ЛЕКЦИЯ 19

Локально изометрические отображения римановых пространств. — Метрические накрытия. — Теорема о растягивающих отображениях. — Изометрические отображения римановых пространств. — Группа изометрий риманова пространства. — Эллиптическая геометрия. — Доказательство предложения 1 лекции 18. — Размерность группы изометрий. — Поля Киллинга. — Риманова связность на подмногообразии риманова пространства. — Формулы Гаусса и Вейнгартена для подмногообразий римановых пространств. — Нормаль средней кривизны. — Соотношения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи. — Случай, когда объемлющее пространство плоско.

Локально изометрические отображения римановых пространств

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — римановы (или псевдоримановы) пространства с метрическими тензорами $g_{\mathcal{X}}$ и $g_{\mathcal{Y}}$ и римановыми связностями $\nabla^{\mathcal{X}}$ и $\nabla^{\mathcal{Y}}$. Пусть, кроме того, $n = \dim \mathcal{X}$ и $m = \dim \mathcal{Y}$.

***Определение* 1.** Гладкое отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется *локально изометрическим отображением*, если $f^* g_{\mathcal{Y}} = g_{\mathcal{X}}$, т. е. (см. замечание 3 лекции III.18) если для любой точки $p \in \mathcal{X}$ отображение

$$(df)_p\colon \mathsf{T}_p\mathcal{X} \to \mathsf{T}_q\mathcal{Y}, \qquad q = f(p),$$

является изометрическим отображением (псевдо)евклидова пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ на подпространство (псевдо)евклидова пространства $\mathsf{T}_q\mathcal{Y}$.

Ясно, что любое такое отображение является погружением в смысле определения 1 лекции III.13. Поэтому для того, чтобы локально изометрические отображения $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ существовали, необходимо, чтобы было выполнено неравенство

$$n \leqslant m.$$

(Кроме того, сигнатуры тензоров $g_{\mathcal{X}}$ и $g_{\mathcal{Y}}$ должны быть такими, чтобы в пространствах $\mathsf{T}_q\mathcal{Y}$ существовали подпространства, изометричные пространствам $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$; конечно, это замечание релевантно только для псевдоримановых пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$.)

Так как для каждого локально изометрического отображения $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ и любой кривой $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ на $\mathcal{X}$ длина кривой $f \circ \gamma\colon I \to \mathcal{Y}$ равна, очевидно, длине кривой γ, то

$$\rho(f(p), f(q)) \leqslant \rho(p, q) \qquad (1)$$

для любых точек $p, q \in \mathcal{X}$ (*локально изометрическое отображение не увеличивает расстояний*; конечно, пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ предполагаются здесь римановыми и связными).

Пусть теперь $n = m$ (и, значит, каждое локально изометрическое погружение является этальным отображением).

Задача 1. Докажите, что *каждое локально изометрическое отображение римановых пространств одной и той же размерности является аффинным отображением* (по отношеиию к связностям $\nabla^{\mathcal{X}}$ и $\nabla^{\mathcal{Y}}$). [Указание. Воспользуйтесь единственностью римановой связности.]

Предложение 1. *Гладкое отображение*

$$f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

связного (псевдо)риманова пространства $\mathcal{X}$ в (псевдо) риманово пространство $\mathcal{Y}$ той же размерности тогда и только тогда локально изометрично, когда

1) *оно аффинно;*

2) *существует такая точка $p_0 \in \mathcal{X}$, что отображение*

$$(df)_{p_0}\colon \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \to \mathsf{T}_{q_0}\mathcal{Y}, \qquad q_0 = f(p_0)$$

является изометрическим отображением пространства $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ на пространство $\mathsf{T}_{q_0}\mathcal{Y}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что согласно утверждению Г предложения 1 лекции 3 для любых точек $p_0, p \in \mathcal{X}$ и любой кривой $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$, соединяющей точку p_0 с точкой p, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} & \xrightarrow{\Pi_\gamma} & \mathsf{T}_p\mathcal{X} \\ {\scriptstyle (df)_{p_0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (df)_p} \\ \mathsf{T}_{q_0}\mathcal{Y} & \xrightarrow{\Pi_{f\circ\gamma}} & \mathsf{T}_q\mathcal{Y} \end{array}$$

где $q_0 = f(p_0)$, $q = f(p)$, а Π_γ и $\Pi_{f\circ\gamma}$ — изометрии (см. задачу 3 лекции 11). □

Метрические накрытия

Задача 2. Пусть $\mathcal{X}$ — гладкое многообразие, $\mathcal{Y}$ — риманово пространство той же размерности и $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — этальное отображение. Докажите, что *на $\mathcal{X}$ существует единственная метрика $g_\mathcal{X}$, по отношению к которой отображение f локально изометрично.* [Указание. Положите $g_\mathcal{X} = f^* g_\mathcal{Y}$.]

Ср. задачу 4 лекции 3 и утверждение **А** задачи 2 лекции 14.

В частности, мы видим, что *для любого гладкого накрывающего отображения $\pi\colon \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ (псевдо)риманова пространства $\mathcal{X}$ на многообразии $\widetilde{\mathcal{X}}$ существует единственная (псевдо)риманова метрика, по отношению к которой отображение π локально изометрично.*

Эта метрика задается формулой $\tilde{g} = \pi^* g$, где g — метрика на $\mathcal{X}$.

