, Y, X_i, X), \qquad X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}, \tag{17}$$

где $X_1, \ldots, X_n$ — произвольный ортонормированный базис модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ над U.

Предложение 1. *Тензор Риччи каждого (псевдо)риманова пространства симметричен:*

$$R_{ij} = R_{ji}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Мы дадим два доказательства этого предложения.

Первое доказательство. В силу симметрий риманова тензора кривизны

$$R_{ij} = g^{pq} R_{pi,qj} = g^{pq} R_{qj,pi} = R_{ji}. \qquad \square$$

Второе доказательство. Согласно формуле Фосса — Вейля (предложение 1 лекции 13) форма γ, отвечающая римановой связности, является точным дифференциалом. Следовательно, она замкнута, и потому (см. следствие из утверждения задачи 8 лекции 2) тензор Ric симметричен. $\square$

Тензор Риччи тензора Бианки

Формула (16) — на (псевдо)римановом пространстве! — имеет смысл для любого тензора Бианки R.

Определение 3. Тензор типа (2,0) с компонентами (16) называется *тензором Риччи тензора Бианки* R и обозначается символом $\operatorname{Ric} R$.

Таким образом, согласно этому определению $\operatorname{Ric} \mathcal{X} = \operatorname{Ric} R_{\mathcal{X}}$, где $R_{\mathcal{X}}$ — риманов тензор кривизны пространства $\mathcal{X}$.

Первое доказательство предложения 1 сохраняется, очевидно, для каждого тензора Бианки R. Следовательно, *тензор Риччи* $\operatorname{Ric} R$ *симметричен для каждого тензора* R.

Пользуясь метрикой, мы можем поднять в тензоре Ric R первый индекс, т. е. перейти к тензору с компонентами

$$R^i_j = g^{ip}R_{pj}$$

(на инвариантном языке этому отвечает переход от симметрического билинейного функционала Ric R к соответствующему самосопряженному оператору $\mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}$).

След

$$\operatorname{Tr}\operatorname{Ric} R = R^i_i$$

этого тензора выражается формулой

$$g^{ip}R_{pi} = g^{ip}R^k_{p,ki} = g^{jl}R^k_{j,kl}$$

и, значит (см. формулу (6) лекции 16), равен скалярной кривизне $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = R^i_i.$$

(*Скалярная кривизна есть след тензора Риччи.*)

Симметричность тензора Ric R означает, что отображение

$$\operatorname{Ric}\colon\ R \mapsto \operatorname{Ric} R \tag{18}$$

является — очевидно, $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейным — отображением $\mathsf{F}\mathcal{X}$-модуля $B\mathcal{X}$ в $\mathsf{F}\mathcal{X}$-модуль $S^2\mathcal{X}$ всех симметрических $\mathsf{F}\mathcal{X}$-билинейных функционалов

$$\mathfrak{a}\mathcal{X} \times \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathsf{F}\mathcal{X}$$

(или — что равносильно — всех самосопряженных $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейных операторов $\mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}$).

Задача 12. Покажите, что если $R = KE$, где E — тензор Бианки с компонентами $g_{ij,kl}$ (см. формулы (7), (8) лекции 16), то

$$\operatorname{Ric} R = (n-1)Kg = \frac{\mathcal{R}}{n}g,$$

где, как всегда, g — метрический тензор.

В частности, мы видим, что при $n = 2$

$$\operatorname{Ric} R = \frac{\mathcal{R}}{2}g. \tag{19}$$

Поэтому при $n = 2$ отображение (18) заведомо не надъективно.

Тензоры Эйнштейна и Вейля

При $n \geqslant 3$ дело обстоит как раз наоборот.

