ЛЕКЦИЯ 18

Конформные преобразования метрики. — Тензор конформной кривизны. — Конформные эквивалентности. — Конформно плоские пространства. — Конформно эквивалентные поверхности. — Классификация поверхностей с конформной структурой.

Конформные преобразования метрики

Согласно следствию 1 предложения 2 предыдущей лекции тензор кривизны R (псевдо)риманова пространства $\mathcal{X}$ допускает разложение вида

$$R = Q(\mathrm{Ric}) + W,$$

где W — тензор Бианки с компонентами

$$W_{ij,kl} = R_{ij,kl} - \frac{g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il}}{n-2} + \\ + \frac{g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}}{(n-1)(n-2)}\mathcal{R}$$

— *вейлевская компонента тензора кривизны.*

Последний тензор имеет интересный геометрический смысл.

Определение 1. Говорят, что метрика $\overline{g}$ на многообразии $\mathcal{X}$ получена *конформным преобразованием* метрики g, если $\overline{g}$ отличается от g положительным множителем. Этот множитель удобно обозначить через $e^{2\sigma}$, где σ — некоторая функция на $\mathcal{X}$:

$$\overline{g} = e^{2\sigma}g.$$

При конформном преобразовании длины кривых меняются, но углы между кривыми остаются прежними.

Все объекты, относящиеся к метрике $\overline{g}$, мы будем отмечать чертой наверху. В частности, символом $\overline{R}_{ij,kl}$ мы будем обозначать компоненты риманова тензора кривизны этой метрики (в некоторой карте, которую мы считаем раз и навсегда фиксированной).

Если $\sigma = \mathrm{const}$, то, как мы знаем (см. лекцию 11), связность ∇ при преобразовании $g \mapsto \overline{g}$ не меняется, а потому не меняется и тензор кривизны $R^i_{j,kl}$. Что же касается риманова тензора кривизны, то он приобретает множитель $e^{2\sigma}$, и потому разность $e^{-2\sigma}\overline{R}_{ij,kl} - R_{ij,kl}$ равна нулю.

Вычислим эту разность в общем случае.

Это вычисление если не головоломно, то во всяком случае весьма громоздко. Чтобы сократить его объем, мы условимся для любого выражения вида P_{kl}, зависящего от индексов k, l (и, быть может, еще от других индексов), обозначать результат $P_{[kl]} = P_{kl} - P_{lk}$ его альтернирования символом $P_{kl}[kl]$. Например, в этих обозначениях формула для $R^i_{j,kl}$ из лекции 2 сокращается вдвое:

$$R^i_{j,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{lj}\ [kl],$$

а формула для $W_{ij,kl}$ приобретает вид

$$W_{ij,kl} - R_{ij,kl} =$$
$$= -\frac{g_{ik}R_{jl} - g_{jk}R_{il}}{n-2} + \frac{g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}}{2(n-1)(n-2)}\mathcal{R} \qquad [kl]. \quad (1)$$

Условимся также равенства вида $P_{kl}[kl] = Q_{kl}[kl]$ записывать формулой

$$P_{kl} \overset{[kl]}{=} Q_{kl}.$$

Кроме того, мы будем использовать и сокращенные классические обозначения

$$\sigma_i = \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}, \quad \sigma_{i,l} = \nabla_l \sigma_i.$$

В этих обозначениях

$$\frac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial x^l} = 2e^{2\sigma}\sigma_l g_{ij} + e^{2\sigma}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l},$$

и потому

$$\overline{\Gamma}_{i,lj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial \overline{g}_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial \overline{g}_{jl}}{\partial x^i}\right) = e^{2\sigma}\Gamma_{i,lj} + e^{2\sigma}(\sigma_l g_{ij} + \sigma_j g_{il} - \sigma_i g_{jl}).$$

Поскольку $\overline{g}^{ij} = e^{-2\sigma}g^{ij}$, отсюда следует, что

$$\overline{\Gamma}^i_{lj} = \Gamma^i_{lj} + B^i_{lj}, \quad \text{где } B^i_{lj} = \delta^i_j\sigma_l + \delta^i_l\sigma_j - g_{jl}g^{ip}\sigma_p,$$

