ЛЕКЦИЯ 20

Локально симметрические подмногообразия. — Компактные подмногообразия. — Теорема Чженя — Кюипера. — Первая и вторая квадратичные формы гиперповерхности. — Гиперповерхности, все точки которых омбиличны. — Главные кривизны гиперповерхности. — Скалярная кривизна гиперповерхности. — Гиперповерхности, являющиеся пространствами Эйнштейна. — Жесткость сферы.

Применим общие результаты предыдущей лекции к некоторым замечательным классам подмногообразий евклидова пространства $\mathcal{V}$.

Локально симметрические подмногообразия

Для любой точки p подмногообразия $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$ мы будем обозначать символом σ_p симметрию относительно нормали в точке p, т. е. изометрию пространства $\mathcal{V}$, оставляющую на месте точку p, индуцирующую тождественное преобразование векторного пространства $\mathbf{N}_p\mathcal{X}$ и антиподальное преобразование (с матрицей $-E$) векторного пространства $\mathbf{T}_p\mathcal{X}$.

***Определение* 1.** Подмногообразие $\mathcal{X}$ называется *(локально) симметрическим подмногообразием*, если для каждой точки $p \in \mathcal{X}$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого вектора $A \in \mathbf{T}_p\mathcal{X}$, $|A| = 1$, и любого s, $|s| < \varepsilon$, имеет место равенство

$$\sigma_p(\exp_p sA) = \exp_p(-sA).$$

Конечно, каждое такое подмногообразие является локально симметрическим пространством в смысле лекции 4.

***Предложение* 1.** (Теорема Феруса — Штрюбинга.) *Подмногообразие $\mathcal{X}$ тогда и только тогда локально симметрично, когда его вторая основная форма ковариантно постоянна относительно связности ван дер Вардена — Бортолотти, т. е. когда*

$$\overline{\nabla}_X h(Y, Z) = 0$$

для любых векторных полей $X, Y, Z \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$.

Доказательство. Пусть $p \in \mathcal{X}$, $A \in \mathbf{T}_p\mathcal{X}$, $|A| = 1$, и γ — геодезическая $\gamma_{p,A}$, для которой $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = A$.

Пусть, далее, U — такая окрестность (в $\mathcal{X}$) точки p, X — такое векторное поле на U и $\varepsilon > 0$ — такое положительное число, что $\gamma(s) \in U$ и $\dot\gamma(s) = X_{\gamma(s)}$ при любом $s, |s| < \varepsilon$. Пусть, наконец, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ — уравнение геодезической $\gamma|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ (которую мы впредь будем обозначать просто через γ) как кривой объемлющего евклидова пространства. Тогда в силу обычных отождествлений (и формул (14″) и (16) лекции 3) для любого $s, |s| < \varepsilon$, будут иметь место равенства

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}}(s) &= X_{\gamma(s)},\\
\ddot{\boldsymbol{r}}(s) &= h(X,X)_{\gamma(s)},\\
\dddot{\boldsymbol{r}}(s) &= -\left[A_{h(X,X)}X\right]_{\gamma(s)} + \left[D_X h(X,X)\right]_{\gamma(s)} =\\
&= -\left[A_{h(X,X)}X\right]_{\gamma(s)} + \left[\overline{\nabla}_X h(X,X)\right]_{\gamma(s)}
\end{aligned}$$

(так как $\left(\nabla^{\mathcal{X}}_X X\right)_{\gamma(s)} = \dfrac{\nabla^{\mathcal{X}}\dot\gamma}{dt}(s) = 0$, то $\left[D_X h(X,X)\right]_{\gamma(s)} = \left[\overline{\nabla}_X h(X,X)\right]_{\gamma(s)}$; см. формулу (20) лекции 3).

Если подмногообразие $\mathcal{X}$ локально симметрично, то кривая $\sigma_p \circ \gamma$ является геодезической $\gamma_{p,-A}$ и, значит,

$$\sigma_p(\boldsymbol{r}(s)) = \boldsymbol{r}(-s)$$

для любого $s, |s| < \varepsilon$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\sigma_p(\dot{\boldsymbol{r}}(s)) &= -\dot{\boldsymbol{r}}(-s),\\
\sigma_p(\ddot{\boldsymbol{r}}(s)) &= \ddot{\boldsymbol{r}}(-s),\\
\sigma_p(\dddot{\boldsymbol{r}}(s)) &= -\dddot{\boldsymbol{r}}(-s),
\end{aligned}$$