Гладкое накрытие $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$, проекция π которого является локально изометричным отображением, называется *метрическим накрытием*. Оно, конечно, будет аффинным накрытием в смысле лекции 3. Поэтому (см. предложение 4 лекции 3) *для метрического накрытия $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ пространство $\widetilde{\mathcal{X}}$ тогда и только тогда полно, когда полно пространство $\mathcal{X}$.*

Замечательно, что в категории полных римановых пространств метрические накрытия исчерпывают все локально изометричные отображения.

Теорема 1. *Каждое локально изометрическое отображение*

$$f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

полных римановых пространств одной и той же размерности является накрытием (автоматически оно будет метрическим).

(Напомним, — см. лекцию 12 — что полные римановы пространства по определению связны.)

Доказательство. Пусть $p_0 \in \mathcal{X}$ и $q_0 = f(p_0)$. Так как пространство $\mathcal{Y}$ полно, то согласно теореме Хопфа — Ринова для любой точки $q \in \mathcal{Y}$ существует геодезическая γ: $t \mapsto \exp_{q_0} tB$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, соединяющая точку q_0 с точкой q. Так как отображение f этально, то в пространстве $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ существует такой вектор A, что $(df)_{p_0}A = B$, а так как отображение f аффинно, то $f(\exp_{p_0} A) = \exp_{q_0} B = q$. Следовательно, отображение f надъективно.

Поэтому для доказательства теоремы 1 нужно лишь доказать, что произвольная точка $q \in \mathcal{Y}$ обладает окрестностью V, ровно накрытой отображением f, т. е. такой, что ее прообраз $f^{-1}V$ является дизъюнктным объединением открытых множеств, диффеоморфно отображающихся посредством f на V.

Для любого $\varepsilon > 0$ мы обозначим символом $V(\varepsilon)$ шаровую ε-окрестность точки q, а символом $U_p(\varepsilon)$ — шаровую ε-окрестность произвольной точки $p \in f^{-1}(q)$.

Пусть $\delta > 0$ — такое число, что 2δ-окрестности $U_p(2\delta)$ и $V(2\delta)$ точек p и q нормальны. Покажем, что за V можно принять δ-окрестность $V(\delta)$.

Так как в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}_{2\delta}(\mathsf{T}_p\mathcal{X}) & \xrightarrow{(df)_p} & \mathbb{B}_{2\delta}(\mathsf{T}_q\mathcal{Y}) \\ {\scriptstyle \exp_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp_q} \\ U_p(2\delta) & \xrightarrow{f} & V(2\delta) \end{array}$$

все отображения, кроме отображения f, являются диффеоморфизмами, то отображение f также будет диффеоморфизмом. Кроме того, если для точек $p_1, p_2 \in f^{-1}(q)$ пересечение $U_{p_1}(\delta) \cap U_{p_2}(\delta)$ непусто, то в силу неравенства треугольника $p_2 \in U_{p_1}(2\delta)$ и, значит, $p_1 = p_2$. Таким образом, $U_{p_1}(\delta) \cap \cap U_{p_2}(\delta) \neq \varnothing$ только при $p_1 = p_2$. Наконец, пусть $a \in f^{-1}V$, где $V = V(\delta)$, и пусть $b = f(a)$. Так как $b \in V$, то $\rho(b, q) = \rho(q, b) < \delta$. Поэтому существует такой вектор $B \in \mathsf{T}_b\mathcal{Y}$, $|B| < \delta$, что $q = \exp_b B$. Пусть $(df)_a A = B$, $A \in \mathsf{T}_a\mathcal{X}$ и $p = \exp_a A$. Так как $f(\exp_a A) = \exp_b B = q$, то $p \in f^{-1}(q)$ и

$\rho(p,a) = \rho(a,p) = \rho(b,q) < \delta$, т. е. $a \in U_p(\delta)$. Следовательно,

$$f^{-1}V = \coprod_{p \in f^{-1}(q)} U_p(\delta). \qquad \square$$

Задача 3. Докажите, что *если римановы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ одной и той же размерности связны, пространство $\mathcal{X}$ полно и существует локально изометрическое отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, то пространство $\mathcal{Y}$ также полно.*

Теорема о растягивающих отображениях

Определение 2. Отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ римановых пространств одной и той же размерности n называется *растягивающим*, если

$$|(df)_p A| \geqslant |A|$$

для любой точки $p \in \mathcal{X}$ и любого вектора $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$.

Следствие 1. *Любое растягивающее отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ полного риманова пространства $\mathcal{X}$ в связное риманово пространство $\mathcal{Y}$ той же размерности является накрытием (вообще говоря, неметрическим!). Если такое отображение существует, то пространство $\mathcal{Y}$ полно.*