и, значит,

$$\frac{\partial \overline{\Gamma}^i_{lj}}{\partial x^k}+\overline{\Gamma}^i_{kp}\overline{\Gamma}^p_{lj} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k}+\frac{\partial B^i_{lj}}{\partial x^k}+\Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{lj}+B^i_{kp}\Gamma^p_{lj}+\Gamma^i_{kp}B^p_{lj}+B^i_{kp}B^p_{lj}.$$

Но

$$B^i_{kp}\Gamma^p_{lj} \overset{[kl]}{=} -\Gamma^p_{kj}B^i_{lp},$$

$$\frac{\partial B^i_{lj}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kp}B^p_{lj} - \Gamma^p_{kj}B^i_{lp} = \nabla_k B^i_{lj} + \Gamma^p_{kl}B^i_{pj}$$

и $\Gamma^p_{kl}B^i_{pj} \overset{[kl]}{=} 0$. Поэтому

$$\overline{R}^i_{j,kl} - R^i_{j,kl} = \nabla_k B^i_{lj} + B^i_{kp}B^p_{lj} \qquad [kl]. \tag{2}$$

С другой стороны, так как $\nabla_l \delta^i_j = 0$ (тензор δ^i_j ковариантно постоянен), то

$$\nabla_k B^i_{lj} = \delta^i_j \sigma_{l,k} + \delta^i_l \sigma_{j,k} - g_{jl}g^{ip}\sigma_{p,k},$$

и в то же время

$$\begin{aligned} B^i_{kp}B^p_{lj} &= (\delta^i_p\sigma_k + \delta^i_k\sigma_p - g_{pk}g^{is}\sigma_s)(\delta^p_j\sigma_l + \delta^p_l\sigma_j - g_{jl}g^{pt}\sigma_t) = \\ &= \delta^i_j\sigma_l\sigma_k + \delta^i_k\sigma_l\sigma_j - g_{jk}g^{is}\sigma_l\sigma_s + \\ &\quad + \delta^i_l\sigma_j\sigma_k + \delta^i_k\sigma_j\sigma_l - g_{lk}g^{is}\sigma_j\sigma_s - \\ &\quad - g_{jl}g^{it}\sigma_t\sigma_k - \delta^i_k g_{jl}g^{pt}\sigma_p\sigma_t + g_{jl}g^{is}\sigma_k\sigma_s. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sigma_{l,k} \overset{[kl]}{=} 0, \quad \delta^i_l\sigma_j\sigma_k + \delta^i_k\sigma_j\sigma_l \overset{[kl]}{=} 0, \quad g_{lk}g^{is}\sigma_j\sigma_s \overset{[kl]}{=} 0$$

и

$$g_{jk}g^{is}\sigma_l\sigma_s + g_{jl}g^{it}\sigma_k\sigma_t \overset{[kl]}{=} 0,$$

отсюда следует, что

$$\nabla_k B^i_{lj} + B^i_{kp}B^p_{lj} \overset{[kl]}{=}$$

$$\overset{[kl]}{=} \delta^i_l(\sigma_{j,k} - \sigma_j\sigma_k) - \delta^i_k g_{jl} g^{st}\sigma_s\sigma_t - g_{jl}g^{ip}(\sigma_{p,k} - \sigma_p\sigma_k) =$$
$$= \delta^i_l\left(S_{jk} - \frac{1}{2}g_{jk}g^{st}\sigma_s\sigma_t\right) - \delta^i_k g_{jl}g^{st}\sigma_s\sigma_t -$$
$$- g_{jl}g^{ip}\left(S_{pk} - \frac{1}{2}g_{pk}g^{st}\sigma_s\sigma_t\right) =$$
$$= \delta^i_l S_{jk} - g_{jl}g^{ip}S_{pk} - \frac{1}{2}g^{st}\sigma_s\sigma_t(\delta^i_l g_{jk} + \delta^i_k g_{jl}) \overset{[kl]}{=}$$
$$\overset{[kl]}{=} \delta^i_l S_{jk} - g_{jl}g^{ip}S_{pk},$$

где

$$S_{kl} = \sigma_{k,l} - \sigma_k\sigma_l + \frac{1}{2}g_{kl}g^{st}\sigma_s\sigma_t. \tag{3}$$

Поэтому

$$g_{iq}(\nabla_k B^q_{lj} + B^q_{kp}B^p_{lj}) \overset{[kl]}{=} g_{il}S_{jk} - g_{jl}S_{ik},$$

и, значит,

$$e^{-2\sigma}\overline{R}_{ij,kl} - R_{ij,kl} = g_{il}S_{jk} - g_{jl}S_{ik} \qquad [kl]. \tag{4}$$