и, в частности,

$$\begin{aligned}
\sigma_p(\dot{\boldsymbol{r}}(0)) &= -\dot{\boldsymbol{r}}(0),\\
\sigma_p(\ddot{\boldsymbol{r}}(0)) &= \ddot{\boldsymbol{r}}(0),\\
\sigma_p(\dddot{\boldsymbol{r}}(0)) &= -\dddot{\boldsymbol{r}}(0).
\end{aligned}$$

Так как $\sigma_p|_{\mathsf{T}_p\mathcal{X}} = -\mathrm{id}$ и $\sigma_p|_{\mathsf{N}_p\mathcal{X}} = \mathrm{id}$, то первые два из этих уравнений удовлетворяются автоматически (поскольку $\dot{\boldsymbol{r}}(0) \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}(0) \in \mathsf{N}_p\mathcal{X}$), а из третьего следует, что $\left[\overline{\nabla}_X h(X,X)\right]_p = 0$.

Задача 1. Докажите, что *трилинейный симметрический оператор $X, Y, Z \mapsto f(X, Y, Z)$ тогда и только тогда тождественно равен нулю, когда он равен нулю при $X = Y = Z$.* [Указание. Воспользуйтесь тождеством

$$6f(X,Y,Z) = f(X+Y+Z, X+Y+Z, X+Y+Z) - \\ - f(X+Y, X+Y, X+Y) - f(X+Z, X+Z, X+Z) - \\ - f(Y+Z, Y+Z, Y+Z) + f(X,X,X) + f(Y,Y,Y) + f(Z,Z,Z).]$$

Применительно к функционалу $X, Y, Z \mapsto [\nabla_X h(Y, Z)]_p$ (симметрическому в силу соотношений Петерсона — Кодацци; см. формулу (10′) лекции 19) это — ввиду произвольности точки p и орта $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ — немедленно дает, что $\overline{\nabla}_X h(Y, Z) = 0$ для всех $X, Y, Z \in a\mathcal{X}$.

Чтобы доказать обратное утверждение, нам нужно более подробно изучить кривую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $|s| < \varepsilon$.

Пусть сначала $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ — произвольная кривая в евклидовом пространстве, отнесенная к натуральному параметру s (и определенная при $|s| < \varepsilon$). Мы будем говорнть, что эта кривая *обладает рангом m*, если для каждого s, $|s| < \varepsilon$, векторы

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s), \quad \ldots, \quad \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}(s)$$

лннейно независнмы, а вектор $\overset{(m+1)}{\boldsymbol{r}}(s)$ через них линейно выражается. [Конечно, отнюдь не любая кривая обладает рангом.]

Об ортонормированных векторах

$$\boldsymbol{t}_1(s), \quad \ldots, \quad \boldsymbol{t}_m(s),$$

получающихся примененнем к векторам $\dot{\boldsymbol{r}}(s), \ldots, \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}(s)$ процесса ортогонализации Грама — Шмидта, мы будем говорнть, что они составляют *репер Френе* на кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$.

Задача 2. Докажите, что

а *имеют место формулы Френе*

$$\dot{\boldsymbol{t}}_i = -k_{i-1}\boldsymbol{t}_{i-1} + k_i\boldsymbol{t}_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

где $k_1 = k_1(s), \ldots, k_{m-1} = k_{m-1}(s)$ — некоторые положительные функции от $s, |s| < \varepsilon$ (а $k_0 = 0, k_m = 0$);

б *функции $k_1, \ldots, k_{m-1}$ вместе с точкой $r_0 = \boldsymbol{r}(0)$ и векторами $\boldsymbol{t}_1(0), \ldots, \boldsymbol{t}_m(0)$ однозначно определяют кривую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$.*

[Указание. См. в лекции III.2 доказательство соответствующих утверждений для кривых общего типа.]

Функции $k_1, \ldots, k_m$ называются *кривизнами* кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$. Кривая, для которой все кривизны постоянны, называется *винтовой линией*. (Ср. пример 4 лекции III.2.)

Предложение 2. *Если вторая основная форма подмногообразия $\mathcal{X}$ ковариантно постоянна, то геодезическая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ как кривая в пространстве обладает рангом и является винтовой линией. На окрестности U существуют такие векторные поля $X_1, \ldots, X_m$ (где m — ранг кривой), что*

а *поля $(X_1)_{\gamma(s)}, \ldots, (X_m)_{\gamma(s)}$ на кривой γ параллельны $\left((\nabla_X^{\mathcal{X}} X_i)_{\gamma(s)} = 0\right.$ для любого $s, |s| < \varepsilon)$;*

б *для векторов $\boldsymbol{t}_i(s)$, $i = 1, \ldots, m$, репера Френе на кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ имеют место равенства*

$$\boldsymbol{t}_i(s) = \begin{cases} (X_i)_{\gamma(s)}, & \text{если } i \text{ нечетно,} \\ h(X, X_i)_{\gamma(s)}, & \text{если } i \text{ четно,} \end{cases}$$

где X — введенное выше векторное поле на окрестности U (для которого $X_{\gamma(s)} = \dot{\gamma}(s)$, $|s| < \varepsilon$).