Доказательство. Растягивающее отображение, очевидно, этально. Поэтому на $\mathcal{X}$ определена риманова метрика $f^*g_{\mathcal{Y}}$, и, следовательно, по отношению к метрикам $f^*g_{\mathcal{Y}}$ и $g_{\mathcal{Y}}$ отображение f локально изометрично. С другой стороны, ясно, что длина любой кривой γ в пространстве $\mathcal{X}$ относительно метрики $g_{\mathcal{X}}$ не больше длины кривой $f \circ \gamma$ в пространстве $\mathcal{Y}$ относительно метрики $g_{\mathcal{Y}}$, т. е. длины исходной кривой γ относительно метрики $f^*g_{\mathcal{Y}}$. Поэтому для любых точек $p, q \in \mathcal{X}$ имеет место неравенство

$$\rho'(p,q) \geqslant \rho(p,q),$$

где ρ' и ρ — римановы расстояния в $\mathcal{X}$, отвечающие метрикам $f^*g_{\mathcal{Y}}$ и $g_{\mathcal{X}}$, соответственно. Следовательно, каждая фундаментальная относительно метрики ρ' последовательность будет фундаментальной последовательностью и относительно метрики ρ, и потому — в силу полноты пространства $\mathcal{X}$ относительно метрики ρ — будет сходящейся последовательностью. Таким образом, пространство $\mathcal{X}$ полно и относительно метрики $f^*g_\mathcal{Y}$. Следовательно пространство $\mathcal{Y}$ также полно (см. задачу 3). Поэтому к пространствам $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ и отображению f применима теорема 1. □

Изометрические отображения римановых пространств

Определение 3. Локально изометрическое отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ (псевдо)римановых пространств называется *изометрическим отображением* или просто *изометрией*, если оно биективно (и, значит, представляет собой диффеоморфизм).

Примером изометрии является каждая параметризация $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in U$, произвольной элементарной поверхности $\mathcal{X}$. [Здесь роль $\mathcal{X}$ играет U, а роль $\mathcal{Y}$ играет $\mathcal{X}$. Роль $g_\mathcal{Y}$ играет метрический тензор g поверхности $\mathcal{X}$, а роль $g_\mathcal{X}$ — он же, но рассматриваемый как тензор на U.]

Римановы (или псевдоримановы) пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ называются *изометричными*, если существует хотя бы одна изометрия $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. [Отметим, что по отношению к локально изометричным отображениям принята иная терминология. Именно, пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ называются *локально изометричными*, если любая точка пространства $\mathcal{X}$ обладает окрестностью, изометричной окрестности некоторой точки пространства $\mathcal{Y}$.]

Для изометрий неравенство (1) превращается, конечно, в равенство, т. е. *каждая изометрия $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ римановых пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ сохраняет риманово расстояние* (является их изометрией, как метрических пространств).

Задача 4. Покажите, что и обратно, *каждый диффеоморфизм $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ римановых пространств, сохраняющий риманово расстояние, является изометрией.* [Указание. См. предложение 1 лекции III.3.]

Группа изометрий риманова пространства

Изометрии (псевдо)риманова пространства $\mathcal{X}$ на себя составляют, очевидно, группу. Мы будем обозначать эту группу символом $\operatorname{Iso} \mathcal{X}$.

Задача 5. Покажите, что

А. *Для любого метрического накрытия $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$*

группа $\operatorname{Aut}\widetilde{\mathcal{X}}$ *его автоморфизмов (скольжений) состоит из изометрий (является подгруппой группы* $\operatorname{Iso}\widetilde{\mathcal{X}}$).

Б. *Если в гладком накрытии* $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ *пространство* $\widetilde{\mathcal{X}}$ *(псевдо)риманово и если*

а *накрытие регулярно;*

б *его группа автоморфизмов состоит из изометрий пространства* $\widetilde{\mathcal{X}}$,

то на $\mathcal{X}$ *существует единственная (псевдо)риманова структура, по отношению к которой накрытие* $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ *является метрическим накрытием.*

В частности, *для любой дискретно действующей группы* Γ *изометрий (псевдо)риманова пространства* $\mathcal{X}$ *фактормногообразие* $\mathcal{X}/\Gamma$ *обладает единственной (псевдо)римановой структурой, по отношению к которой проекция* $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\Gamma$ *является локально изометрическим отображением (метрическим накрытием).*

Ср. задачи 5 и 6 лекции 3 и задачу 2 лекции 14.

Эллиптическая геометрия

Пример 1. Пусть $\mathbb{S}^n_R$ — сфера радиуса $R > 0$ с центром в $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ и Γ — группа второго порядка, порожденная антиподальным отображением $x \mapsto -x$. Так как последнее отображение является изометрией сферы $\mathbb{S}^n_R$ (рассматриваемой как риманово пространство с метрикой, индуцированной стандартной евклидовой метрикой пространства $\mathbb{R}^{n+1}$), то согласио утверждению Б задачи 5 проективное n-мерное пространство

$$\mathbb{R}P^n_R = \mathbb{S}^n_R/\Gamma$$

обладает единственной римановой метрикой, по отношению к которой естественная проекция $\mathbb{S}^n_R \to \mathbb{R}P^n_R$ является локально изометричным отображением.

Снабженное этой метрикой проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ называется *эллиптическим пространством.*

Подобно тому как пространство $\mathbb{R}^n$ является носителем геометрии Евклида (иначе называемой *параболической геометрией*), шар $\mathbb{B}^n_R$ радиуса $R > 0$ — носителем геометрии Лобачевского (иначе — *гиперболической геометрии*; см. лекцию II.12в), а сфера $\mathbb{S}^n_R$ — носителем сферической геометрии, пространство $\mathbb{R}P^n_R$ служит носителем так называемой *эллиптической геометрии* (или *геометрии Римана*; не путать с римановой геометрией!). В эллиптической геометрии — так же как и в геометриях Евклида и Лобачевского — любые две различные геодезические (которые здесь также называются *прямыми*) пересекаются не более чем в одной точке, но — в отличие от геометрий Евклида и Лобачевского — в эллиптической геометрии любые две прямые непременно пересекаются (параллельных прямых нет), и каждая прямая представляет собой замкнутую линию конечной длины πR. (Тогда как в сферической геометрии геодезические — которыми являются большие круги сферы — пересекаются в двух точках.)