В раскрытом виде эта формула имеет вид

$$e^{-2\sigma}\overline{R}_{ij,kl} - R_{ij,kl} = g_{il}S_{jk} - g_{jl}S_{ik} - g_{ik}S_{jl} + g_{jk}S_{il}, \tag{4'}$$

а в классических скобочных обозначениях (ср. лекцию II.9a, стр. 100, а также лекцию IV.19, стр. 341) — вид

$$e^{-2\sigma}\overline{R}_{ij,kl} - R_{ij,kl} = g_{[i\|[l}S_{k]\|j]} \tag{4''}$$

(здесь мы воспользовались симметричностью $S_{kl} = S_{lk}$ тензора S_{kl}).

Тем самым наша задача полностью решена.

Тензор конформной кривизны

Свертка тождества (4′) с тензором $g^{ik} = e^{2\sigma}\overline{g}^{ik}$ дает для тензоров Риччи формулу

$$\overline{R}_{jl} - R_{jl} = -g_{jl}S - (n-2)S_{jl}, \text{ где } \quad S = g^{ik}S_{ik}, \tag{5}$$

уже не содержащую слева $e^{-2\sigma}$, а дальнейшая свертка с g^{jl} дает формулу для скалярных кривизн:

$$e^{2\sigma}\overline{\mathcal{R}} - \mathcal{R} = -2(n-1)S, \tag{6}$$

в которой $e^{2\sigma}$ снова появляется.

Из формул (5) и (6) следует (при $n > 2$), что

$$S_{jl} = -\frac{\overline{R}_{jl} - R_{jl}}{n-2} + \frac{e^{2\sigma}\overline{\mathcal{R}} - \mathcal{R}}{2(n-1)(n-2)} g_{jl},$$

и потому

$$g_{jk}S_{il} - g_{ik}S_{jl} = e^{-2\sigma}\frac{\overline{g}_{ik}\overline{R}_{jl} - \overline{g}_{jk}\overline{R}_{il}}{n-2} - \frac{g_{ik}R_{jl} - g_{jk}R_{il}}{n-2} -$$
$$- e^{-2\sigma}\frac{\overline{g}_{ik}\overline{g}_{jl} - \overline{g}_{jk}\overline{g}_{il}}{2(n-1)(n-2)}\overline{\mathcal{R}} + \frac{g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}}{2(n-1)(n-2)}\mathcal{R}. \quad (7)$$

Согласно формуле (4) альтернация $[kl]$ левой части этого равенства равна $e^{-2\sigma}\overline{R}_{ij,kl} - R_{ij,kl}$, а согласно формуле (1) альтериация правой части равна $e^{-2\sigma}(-\overline{W}_{ij,kl} + \overline{R}_{ij,kl}) + W_{ij,kl} - R_{ij,kl}$. Поэтому после альтернации равенство (7) приобретает вид

$$e^{-2\sigma}\overline{W}_{ij,kl} = W_{ij,kl}. \quad (8)$$

Здесь удобно перейти к компонентам $W^i_{j,kl}$ тензора W с поднятым первым ннлексом, связанным с компонентами $R^i_{j,kl}$ тензора кривизны формулой

$$W^i_{j,kl} - R^i_{j,kl} =$$
$$= -\frac{\delta^i_k R_{jl} - g_{jk}R^i_l}{n-2} + \frac{\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}}{2(n-1)(n-2)}\mathcal{R} \qquad [kl]. \quad (9)$$

Для этих компонент формула (8) имеет вид

$$\overline{W}^i_{j,kl} = W^i_{j,kl},$$

означающий, что *при конформном преобразовании метрики тензор W с компонентами $W^i_{j,kl}$ не меняется.*

Этот тензор называется *тензором конформной кривизны Вейля.*

Для пространства Эйнштейна

$$W^i_{j,kl} = R^i_{j,kl} - \frac{\mathcal{R}}{n(n-1)}(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}). \quad (10)$$

Конформные эквивалентности Утверждению о конформной инвариантности тензора Вейля может быть придан несколько иной — часто более удобный — вид.

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — римановы (или псевдоримановы) пространства с метрическими тензорами $g_{\mathcal{X}}$ и $g_{\mathcal{Y}}$ соответственно. Ясно, что для любого диффеоморфизма $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ тензор $f^*g_{\mathcal{Y}}$ является (псевдо)римановой метрикой на $\mathcal{X}$.