В частности, $\boldsymbol{t}_i(s) \in \mathsf{T}_{\gamma(s)}\mathcal{X}$, если i нечетно, и $t_i(s) \in \mathsf{N}_p\mathcal{X}$, если i четно, и, значит,

$$\sigma_p(\boldsymbol{t}_i(0)) = (-1)^i \boldsymbol{t}_i(0)$$

для любого $i = 1, \ldots, m$.

Мы докажем это предложение ниже, а сейчас продолжим доказательство предложения 1.

Пусть

$$\bar{\boldsymbol{r}}(s) = \sigma_p(\boldsymbol{r}(-s)), \qquad |s| < \varepsilon.$$

Ясно, что кривая $\boldsymbol{r} = \bar{\boldsymbol{r}}(s)$, $|s| < \varepsilon$, также обладает рангом m, и потому для нее определен репер Френе $\bar{\boldsymbol{t}}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{t}}_m$.

Задача 3. Докажите, что

а *кривая $\boldsymbol{r} = \bar{\boldsymbol{r}}(s)$ имеет те же (постоянные!) кривизны $k_1, \ldots, k_{m-1}$, что и кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$;*

б *для любого $i = 1, \ldots, m$ имеют место равенства*

$$\bar{\boldsymbol{t}}_i(s) = (-1)^i \sigma_p(\boldsymbol{t}_i(-s)), \qquad |s| < \varepsilon.$$

[Указание. Проведите индукцию по i.]

В частности, мы видим, что

$$\bar{\boldsymbol{t}}_i(0) = (-1)^i \sigma_p(\boldsymbol{t}_i(0)) = \boldsymbol{t}_i(0)$$

для любого $i = 1, \dots m$. Поскольку кривые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ и $\boldsymbol{r} = \bar{\boldsymbol{r}}(s)$ имеют одни и те же кривизны $k_1, \dots, k_{m-1}$, отсюда следует — см. утверждение б задачи 2, — что $\bar{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{r}(s)$ для всех s, т. е. что

$$\sigma_p(\boldsymbol{r}(s)) = \boldsymbol{r}(-s).$$

Так как $\boldsymbol{r}(s) = \exp_p sA$, то, следовательно, подмногообразие $\mathcal{X}$ локально симметрично. $\square$

Осталось доказать предложение 2.

Доказательство предложения 2. Так как $\boldsymbol{t}_1(s) = \dot{\boldsymbol{r}}(s)$, то за поле X_1 мы можем принять поле X. Пусть для некоторого $i \geqslant 1$ уже доказано, что векторы $\dot{\boldsymbol{r}}, \dots, \overset{(i)}{\boldsymbol{r}}$ во всех точках кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ линейно независимы (и, значит, векторы $\boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_i$ определены), построены поля $X_1, \dots, X_i$, и кривизны $k_1, \dots, k_{i-1}$ постоянны. Если i нечетно, то

$$\dot{\boldsymbol{t}}_i(s) = \left(\nabla^{\mathcal{X}}_X X_i\right)_{\gamma(s)} + h\left(X, X_i\right)_{\gamma(s)} = h\left(X, X_i\right)_{\gamma(s)}$$

и, значит,

$$(\dot{\boldsymbol{t}}_i + k_{i-1}\boldsymbol{t}_{i-1})(s) = h(X, X_i)_{\gamma(s)} + h(X, k_{i-1}X_{i-1})_{\gamma(s)} = \\ = h(X, X_i + k_{i-1}X_{i-1})_{\gamma(s)}.$$