Предложение 2. *При $n \geqslant 3$ отображение (18) надъективно и, более того, обладает сечением, т. е. для него существует обратное справа $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейное отображение*

$$Q\colon S^2\mathcal{X} \to B\mathcal{X}. \tag{20}$$

Доказательство. Для произвольного тензора $S \in S^2\mathcal{X}$ рассмотрим тензор P с компонентами

$$\begin{aligned} P_{ij,kl} &= g_{ik}S_{jl} - g_{il}S_{jk} - g_{jk}S_{il} + g_{jl}S_{ik} = \\ &= \begin{vmatrix} g_{ik} & g_{il} \\ S_{jk} & S_{jl} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{ik} & S_{il} \\ g_{jk} & g_{jl} \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{21}$$

где S_{ij} — компоненты тензора S. В инвариантном виде тензор P определяется формулой

$$\begin{aligned} P(X,Y,Z,W) &= g(X,Z)S(Y,W) - g(X,W)S(Y,Z) + \\ &+ g(Y,W)S(X,Z) - g(Y,Z)S(X,W) = \\ &= \begin{vmatrix} g(X,Z) & g(X,W) \\ S(Y,Z) & S(Y,W) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S(X,Z) & S(X,W) \\ g(Y,Z) & g(Y,W) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где X, Y, Z, W — произвольные векторные поля на $\mathcal{X}$.

Задача 13. Проверьте, что *тензор с компонентами* (21) *является тензором Бианки.*

Тензор Риччи тензора (21) имеет компоненты

$$\begin{aligned} g^{pq}P_{ip,jq} &= g^{pq}g_{ij}S_{pq} - g^{pq}g_{iq}S_{pj} - g^{pq}g_{pj}S_{iq} + g^{pq}g_{pq}S_{ij} = \\ &= (\operatorname{Tr} S)g_{ij} - \delta_i^p S_{pj} - \delta_j^q S_{iq} + nS_{ij} = (\operatorname{Tr} S)g_{ij} + (n-2)S_{ij}, \end{aligned}$$

т. е. выражается формулой

$$\operatorname{Ric} P = (\operatorname{Tr} S)g + (n-2)S, \tag{22}$$

где $\operatorname{Tr} S = g^{pq}S_{pq}$ — след тензора S.

С другой стороны, непосредственная подстановка показывает, что при $S = g$ тензор (21) является тензором Бианки $2E$. Поэтому, во-первых,

$$\operatorname{Ric} E = (n-1)g \tag{23}$$

(что доказывает, кстати сказать, утверждение задачи 12) и, во-вторых,

$$\operatorname{Ric}\left(P - \frac{\operatorname{Tr} S}{n-1}E\right) = (n-2)S.$$

Поэтому формула

$$Q(S) = \frac{P}{n-2} - \frac{\operatorname{Tr} S}{(n-1)(n-2)}E \tag{24}$$

определяет $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейное отображение (20), для которого $\operatorname{Ric} \circ Q = \mathrm{id}$. $\square$

Следствие 1. *При $n \geqslant 3$ подмодуль $\operatorname{Im} Q$ модуля $\boldsymbol{B}\mathcal{X}$ изоморфен модулю $\boldsymbol{S}^2\mathcal{X}$ и выделяется в $\boldsymbol{B}\mathcal{X}$ прямым слагаемым.*

Доказательство. Дополнительное прямое слагаемое состоит из тензоров Бианки R, для которых $\operatorname{Ric} R = 0$. $\square$

Тензоры Бианки R, для которых $\operatorname{Ric} R = 0$, называются *тензорами Вейля* (физики называют их также *безриччиевыми тензорами*), а тензоры вида $Q(S)$ — *тензорами Эйнштейна.*

Таким образом, следствие 1 утверждает, что любой тензор Бианки единственным образом разлагается в сумму некоторого тензора Эйнштейна и некоторого тензора Вейля.

Случай $n=3$ Применим полученные результаты к случаю $n=3$.

Следствие 2. *При $n=3$ подмодуль $\operatorname{Im} Q$ исчерпывает весь модуль $\boldsymbol{B}\mathcal{X}$ (любой тензор Бианки R является тензором Эйнштейна $Q(\operatorname{Ric} R)$).*

Доказательство. Размерность $\mathsf{F}\mathcal{X}$-модуля тензоров Вейля равна

$$\dim \boldsymbol{B}\mathcal{X} - \dim \boldsymbol{S}^2\mathcal{X} = \frac{n^2(n^2-1)}{12} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n^2-n-6)}{12},$$

и при $n=3$ это число равно нулю. $\square$

Из следствия 2, в частности, вытекает, что *при $n=3$ риманов тензор кривизны R выражается через тензор Риччи и гауссову кривизну:*

$$R_{ij,kl} = g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il} - \\ - 3K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (25)$$