Определение 2. Диффеоморфизм $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется *конформной эквивалентностью*, если метрика $f^*g_{\mathcal{Y}}$ на $\mathcal{X}$ получается из метрики $g_{\mathcal{X}}$ конформным преобразованием, т. е. если на $\mathcal{X}$ существует такая всюду положительная функция φ, что

$$f^*g_{\mathcal{Y}} = \varphi g_{\mathcal{X}}.$$

На этом языке конформная инвариантность тензора Вейля означает, что *для любой конформной эквивалентности $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ имеет место равенство*

$$f^*W_{\mathcal{Y}} = W_{\mathcal{X}},$$

где $W_{\mathcal{X}}$ и $W_{\mathcal{Y}}$ — тензоры Вейля пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно.

Заметим, что при $n = 2$ конформные эквивалентности — это в точности конформные отображения относительно индуцированных конформных структур на поверхностях $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ (т. е. — см. лекцию 14 — днффеоморфнзмы, запнсывающиеся в конформных координатах голоморфными или антиголоморфными функциями).

Конформно плоские пространства Риманово пространство $\mathcal{X}$ называется *конформно плоским*, если его метрнка может быть конформно преобразована в плоскую метрику (с тождественно равным нулю тензором кривизны). Для такого пространства тензор W тождественно равен нулю.

Тензор W равен нулю и в случае, когда каждая точка пространства $\mathcal{X}$ обладает окрестностью, на которой метрика может быть конформно преобразована в плоскую метрику, т. е. когда пространство $\mathcal{X}$ *локально конформно плоско.*

Замечание 1. Оказывается, прн $n \geqslant 4$ верно и обратное утверждение: *если $W = 0$, то пространст-*

во $\mathcal{X}$ локально конформно плоско. Мы доказывать это не будем.

Согласно следствию 2 предложения 2 лекции 17 *при $n = 3$ тензор W тождественно равен нулю.*

Задача 1. Приведите пример трехмерного риманова пространства, не являющегося локально конформно плоским.

При $n = 3$ роль тензора W играет тензор V с компонентами

$$V_{ijk} = \frac{\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}}{n-2} - \frac{\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x^i} g_{jk} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x^j} g_{ik}}{2(n-1)(n-2)}.$$

Задача 2. Покажите, что:

а *если трехмерное риманово пространство локально конформно плоско, то $V = 0$;*

б *при $n \geqslant 4$ из равенства $W = 0$ следует равенство $V = 0$.*

Замечание 2. Можно показать, что при $n = 3$ равенство $V = 0$ не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы риманово пространство было локально конформно плоским. Ср. замечание 1.

При $n = 2$ факт существования изотермических координат (см. предложение 2 лекции 13) показывает, что *при $n = 2$ каждая метрика локально конформно плоска.*

Конформно эквивалентные поверхности

Однако утверждение о том, что любая поверхность глобально конформно плоска, неверно. Справедливо лишь следующее более слабое предложение.

***Предложение* 1.** *Любая поверхность конформно эквивалентна геодезически полной поверхности постоянной гауссовой кривизны.*

Здесь под поверхностью понимается произвольное двумерное риманово пространство $\mathcal{X}$ — двумерное гладкое многообразие (паракомпактное и хаусдорфово), снабженное римановой метрикой. Гауссова кривизна K такого пространства вычисляется по формуле (5) (или (8)) лекции II.5.

***Следствие* 1.** *На любой поверхности $\mathcal{X}$ существует геодезически полная метрика постоянной гауссовой кривизны.*

Здесь под поверхностью понимается произвольное двумерное паракомпактное и хаусдорфово гладкое многообразие, вообще говоря, без метрики.

Конечно, без ограничения общности мы можем — как в предложении 1, так и в следствии 1 — считать поверхность $\mathcal{X}$ связной (и потому — см. замечание 2 лекции III.24 — удовлетворяющей второй аксиоме счетности).

Классификация поверхностей с конформной структурой

Доказательство предложения 1 основывается на классификации всевозможных связных поверхностей с конформной структурой (см. определение 1 лекции 14). Поэтому нам нужно в первую очередь заняться этой классификацией.