Но так как форма h по условию ковариантно постоянна (относительно связности $\overline{\nabla}$) и $(\nabla^{\mathcal{X}}_X X_i)_{\gamma(s)} = 0$, то (см. формулу (20) лекции 3) $[D_X h(X, X_i)]_{\gamma(s)} = 0$ для любого i, и потому нормальный вектор $\dot{\boldsymbol{t}}_i + k_{i-1}\boldsymbol{t}_{i-1}$ ковариантно постоянен вдоль кривой γ (относительно нормальной связности D). В частности, его длина $k_i = |\dot{\boldsymbol{t}}_i + k_{i-1}\boldsymbol{t}_{i-1}|$ постоянна, и потому он либо тождественно равен нулю, либо во всех точках кривой γ отличен от нуля. В первом случае предложение 2 очевидным образом справедливо (с $m = i$), а во втором случае определены вектор $\boldsymbol{t}_{i+1} = \dfrac{\dot{\boldsymbol{t}}_i + k_{i-1}\boldsymbol{t}_{i-1}}{k_i}$ и поле $X_{i+1} = \dfrac{X_i + k_{i-1}X_{i-1}}{k_i}$, связанные соотношением $\boldsymbol{t}_{i+1}(s) = h\left(X, X_{i+1}\right)_{\gamma(s)}$, причем векторы $\left(X_{i+1}\right)_{\gamma(s)}$ параллельны вдоль γ.

Аналогично, если i четно, то

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{t}}_i(s) &= -\left[A_{h(X,X_i)}X\right]_{\gamma(s)} + \left[D_X h(X,X_i)\right]_{\gamma(s)} = \\ &= -\left[A_{h(X,X_i)}X\right]_{\gamma(s)} + \left[\nabla_X h(X,X_i)\right]_{\gamma(s)} = \\ &= -\left[A_{h(X,X_i)}X\right]_{\gamma(s)} \end{aligned}$$

и, значит,

$$(\dot{\boldsymbol{t}}_i + k_{i-1}\boldsymbol{t}_{i-1})(s) = \left[-A_{h(X,X_i)}X + k_{i-1}X_{i-1}\right]_{\gamma(s)}.$$

Если для векторного поля Y на U векторы $Y_{\gamma(s)}$, $|s| < \varepsilon$, параллельны вдоль γ, то

$$\begin{aligned} &g_{\gamma(s)}\left(\frac{d}{ds}\left[A_{h(X,X_i)}X\right]_{\gamma(s)}, Y_{\gamma(s)}\right) = \left[Xg(A_{h(X,X_i)}X, Y)\right]_{\gamma(s)} = \\ &= \left[Xg(h(X,Y), h(X,X_i))\right]_{\gamma(s)} = \\ &= \left[g(\overline{\nabla}_X h(X,Y), h(X,X_i)) + g(h(X,Y), \overline{\nabla}_X h(X,X_i))\right]_{\gamma(s)} = \\ &= \left[g((\overline{\nabla}_X h)(X,Y), h(X,X_i)) + g(h(X,Y), (\overline{\nabla}_X h)(X,X_i))\right]_{\gamma(s)} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

(см. формулу (4) лекции 19) и, значит, $\dfrac{d}{ds}\left[A_{h(X,X_i)}X\right]_{\gamma(s)} = 0$, т. е. векторное поле $\left[A_{h(X,X_i)}X\right]_{\gamma(s)}$ параллельно вдоль кривой γ Поэтому поле $\dot{\boldsymbol{t}}_i + k_{i-1}\boldsymbol{t}_{i-1}$ также параллельно вдоль γ и, значит, функция $k_i = |\dot{\boldsymbol{t}}_i + k_{i-1}\boldsymbol{t}_{i-1}|$ постоянна. Следовательно, это поле либо тождественно равно нулю (что доказывает предложение 2 с $m = i$), либо всюду отлично от нуля, н тогда определены вектор

$$\boldsymbol{t}_{i+1} = \frac{\dot{\boldsymbol{t}}_i + k_{i-1}\boldsymbol{t}_{i-1}}{k_i}$$

и поле

$$X_{i+1} = \frac{-A_{h(X,X_i)}X + k_{i-1}X_{i-1}}{k_i},$$

связанные соотношением $\boldsymbol{t}_{i+1}(s) = \left(X_{i+1}\right)_{\gamma(s)}$, причем векторы $\left(X_{i+1}\right)_{\gamma(s)}$ параллельны вдоль γ.

Поскольку в обоих случаях кривизна k_i постоянна, это по индукции полностью доказывает предложение 2. $\square$

Компактные подмногообразия

Рассмотрим теперь случай, когда — вообще говоря, погруженное — подмногообразие $\mathcal{X}$ евклидова пространства компактно.

Лемма 1. *В каждом компактном подмногообразии $\mathcal{X}$ евклидова пространства $\mathcal{V}$ существует такая точка $p_0 \in \mathcal{X}$, что*

$$h_{p_0}(A, A) \neq 0$$

для любого вектора $A \neq 0$ пространства $\mathbf{T}_{p_0}\mathcal{X}$.