Эллиптическую геометрию — подобно геометриям Евклида и Лобачевского — можно строить чисто синтетически на основе аксиом, но все это далеко выходит за рамки нашего изложения.

Доказательство предложения 1 лекции 18

Теперь мы можем доказать и предложение 1 лекции 18.

Доказательство предложения 1 лекции 18. Пусть $\mathcal{X}$ — произвольная поверхность с римановой метрикой g. Согласно предложению 2 лекции 18 поверхность $\mathcal{X}$ с конформной структурой, индуцированной метикой g, конформно эквивалентна факторпространству вида $\mathcal{M}/\Gamma$, где $\mathcal{M} = \mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{P}$, а Γ — дискретно действующая группа движений соответствующей геометрии, т. е. изометрий $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Поэтому метрика пространства $\mathcal{M}$ (имеющая, как мы знаем, постоянную кривизну и полная) индуцирует некоторую метрику g_0 на поверхности $\mathcal{X}$ (также, конечно, имеющую постоянную кривизну и полную). Метрика g_0 задает ту же конформную структуру, что и метрика g, и, значит, ей конформно эквивалентна. □

Отметим также следующеее предложение, являющееся непосредственным следствием утверждений А и Б задачи 5.

Предложение 2. *Каждое связное (псевдо)риманово пространство изометрично пространству вида $\mathcal{X}/\Gamma$, где $\mathcal{X}$ — односвязное (псевдо)риманово пространство, а Γ — некоторая дискретно действующая группа его изометрий.* □

Размерность группы изометрий

Согласно утверждению задачи 1 группа изометрий $\operatorname{Iso}\mathcal{X}$ является подгруппой группы $\operatorname{Aff}\mathcal{X}$ всех аффинных отображений $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ пространства $\mathcal{X}$ на себя, являющейся, как мы знаем (см. предложение 1 лекции 10), группой Ли.

Задача 6. *Докажите, что группа* $\operatorname{Iso}\mathcal{X}$ *замкнута в группе Ли* $\operatorname{Aff}\mathcal{X}$.

Согласно теореме Картана (теорема 1 лекции IV.15), это доказывает первое утверждение следующего предложения.

***Предложение* 3.** *Для любого связного (псевдо)риманова пространства $\mathcal{X}$ группа $\operatorname{Iso}\mathcal{X}$ его изометрий является группой Ли. Ее размерность не превосходит $\dfrac{n(n+1)}{2}$, где, как всегда, $n = \dim\mathcal{X}$.*

Поля Киллинга

Впрочем, это утверждение можно доказать и иначе (одновременно получнв доказательство и второго утвержденяя).

***Определение* 4.** Векторное поле X на (псевдо)римановом пространстве $\mathcal{X}$ называется *полем Киллинга* (или *инфинитезимальной изометрией*), еслн порожденный этнм полем поток $\{\varphi_t^X\}$ состонт нз изометрий.

Конечно, *каждое поле Киллинга является аффинным полем* (см. определение 1 лекцнн 8), т. е. множество $\mathfrak{iso}\,\mathcal{X}$ всех полей Киллинга содержится в алгебре Ли $\mathfrak{aff}\,\mathcal{X}$ аффинных полей.

Задача 7. Докажите, что *поле $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ тогда и только тогда является полем Киллинга, когда*

$$\pounds_X g = 0$$

(где, как всегда, g — метрический тензор пространства $\mathcal{X}$, а $\pounds_X$ — производная Ли; см. лекцию III.17).

В силу тождества $[\pounds_X, \pounds_Y] = \pounds_{[X,Y]}$ (см. задачу 3 лекции III.19) отсюда следует, что *множество $\mathfrak{iso}\,\mathcal{X}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{aff}\,\mathcal{X}$.*

В координатах равенство $\pounds_X g = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} X^k + g_{ik}\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + g_{kj}\frac{\partial X^k}{\partial x^i} = 0.$$

Если координаты $x^1, \ldots, x^n$ нормальны в точке p и отвечают ортонормированному базису пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ (для простоты мы считаем пространство $\mathcal{X}$ римановым), то $(g_{ij})_p = \delta_{ij}$ (из-за ортонормированности базиса) и $\left(\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)_p = 0$ (потому что $(\Gamma^i_{kj})_p = 0$; см. предложение 1 лекции 2). Поэтому в координатах $x^1, \ldots, x^n$ условие $\mathcal{L}_X g = 0$ в точке p имеет вид

$$\left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)_p + \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)_p = 0.$$

Это означает (см. задачу 2 лекции 8), что при инъективном (на $\mathfrak{aff}\,\mathcal{X}$, а потому и на $\mathfrak{iso}\,\mathcal{X}$) отображении

$$l_p\colon\ \mathfrak{a}\,\mathcal{X} \to \operatorname{Hom}[\mathsf{T}_p\mathcal{X}, (\mathsf{F}\mathcal{X})^*]$$

из лекции 8 каждое поле Киллинга X переходит в отображение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \mapsto a^j_i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p + a^j\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\right)_p \tag{2}$$

с кососимметрической матрицей $\|a^j_i\|$. Поскольку все отображения вида (2) составляют подпространство линейного пространства $\operatorname{Hom}[\mathsf{T}_p\mathcal{X}, (\mathsf{F}\mathcal{X})^*]$ размерности

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

это доказывает, что $\dim \mathfrak{iso}\,\mathcal{X} \leqslant n(n+1)/2$. [Проверьте, что это заключение остается верным и для псевдориманова пространства $\mathcal{X}$.]