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольная поверхность с конформной структурой, и пусть $\widetilde{\mathcal{X}}$ — односвязная поверхность, универсально накрывающая поверхность $\mathcal{X}$. Как мы знаем (см. задачу 2 лекции 14), на $\widetilde{\mathcal{X}}$ существует единственная конформная структура, по отношению к которой накрывающее отображение $\pi\colon\ \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ конформно. При этом так как поверхность $\widetilde{\mathcal{X}}$, будучи односвязной, ориентируема, то эта структура комплексно аналитична (определяет $\mathcal{X}$ как риманову поверхность). С другой стороны согласно известной в теории функций теореме Римана об униформизации (называемой также теоремой Кёбе) *любая односвязная риманова поверхность комплексно аналитически эквивалентна либо сфере Римана $\mathbb{C}^+$, либо плоскости комплексных чисел $\mathbb{C}$, либо единичному кругу $\Delta = \{w \in \mathbb{C};\ |w| \leqslant 1\}$ (или — что равносильно — верхней полуплоскости $\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$).* А поскольку $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}}/\Gamma$, где Γ — группа автоморфизмов накрытия $\widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ (состоящая — см. утверждение **Б** задачи 2 лекции 14 — из конформных диффеоморфизмов $\widetilde{\mathcal{X}} \to \widetilde{\mathcal{X}}$), это доказывает, что *любая поверхность $\mathcal{X}$ с конформной структурой имеет вид $\widetilde{\mathcal{X}}/\Gamma$, где $\widetilde{\mathcal{X}}$ — либо сфера $\mathbb{C}^+$, либо плоскость $\mathbb{C}$, либо полуплоскость $\mathbb{P}$, а Γ — некоторая дискретно действующая группа конформных диффеоморфизмов $\widetilde{\mathcal{X}} \to \widetilde{\mathcal{X}}$.*

При $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathbb{C}^+$ поверхность $\mathcal{X}$ называется поверхностью *эллиптического типа*, при $\mathcal{X} = \mathbb{C}$ — поверхностью *параболического типа*, а при $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathbb{P}$ — поверхностью *гиперболического типа*.

Поверхности параболического типа. На языке теории функций комплексно аналитические преобразования $f\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — это не что иное, как однолистные целые функции. Если такая функция имеет в ∞ существенно особую точку, то по теореме Вейерштрасса она будет принимать вблизи ∞ значения, сколь угодно близкие к $f(0)$, и, следовательно, — поскольку множество $f(\Delta)$ открыто — вблизи ∞ (и, значит, вне Δ) будет существовать такая точка z_0, что $f(z_0) \in f(\Delta)$, т. е. такая, что $f(z_0) = f(z_1)$, где $z_1 \in \Delta$. Так как это противоречит однолистности (точки z_0 и z_1 заведомо различны), то, следовательно, для функции f точка ∞ не может быть существенно особой точкой, и, значит, эта функция — не являясь постоянной — имеет в точке ∞ полюс, т. е. является многочленом (положительной степени). Поскольку же многочлен степени n осуществляет — по основной теореме алгебры — n-листное отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, степень многочлена f равна 1, т. е. $f = az + b$, где $a \neq 0$. Таким образом, *комплексно аналитические диффеоморфизмы $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — это в точности линейные преобразования*

$$z' = az + b, \qquad a \neq 0.$$

Если $a \neq 1$, то такое преобразование имеет неподвижную точку $\dfrac{b}{1-a}$, и потому не может принадлежать дискретно действующей группе Г. Значит, *любая дискретно действующая группа* Г *комплексно аналитических преобразований $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ состоит из параллельных переносов*

$$z' = z + b. \tag{11}$$

Поскольку же для конформного, но не комплексно аналитического преобразования $f\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ преобразование $z \mapsto f(\bar{z})$ комплексно аналитично, мы получаем, далее, что *любая дискретно действующая группа* Г *конформных диффеоморфизмов $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, кроме параллельных пере-*

носов (1), *может содержать только преобразования вида*

$$z' = \overline{z} + b \tag{12}$$

(композиции параллельных переносов с симметриями относительно вещественной оси).

Поскольку преобразования (11) и (12) являются (собственными или несобственными) движениями плоскости $\mathbb{C}$ (по отношению к евклидовой метрике на $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$), этим доказано, что *каждая поверхность параболического типа имеет вид* $\mathbb{R}^2/\Gamma$, *где* Γ — *некоторая дискретно действующая группа движений евклидовой плоскости* $\mathbb{R}^2$.