Действительно, слева здесь компоненты тензора (24) при $n=3$ и $S = \operatorname{Ric} R$. $\square$

Пространства Эйнштейна

Определение 4. Риманово (или псевдориманово) пространство $\mathcal{X}$ называется *пространством Эйнштейна*, если его тензор Риччи $\operatorname{Ric}\mathcal{X}$ пропорционален метрическому тензору, т. е. если существует такая функция λ, что

$$\operatorname{Ric}\mathcal{X} = \lambda g \quad (\text{в компонентах } R_{ij} = \lambda g_{ij}). \quad (26)$$

Легко, впрочем, видеть, что функция λ лишь числовым множителем отличается от скалярной кривизны $\mathcal{R}$. Действительно, перейдя в (26) к следам (и учитывая, что $\operatorname{Tr} g = g^{ij}g_{ij} = n$), мы немедленно получим, что

$$\lambda = \frac{\mathcal{R}}{n}. \quad (27)$$

При $n=2$ условие (26) автоматически выполнено (см. формулу (19)), так что *любое двумерное риманово пространство является пространством Эйнштейна.*

Поэтому условие (26) интересно лишь при $n \geqslant 3$.

Предложение 3. *При $n \geqslant 3$ скалярная кривизна пространства Эйнштейна постоянна* (*и, значит, функция λ из соотношения* (26) *также постоянна*).

Доказательство. Ниже мы докажем следующую лемму:

Лемма 1. *В произвольном* (*псевдо*)*римановом пространстве $\mathcal{X}$ в каждой карте имеет место равенство*

$$\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x^k} = 2\nabla_l R^l_k, \qquad k = 1, \ldots, n, \quad (28)$$

где, как и выше, $R^l_k = g^{lp}R_{pk}$.

С другой стороны, если $\mathcal{X}$ — пространство Эйнштейна, то

$$R_k^l = \lambda g^{lp} g_{pk} = \lambda \delta_k^l,$$

и потому (напомним, что тензор δ_k^l ковариантно постоянен)

$$\nabla_l R_k^l = \frac{\partial \lambda}{\partial x^l} \delta_k^l = \frac{\partial \lambda}{\partial x^k}.$$

Следовательно, согласно лемме, $\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial x^k} = 2\dfrac{\partial \lambda}{\partial x^k}$, и в то же время (см. формулу (27)) $\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial x^k} = n\dfrac{\partial \lambda}{\partial x^k}$. При $n \geqslant 3$ это возможно только при $\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial x^k} = 0$. □

Осталось доказать лемму 1.

Доказательство леммы 1. Согласно тождеству Бианки — Падова (см. формулу (23′) лекции 2)

$$\nabla_i R^i_{j,kl} + \nabla_k R^i_{j,li} + \nabla_l R^i_{j,ik} = 0,$$

и, значит,

$$\nabla_i R^i_{j,kl} + \nabla_l R_{jk} = \nabla_k R_{jl}. \tag{29}$$

С другой стороны, так как метрический тензор ковариантно постоянен, то

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x^k} = \frac{\partial g^{jl} R_{jl}}{\partial x^k} = \nabla_k (g^{jl} R_{jl}) = g^{jl} \nabla_k R_{jl},$$
$$g^{jl} \nabla_l R_{jk} = \nabla_l (g^{jl} R_{jk}) = \nabla_l R_k^l$$

и

$$g^{jl} \nabla_i R^i_{j,kl} = g^{jl} g^{ip} \nabla_i R_{pj,kl} = g^{jl} g^{ip} \nabla_i R_{jp,lk} =$$
$$= g^{ip} \nabla_i R^l_{p,lk} = g^{ip} \nabla_i R_{pk} = \nabla_i R^i_k.$$

Поэтому, свернув (29) с g^{jl}, мы и получим (28). □

На лемме 1 основываются, кстати сказать, соображения, на основе которых Эйнштейн (одновременно с Гильбертом) пришел к уравнениям общей теории относительности.