Доказательство предложения 3. Группа $\mathcal{G} = \operatorname{Iso}\mathcal{X}$ удовлетворяет условиям теоремы 2 лекции 10 (с $\mathfrak{g} = \mathfrak{iso}\,\mathcal{X}$). $\square$

Заметим, что *на полном (псевдо)римановом пространстве $\mathcal{X}$ каждое поле Киллинга X полно* (см. предложение 3 лекции 8). Поэтому *для такого пространства $\mathcal{X}$ алгеброй Ли группы Ли* $\operatorname{Iso}\mathcal{X}$ *служит алгебра Ли* $\mathfrak{iso}\,\mathcal{X}$.

О пространствах, для которых $\dim \mathfrak{iso}\,\mathcal{X} = n(n+1)/2$, см. конец лекции 23.

Риманова связность на подмногообразии риманова пространства

Перейдем теперь к исследованию случая, когда размерность n многообразия $\mathcal{X}$ меньше размерности m многообразия $\mathcal{Y}$.

Здесь мы ограничимся важнейшим случаем, когда локально изометрическое погружение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ инъективно, т. е. фактически случаем, когда $\mathcal{X}$ является подмногообразием многообразия $\mathcal{Y}$, а f — отображением вложения (и, значит, метрика $g_\mathcal{X}$ на $\mathcal{X}$ является не чем иным, как ограничением $g|_\mathcal{X}$ на $\mathcal{X}$ метрики $g = g_\mathcal{Y}$ на $\mathcal{Y}$; см. лекцию 11), хотя с точностью до тривиальных вариаций терминологии все наши результаты будут справедливы для любых погруженных подмногообразий, даже с самопересечениями; ср. лекцию 3. Нашей основной целью будет сравнение в этом случае связностей $\nabla^\mathcal{X}$ и $\nabla^\mathcal{Y}$ (в духе лекции 3).

Как было уже замечено в лекции 11, метрика $g_\mathcal{X}$ определена для произвольного подмногообразия $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ только в случае, когда метрика $g_\mathcal{Y}$ риманова (положительно определена). В общем же случае, чтобы тензор $g|_\mathcal{X}$ был метрикой (обладал свойством невырожденности), нужно потребовать (см. ниже задачу 8), чтобы в каждой точке $p \in \mathcal{X}$ подпространство $\mathsf{T}_p\mathcal{X} \subset \mathsf{T}_p\mathcal{Y}$ не касалось *изотропного конуса*, состоящего из векторов $B \in \mathsf{T}_p\mathcal{Y}$, для которых $|B| = 0$. Такие подмногообразия $\mathcal{X}$ мы будем называть *вполне неизотропными подмногообразиями.*

Задача 8. Докажите, что *метрика псевдоевклидова пространства $\mathcal{V}$ тогда и только тогда индуцирует на подпространстве $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ невырожденную метрику, когда это подпространство не касается изотропного конуса пространства $\mathcal{V}$.* [Указание. Вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ тогда и только тогда касается изотропного конуса в точке с радиус-вектором $\boldsymbol{a}$, когда $\boldsymbol{ax} = 0$; здесь, как и в Семестре 1, символом $\boldsymbol{ax}$ мы обозначаем скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x}$.]

Для любой точки $p \in \mathcal{X}$ мы обозначим через $\mathsf{N}_p\mathcal{X}$ ортогональное дополнение в пространстве $\mathsf{T}_p\mathcal{Y}$ подпространства $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$.

Задача 9. Покажите, что *подпространства $\mathsf{N}_p\mathcal{X}$ являются слоями некоторого векторного расслоения ν (являющегося подрасслоением расслоения $\tau_\mathcal{Y}|_\mathcal{X}$)*.

В случае, когда подмногообразие $\mathcal{X}$ вполне неизотропно, в каждой точке $p \in \mathcal{X}$ имеет место равенство

$$\mathsf{T}_p\mathcal{Y} = \mathsf{T}_p\mathcal{X} \oplus \mathsf{N}_p\mathcal{X}.$$

Согласно определению 2 лекции 3 это означает, что ν представляет собой нормальное расслоение над подмногообразием $\mathcal{X}$. Оно называется *римановым* (или *метрическим*) *нормальным расслоением*. Говоря о нормальном расслоении вполне неизотропного подмногообразия псевдориманова многообразия, всегда имеют в виду именно это расслоение.

Таким образом, в псевдоримановом пространстве $\mathcal{Y}$ каждое вполне неизотропное подмногообразие $\mathcal{X}$ естественным образом нормализовано, и потому любая связность на $\mathcal{Y}$ однозначно индуцирует некоторую связность на $\mathcal{X}$.