Все эти поверхности легко перечисляются (по крайней мере, с точностью до диффеоморфизма). При $\Gamma = \{\mathrm{id}\}$ в качестве поверхности $\mathbb{R}^2/\Gamma$ получается сама плоскость $\mathbb{R}^2$. Далее, можно показать, что любая дискретно действующая на $\mathbb{R}^2$ группа параллельных переносов (11) состоит либо из переносов вида $z' = z + nb_0$, где b_0 — фиксированное отличное от нуля комплексное число и $n \in \mathbb{Z}$, либо из переносов вида $z' = z + mb_1 + nb_2$, где b_1, b_2 — линейно независимые над полем $\mathbb{R}$ комплексные числа, а $m, n \in \mathbb{Z}$. В первом случае факторпространство $\mathbb{R}^2/\Gamma$ диффеоморфно цилиндру $\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$ (без краевых окружностей), а во втором — тору $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Если же группа Γ содержит преобразования вида (12), то факторпространство $\mathbb{R}^2/\Gamma$ диффеоморфно либо листу Мёбиуса, либо так называемой *бутылке Клейна*, получающейся из цилиндра склеиванием краевых окружностей с обращением ориентации (при склеивании с сохранением ориентации получается тор).

Таким образом, *имеется только пять недиффеоморфных поверхностей параболического типа: плоскость, цилиндр, тор, лист Мёбиуса и бутылка Клейна.*

Это утверждение нам фактически сейчас не нужно, и мы отложим его доказательство до следующего Семестра. (Впрочем, оно настолько просто, что читатель, безусловно, сможет самостоятельно справиться с ним уже сейчас.) Там же мы получим и классификацию поверхностей параболического типа не только с точностью до диффеоморфизма, но и с точностью до конформной эквивалентности (и изометричности).

Поверхности эллиптического типа. Примером комплексно аналитического преобразования $\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ является произвольное дробно-линейное преобразование

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

Если комплексно аналитическое преобразование $f\colon \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ переводит точку $z_0 \in \mathbb{C}$ в точку ∞, то преобразование $g = f \circ \varphi_0$, где

$$\varphi_0(z) = \frac{z_0 z}{z+1},$$

будет оставлять точку ∞ на месте, и, значит, его ограничение на $\mathbb{C}$ будет диффеоморфизмом $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, т. е. согласно доказанному выше будет линейным преобразованием вида $z' = az+b$, $a \neq 0$. Поэтому преобразование $f = g \circ \varphi_0^{-1}$ дробно-линейно. Значит, *дробно-линейные преобразования* (13) *исчерпывают все комплексно аналитические диффеоморфизмы* $\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$. Но мы знаем — см. лекцию I.32, — что каждое нетождественное преобразование (13) непременно имеет неподвижные точки, и потому не может принадлежать дискретно действующей группе Г. Это доказывает, что дискретно действующая группа комплексно аналитических преобразований $\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ необходимо состоит только из тождественного преобразования id, и, значит, что *сфера* $\mathbb{C}^+ = \mathbb{S}^2$ *является единственной ориентируемой поверхностью эллиптического типа.*

Что же касается не комплексно аналитических конформных преобразований $\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$, то все они имеют вид

$$z' = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \qquad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

С другой стороны, поскольку композиция любых двух преобразований (14) имеет, очевидно, вид (13), дискретно действующая группа Г может содержать не более одного преобразования (14) и это преобразование должно быть инволютивно (его квадрат должен быть тождественным преобразованием id). Примером такого преобразования служит преобразование

$$z' = -\frac{1}{\bar{z}} \tag{15}$$

(композиция инверсии относительно единичной окружности $|z| = 1$ и центральной симметрии относительно точки 0).

Задача 3. Покажите, что

а. *Отвечающая преобразованию* (15) *поверхность* $\mathbb{C}^+/\Gamma$ *является не чем иным, как проективной плоскостью* $\mathbb{R}P^2$. [Указание. Стереографическая проекция $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^+$ переводит антиподальное отображение $x \mapsto -x$, $x \in \mathbb{S}^2$, в преобразование (15).]

б. *Каждая инволюция* $\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$, *действующая на* $\mathbb{C}^+$ *без неподвижных точек, сопряжена инволюции* (15). [Указание. При $ad - bc = 1$ преобразование (14) инволютвно тогда и только тогда, когда либо $b, c \in \mathbb{R}$ и $d = -\overline{a}$, либо $ib, ic \in \mathbb{R}$ и $d = \overline{a}$, причем преобразование не имеет неподвижных точек только в первом случае.]