Задача 14. Покажите, что формула (28) равносильна соотношениям

$$\nabla_i T^{ij} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{30}$$

где $T^{ij} = g^{ip}g^{jq}\left(R_{pq} - \frac{\mathcal{R}}{2}g_{pq}\right)$ — тензор $\mathrm{Ric} - \frac{\mathcal{R}}{2}g$ с поднятыми вверх индексами.

С другой стороны, в рамках четырехмерной формализации специальной теории относительности закон сохранения энергии и импульса — записанный в инвариантной форме — также имеет вид (30), где T^{ij} — компоненты так называемого *тензора энергии-импульса* T (левая часть формулы (30) представляет собой не что иное, как компоненты дивергенции тензорного поля T, равенство нулю которой означает отсутствие у поля T источников и стоков; ср. в лекции III.28 обсуждение этого вопроса для векторных полей).

На этом основании Эйнштейн предположил, что эти тензоры совпадают (при соответствующем выборе единиц измерения), т. е. что в физическом пространстве-времени имеют место равенства

$$R_{ij} - \frac{\mathcal{R}}{2}g_{ij} = T_{ij}, \qquad i, j = 0, 1, 2, 3, \tag{31}$$

где $T_{ij} = g_{ip}g_{jq}T^{pq}$ — тензор T со спущенными вниз индексами. Справедливость этого предположения обосновывается согласием вытекающих из него заключений с экспериментальными фактами.

Относительно g_{ij} соотношения (31) являются (при данных T^{ij}) дифференциальными уравнениями второго порядка, и потому в принципе однозначно характеризуют метрику (при данных начальных и граничных условиях).

Заметим, что эти уравнения существенно нелинейны.

Из предложения 3 следует, что *в каждом пространстве Эйнштейна тензор Риччи* Ric *ковариантно постоянен*:

$$\nabla_k R_{ij} = 0$$

и либо тождественно равен нулю, либо является всюду невырожденным симметрическим тензором.

Обратно, *если в пространстве аффинной связности $\mathcal{X}$ тензор Риччи ковариантно постоянен, симметричен и невырожден, то связность на $\mathcal{X}$ является метрической связностью и индуцируется метрикой, по отношению к которой $\mathcal{X}$ является пространством Эйнштейна.*

Действительно, если тензор Ric невырожден, то мы можем принять его за риманову метрику g на $\mathcal{X}$. Будучи ковариантно постоянной, эта метрика индуцирует на $\mathcal{X}$ данную связность (см. теорему 1 лекции 11), а так как $\mathrm{Ric} = g$, то по отношению к ней пространство $\mathcal{X}$ является пространством Эйнштейна. $\square$

Критерий Томаса Пусть пространство $\mathcal{X}$ р и м а н о в о.

З а д а ч а 15. Покажите, что *симметрический тензор* $S \in \Lambda^2\mathcal{X}$ *в римановом пространстве* $\mathcal{X}$ *тогда и только тогда тождественно равен нулю, когда равна нулю функция*

$$g^{ik}g^{jl}S_{ij}S_{kl}, \tag{32}$$

где S_{ij} *— его компоненты.* [У к а з а н и е. Функция (32) равна сумме квадратов компонент $S_j^k = g^{ik}S_{ij}$.]

Для тензора $R_{ij} - \lambda g_{ij}$ функция (32) имеет вид

$$\begin{aligned} g^{ik}g^{jl}&(R_{ij} - \lambda g_{ij})(R_{kl} - \lambda g_{kl}) = \\ &= g^{ik}g^{jl}R_{ij}R_{kl} - 2\lambda g^{ik}g^{jl}g_{ij}R_{kl} + \lambda^2 g^{ik}g^{jl}g_{ij}g_{kl} = \\ &= R_{ij}R^{ij} - 2\lambda\delta_i^l R_l^i + \lambda^2 n = R_{ij}R^{ij} - 2\lambda\mathcal{R} + \lambda^2 n, \end{aligned}$$

и при $\lambda = \dfrac{\mathcal{R}}{n}$ равна $R_{ij}R^{ij} - \dfrac{\mathcal{R}^2}{n}$. Поэтому *риманово пространство* $\mathcal{X}$ *тогда и только тогда является пространством Эйнштейна, когда*

$$\mathcal{R}^2 = nR_{ij}R^{ij} \tag{33}$$

(к р и т е р и й Т о м а с а).