В частности, риманова связность $\nabla = \nabla^{\mathcal{Y}}$ на $\mathcal{Y}$ индуцирует на $\mathcal{X}$ некоторую связность $\nabla^{\mathcal{X}}$.

***Предложение* 4.** *Связность $\nabla^{\mathcal{X}}$, индуцированная на $\mathcal{X}$ римановой связностью $\nabla = \nabla^{\mathcal{Y}}$ на $\mathcal{Y}$, является римановой связностью, отвечающей метрике $g_{\mathcal{X}}$.*

Доказательство. Так как связность ∇ симметрична, то связность $\nabla^{\mathcal{X}}$ также симметрична (см. лекцию 3). Поэтому надо лишь доказать, что связность $\nabla^{\mathcal{X}}$ согласована с метрикой $g_{\mathcal{X}}$.

Пусть X, Y, Z — произвольные векторные поля на $\mathcal{X}$. Рассмотрим на $\mathcal{X}$ поле

$$h(X, Y) = (\nabla|_{\mathcal{X}})_X Y - \nabla^{\mathcal{X}}_X Y \tag{3}$$

(см. формулу (14) лекции 3). Как мы знаем, это поле нормально (принадлежит $\Gamma\nu$) и, значит, $g(h(X, Y), Z) = 0$. Поэтому

$$g_{\mathcal{X}}(\nabla^{\mathcal{X}}_X Y, Z) = g((\nabla|_{\mathcal{X}})_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z)|_{\mathcal{X}},$$

где справа X, Y, Z — продолжения полей X, Y, Z на $\mathcal{Y}$ (см. формулу (9) лекции 3). По аналогичным соображениям

$$g_{\mathcal{X}}(Y, \nabla^{\mathcal{X}}_X Z) = g(Y, \nabla_X Z)|_{\mathcal{X}}.$$

С другой стороны, ясно, что

$$Xg_{\mathcal{X}}(Y, Z) = Xg(Y, Z)|_{\mathcal{X}},$$

где справа X, Y, Z — продолжения полей X, Y, Z на $\mathcal{Y}$. Поэтому

$$Xg_{\mathcal{X}}(Y,Z) = Xg(Y,Z)|_{\mathcal{X}} = g(\nabla_X Y, Z)|_{\mathcal{X}} + g(Y, \nabla_X Z)|_{\mathcal{X}} = $$
$$= g_{\mathcal{X}}(\nabla^{\mathcal{X}}_X Y, Z) + g_{\mathcal{X}}(Y, \nabla^{\mathcal{X}}_X Z).$$

Значит, связность $\nabla^{\mathcal{X}}$ согласована с метрикой $g_{\mathcal{X}}$. □

Задача 10. Покажите, что для связности D на расслоении ν (см. лекцию 3) имеет место формула

$$Xg(s,t) = g(D_X s, t) + g(s, D_X t), \qquad s, t \in \Gamma\nu. \tag{4}$$

По определению это означает, что *связность D согласована с метрикой g на ν.*

В дальнейшем вместо $g_{\mathcal{X}}$ мы будем писать просто g.

Формулы Гаусса и Вейнгартена для подмногообразий римановых пространств

Кроме задаваемого формулой (3) отображения

$$h\colon \mathfrak{a}\mathcal{X} \otimes \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \Gamma\nu$$

(называемого — напомним — *второй основной формой* подмногообразия $\mathcal{X}$), для нормализованного подмногообразия $\mathcal{X}$ определены также линейные операторы

$$A_s\colon \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}, \qquad s \in \Gamma\nu,$$

удовлетворяющие для любого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ формуле Вейнгартена

$$(\nabla|_{\mathcal{X}})_X s = -A_s X + D_X s, \qquad s \in \Gamma\nu$$

(см. формулу (16) лекции 3).

Оказывается, что в рассматриваемом сейчас случае имеет место формула

$$g(A_s X, Y) = g(h(X,Y), s), \qquad X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X},\ s \in \Gamma\nu, \tag{5}$$

(где слева $g = g_{\mathcal{X}}$, а справа $g = g_{\mathcal{Y}}$), и, значит, *форма h и операторы A_s взаимно друг друга определяют* (так что самостоятельное значение имеет только h). Действительно, так как $g(D_X s, Y) = 0$, то согласно формуле Вейнгартена

$$g(A_s X, Y) = -g((\nabla|_{\mathcal{X}})_X s, Y) = -g(\nabla_X s, Y)|_{\mathcal{X}},$$

и потому

$$g(A_s X, Y) = g(s, \nabla_X Y)|_{\mathcal{X}}$$

(так как $g(s, Y) = 0$, то $g(\nabla_X s, Y) + g(s, \nabla_X Y) = 0$). С другой стороны, так как $g(\nabla_X^{\mathcal{X}} Y, s) = 0$, то согласно формуле (3)

$$g(h(X, Y), s) = g((\nabla|_{\mathcal{X}})_X Y, s) = g(\nabla_X Y, s)|_{\mathcal{X}}.$$

Следовательно, $g(A_s X, Y) = g(h(X, Y), s)$. □

Поскольку форма h симметрична (см. лекцию 3), из формулы (5) следует, что

$$g(A_s X, Y) = g(X, A_s Y)$$

для любых полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$. По определению это означает, что *операторы A_s самосопряжены.*

Соберем все доказанные здесь (и в лекции 3) факты в одну теорему.