Это означает, что *проективная плоскость* $\mathbb{R}P^2$ *является единственной неориентируемой поверхностью эллиптического типа.*

Обратим внимание, что *для поверхностей эллиптического типа группа* Γ *также состоит из движений* (но на этот раз не плоскости, а сферы).

Поверхности гиперболического типа. Оказывается, что последний вывод сохраняется и для поверхностей гиперболического типа при условии, что $\mathbb{P}$ (или Δ) мы будем трактовать как модель геометрии Лобачевского, а движения $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ будем понимать в смысле этой геометрии. Действительно, согласно так называемому принципу соответствия границ любое комплексно аналитическое преобразование $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ по непрерывности распространяется до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{P}} \to \overline{\mathbb{P}}$ на себя замкнутой полуплоскости (переводящего в себя вещественную ось), а потому — согласно принципу симметрии — и до комплексно аналитнческого преобразования $\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ (действующего по формулам $z \mapsto f(z)$, если $z \in \overline{\mathbb{P}}$, и $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$, если $z \notin \overline{\mathbb{P}}$), т. е. по доказанному выше — до дробно-линейного преобразования (13). С другой стороны, чтобы преобразование (13) было преобразованнем $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$, необходимо — согласно тому же принципу соответствия границ, — чтобы $\operatorname{Im} z' = 0$ при $\operatorname{Im} z = 0$. Но если $z = 0$, то $z' = \dfrac{b}{d}$, если $z = 1$, то $z' = \dfrac{a+b}{c+d}$, а если $z = \infty$, то $z' = \dfrac{a}{c}$. Поэтому если $\operatorname{Im} z' = 0$ при $\operatorname{Im} z = 0$, то $b = dr$, $a = cs$ и $a + b = R(c + d)$, где r, s и R — вещественные числа. При стандартной нормировке $ad - bc = 1$ это, как легко видеть, возможно, только когда все коэффициенты a, b, c, d вещественны или чисто мнимы. Но случай, когда все коэффициенты a, b, c, d чисто мнимы, невозможен, поскольку в этом случае

$$\operatorname{Im} \frac{ai + b}{ci + d} = \operatorname{Im} \frac{(ai + b)(\overline{c + id})}{|ci + d|^2} = \operatorname{Im} \frac{(ai + b)(c - id)}{|ci + d|^2} =$$
$$= \frac{-(ad - bc)}{|ci + d|^2} = \frac{-1}{|ci + d|^2} < 0$$

и, значит, образ точки $i \in \mathbb{P}$ при преобразовании (13) не принадлежит $\mathbb{P}$. Обратно, если эти коэффициенты вещественны (и $ad - bc = 1$), то

$$\operatorname{Im} z' = \frac{\operatorname{Im}(az + d)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = (ad - bc)\frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}, \qquad (16)$$

и потому преобразование (13) переводит $\mathbb{P}$ в $\mathbb{P}$.

Таким образом, *комплексно аналитические преобразования* $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ *задаются формулой* (13) *с вещественными коэффициентами* (*при нормировке* $ad - bc = 1$). Но мы знаем (см. формулу (3) лекции I.33), что это в точности все собственные движения плоскости Лобачевского (и, значит, — см. формулу (4) лекции I.33 — конформные, но не аналитические преобразования $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ — это несобственные движения этой плоскости).

Все это доказывает следующее предложение.

Предложение 2. *Каждая поверхность с конформной структурой имеет вид* $\mathcal{M}/\Gamma$, *где* $\mathcal{M} = \mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$ *или* $\mathbb{P}$, *а* Γ — *группа движений соответствующей геометрии* (*евклидовой, сферической или Лобачевского*), *дискретно действующая на* $\mathcal{M}$. □

Предложение 1 мы выведем отсюда в следующей лекции.

Замечание 3. Представление поверхности в виде $\mathcal{M}/\Gamma$ позволило нам выше описать — по крайней мере с точностью до диффеоморфизма — все поверхности параболического и эллиптического типов. Ничего похожего нельзя сделать для поверхностей гиперболического типа — их слишком много и они слишком сложно устроены. Однако компактных поверхностей гиперболического типа сравнительно мало (две счетные серии), и их топологическое строение вполне обозримо. Мы опишем их в следующем Семестре.