Теорема 2. *Для любого подмногообразия $\mathcal{X}$ риманова пространства $\mathcal{Y}$ (любого вполне неизотропного подмногообразия $\mathcal{X}$ псевдориманова пространства $\mathcal{Y}$) имеют место формулы Гаусса и Вейнгартена*

$$\nabla_X^{\mathcal{Y}} Y = \nabla_X^{\mathcal{X}} Y + h(X, Y), \qquad X, Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}, \tag{6}$$

$$\nabla_X^{\mathcal{Y}} s = -A_s X + D_X s, \qquad X \in \mathfrak{a}\mathcal{X},\ s \in \Gamma\nu, \tag{7}$$

где

h — симметрическое $\mathsf{F}\mathcal{X}$-билинейное отображение $\mathfrak{a}\mathcal{X} \otimes \mathfrak{a}\mathcal{X} \to \Gamma\nu$ (вторая основная форма),

A_s, $s \in \Gamma\nu$, — линейные самосопряженные операторы $\mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}$, связанные с h формулой (5), а

D — связность на нормальном расслоении ν подмногообразия $\mathcal{X}$, удовлетворяющая соотношению (4). □

Формулы (6) и (7) получены из формул (14) и (16) лекции 3 преобразованием их левых частей в соответствии с формулой (9) лекции 3. Таким образом, слева в этих формулах под полями X, Y и s понимаются их продолжения с $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$. Кроме того, подразумевается, что их левые части должны быть ограничены на $\mathcal{X}$.

Нормаль средней кривизны

Так как след $\operatorname{Tr} A_s$ оператора A_s линейно зависит от s, то формула

$$s \mapsto \operatorname{Tr} A_s$$

определяет на $\Gamma\nu$ линейный функционал, и потому существует такое сечение $t \in \Gamma\nu$ (нормальное векторное поле на $\mathcal{X}$), что

$$(s,t) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr} A_s$$

для любого $s \in \Gamma\nu$, где как всегда $n = \dim\mathcal{X}$. Если $s_1, \dots$ $\dots, s_{m-n}$ — ортонормированный базис модуля $\Gamma\nu$ над некоторой координатной окрестностью U (для определенности мы предполагаем пространство $\mathcal{Y}$ римановым), то над U имеет место равенство

$$t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m-n} \operatorname{Tr} A_{s_i} \cdot s_i$$

Сечение t называется *полем нормалей средней кривизны.*

В случае, когда оно тождественно равно нулю (т. е. $\operatorname{Tr} A_s = 0$ для любого $s \in \Gamma\nu$), подмногообразие $\mathcal{X}$ (напомним, вообще говоря, имеющее самопересечения) называется *минимальным подмногообразием* риманова пространства $\mathcal{Y}$. (Ниже мы покажем, что при $n = 2$ и $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$ это в точности минимальные поверхности в смысле определения 2 лекции 14. Можно доказать — мы этого делать не будем, — что и в общем случае они также обладают соответствующим экстремальным свойством.)

Соотношения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи

Пусть $R_\mathcal{X}$ и $R_\mathcal{Y}$ — тензоры кривизны (псевдо)римановых пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Согласно формулам Гаусса — Вейнгартена (6) и (7) для любых полей $X, Y, Z \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ имеет место равенство (где в первой строке X, Y, Z — продолжения этих полей на $\mathcal{Y}$)

$$\begin{aligned}
R_\mathcal{Y}(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z = \\
&= \nabla_X((\nabla^\mathcal{X})_Y Z + h(Y,Z)) - \nabla_Y((\nabla^\mathcal{X})_X Z + h(X,Z)) - \nabla_{[X,Y]}Z = \\
&= (\nabla^\mathcal{X})_X(\nabla^\mathcal{X})_Y Z + h(X,(\nabla^\mathcal{X})_Y Z) - A_{h(Y,Z)}X + D_X h(Y,Z) - \\
&\quad - (\nabla^\mathcal{X})_Y(\nabla^\mathcal{X})_X Z - h(Y,(\nabla^\mathcal{X})_X Z) + A_{h(X,Z)}Y - D_Y h(X,Z) - \\
&\quad - (\nabla^\mathcal{X})_{[X,Y]}Z - h([X,Y],Z) = \\
&= R_\mathcal{X}(X,Y)Z + h(X,\nabla^\mathcal{X})_Y Z) - h(Y,\nabla^\mathcal{X})_X Z) - h([X,Y],Z) - \\
&\quad - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y + D_X h(Y,Z) - D_Y h(X,Z). \qquad (8)
\end{aligned}$$

Скалярно умножив это равенство на векторное поле $W \in \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ и учтя соотношения (5) (а также тот факт, что поля вида $h(X,Y)$ и $D_X s$ ортогональны в каждой точке полю W), мы немедленно получим, что *для любых полей* $X, Y, Z, W \in \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ *имеет место равенство*

$$R_{\mathcal{X}}(X,Y,Z,W) = R_{\mathcal{Y}}(X,Y,Z,W) - (h(X,W), h(Y,Z)) + \\ + (h(Y,W), h(X,Z)). \quad (9)$$

(Вместо $g(X,Y)$ мы пишем просто (X,Y); ср. лекцию 11.)

Это соотношение называется *соотношением Гаусса.*

Кроме того, так как $[X,Y] = \nabla_X^{\mathcal{X}} Y - \nabla_Y^{\mathcal{X}} X$ (см. формулу (14) лекции 2), то из (8) следует также, что *нормальная компонента* $R_{\mathcal{Y}}^{\perp}(X,Y)Z$ *поля* $R_{\mathcal{Y}}(X,Y)Z$ *выражается формулой*

$$R_{\mathcal{Y}}^{\perp}(X,Y)Z = (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z), \quad (10)$$

где

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = D_X h(Y,Z) - h(\nabla_X^{\mathcal{X}} Y, Z) - h(Y, \nabla_X^{\mathcal{X}} Z)$$

(см. формулу (20) лекции 3).

Соотношение (10) называется *соотношением Петерсона — Кодацци.*

Далее, если s и t — нормальные векторные поля на $\mathcal{X}$, то (мы снова опускаем g)

$$\begin{aligned} -R_{\mathcal{Y}}(X,Y,s,t) &= (\nabla_X \nabla_Y s, t) - (\nabla_Y \nabla_X s, t) - (\nabla_{[X,Y]} s, t) = \\ &= (\nabla_X(-A_s Y + D_Y s), t) - (\nabla_Y(-A_s X + D_X s), t) - \\ &\quad - (-A_s[X,Y] + D_{[X,Y]} s, t) = \\ &= -(h(X, A_s Y), t) + (D_X D_Y s, t) + (h(Y, A_s X), t) - \\ &\quad - (D_Y D_X s, t) - (D_{[X,Y]} s, t). \end{aligned}$$

Введя в рассмотренне аналог

$$-R_D(X,Y,s,t) = (D_X D_Y s, t) - (D_Y D_X s, t) - (D_{[X,Y]} s, t)$$

риманова тензора кривизны для связности D и учтя, что согласно формуле (5) $(h(X, A_t Y), s) = (A_s X, A_t Y)$, мы немедленно получим отсюда, что

$$R_D(X,Y,s,t) = R_{\mathcal{Y}}(X,Y,s,t) - (A_t X, A_s Y) + (A_s X, A_t Y),$$

т. е. — поскольку операторы A_s самосопряжены — что

$$R_{\mathcal{D}}(X,Y,s,t) = R_{\mathcal{Y}}(X,Y,s,t) - ([A_s,A_t]X,Y). \tag{11}$$

Соотношение (11) называется *соотношением Риччи.*

Из соотношения (11), в частности, следует, что *функции $R_{\mathcal{D}}(X,Y,s,t)$ кососимметрично зависят от s и t (и, конечно, от X и Y).*

Случай, когда объемлющее пространство плоско

В случае, когда объемлющее многообразие $\mathcal{Y}$ плоско (его тензор кривизны равен нулю), соотношения (9), (10) и (11) приобретают вид

$$R_{\mathcal{X}}(X,Y,Z,W) = (h(Y,W),h(X,Z)) - (h(X,W),h(Y,Z)), \tag{9'}$$

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z), \tag{10'}$$

$$R_{\mathcal{D}}(X,Y,s,t) = -([A_s,A_t]X,Y). \tag{11'}$$

В частности, *эти соотношения имеют место для любого подмногообразия евклидова пространства (любого вполне неизотропного подмногообразия псевдоевклидова пространства).*

В каждой карте $(U,x^1,\ldots,x^n) = (U,h)$ подмногообразия $\mathcal{X}$ формула Гаусса (3) при $X = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ и $Y = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ имеет вид

$$(\nabla|_{\mathcal{X}})_i \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_i^{\mathcal{X}} \frac{\partial}{\partial x^j} + h_{ij}, \qquad i,j = 1,\ldots,n, \tag{12}$$

где $h_{ij} = h\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)$ — некоторые нормальные векторы. В случае, когда $\mathcal{X}$ является подмногообразием (псевдо)евклидова пространства $\mathcal{V}$ и локально задается векторным уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} = (x^1,\ldots,x^n) \in \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

где $\overset{\circ}{U} = h(U)$ (т. е. если $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ — радиус-вектор точки из U с координатами $x^1,\ldots,x^n$), векторы $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ известным образом (см. лекцию III.12) отождествляется с векторами $\boldsymbol{r}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$. Поэтому первое слагаемое $\nabla_i^{\mathcal{X}} \dfrac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ правой части формулы (12), где Γ_{ij}^k — коэффициенты связности $\nabla^{\mathcal{X}}$ в карте (U, h), мы можем записать в виде $\Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k$. Кроме того, в этом случае ковариантные производные в $\mathcal{Y}$ являются обычными производными (все коэффициенты плоской связности тождественно равны нулю), и потому левая часть формулы (12) является не чем иным, как второй производной $\boldsymbol{r}_{ij} = \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^i \partial x^j}$ радиус-вектора (13). Следовательно, в этом случае формулы (12) приобретают вид

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{h}_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n \tag{14}$$

(чтобы подчеркнуть векторный характер величин h_{ij}, мы вместо h_{ij} пишем теперь $\boldsymbol{h}_{ij}$).