Доказательство. Выбрав в пространстве $\mathcal{V}$ начало отсчета O, рассмотрим в $\mathcal{X}$ точку p_0, длина радиус-вектора которой максимальна. (Такая точка существует, так как многообразие $\mathcal{X}$ компактно.) Пусть в окрестности точки p_0 подмногообразие $\mathcal{X}$ задается уравнением (13) лекции 19. Тогда для любого $i = 1, \ldots, n$ частная производная $2\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}$ функции $\boldsymbol{r}^2$ по x^i равна нулю в точке p_0, т. е. равны нулю все скалярные произведения $\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}$, и, значит, для вторых частных производных в точке p_0 этой функции имеет место формула

$$(\boldsymbol{r}^2)_{ij} = 2(\boldsymbol{r}_{ij}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j) = 2(\boldsymbol{h}_{ij}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j)$$

(здесь мы пользуемся формулой (14) лекции 19). Но так как точка p_0 является точкой максимума функции $\boldsymbol{r}^2$, то матрица $\|(\boldsymbol{r}^2)_{ij}\|$ вторых производных в этой точке отрицательно определена. Поскольку же матрица $\|\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j\| = \|g_{ij}\|$ положительно определена, это доказывает, что в точке p_0 матрица $\|\boldsymbol{h}_{ij}\boldsymbol{r}\|$ отрицательно определена. Следовательно, если $\boldsymbol{h}_{ij}^{(0)}$ и $\boldsymbol{r}^{(0)}$ — значения векторов $\boldsymbol{h}_{ij}$ и $\boldsymbol{r}$ в точке p_0, то для любого отличного от нуля вектора $A \in \mathbf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ число

$$(\boldsymbol{h}_{ij}^{(0)}\boldsymbol{r}^{(0)})A^iA^j = \boldsymbol{h}^{(0)}(A, A)\boldsymbol{r}^{(0)}$$

отлично от нуля (оно даже отрицательно). Поэтому отличен от нуля и вектор $\boldsymbol{h}^{(0)}(A, A) = h_{p_0}(A, A)$. $\square$

Отрицательность чисел $\boldsymbol{h}^{(0)}(A, A)\boldsymbol{r}^{(0)}$ имеет и другие интересные следствия.

Так как вектор $\boldsymbol{r}^{(0)}$ ортогонален всем векторам $\boldsymbol{r}_i$, то он нормален к подмногообразию $\mathcal{X}$ в точке p_0, и, значит, на $\mathcal{X}$ существует такое нормальное векторное поле $s \in \Gamma\nu$, что $s(p_0) = \boldsymbol{r}^{(0)}$. Отвечающий этому полю оператор A_s удовлетворяет для каждого $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ соотношению

$$(A_s X, X) = (h(X, X), s)$$

и, следовательно, обладает тем свойством, что при $X_{p_0} \neq \neq 0$ функция $(A_s X, X)$ принимает в точке p_0 отрицательное значение (функционал $X \mapsto (A_s X, X)$ отрицательно определен в точке p_0). Поэтому след $\operatorname{Tr} A_s$ оператора A_s в точке p_0 отрицателен и, значит, отличен от нуля. Для поля t нормалей средней кривизны это означает, что в точке p_0 поле t отлично от нуля. Следовательно, подмногообразие $\mathcal{X}$ заведомо не минимально.

Таким образом, мы видим, что *ни одно минимальное подмногообразие евклидова пространства не может быть компактным.*

Ср. замечание 1 лекции 14.

Теорема Чженя — Кюипера Для вывода более интересных следствий нам понадобится еще одна лемма чисто алгебраического характера.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ — евклидовы пространства, и пусть*

$$\boldsymbol{h}\colon \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

— такое симметрическое билинейное отображение, что

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \leqslant \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$$

для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$. Тогда если $\dim \mathcal{W} < \dim \mathcal{V}$, то существует такой отличный от нуля вектор $x_0 \in \mathcal{V}$, что

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0) = 0.$$

Доказательство. Пусть $n = \dim \mathcal{V}$, $m = \dim \mathcal{W}$. Векторное уравнение $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = 0$ равносильно квадратным числовым уравнениям для n компонент вектора $\boldsymbol{z}$. Поэтому при $m < n$ оно имеет — вообще говоря, комплексное — отличное от нуля решение

$$\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{x}_0 + i\boldsymbol{y}_0.$$

Так как $z_0 \neq 0$, то без ограничения общности можно предполагать, что $x_0 \neq 0$. С другой стороны, так как

$$h(z_0, z_0) = h(x_0, x_0) - h(y_0, y_0) + 2ih(x_0, y_0),$$

то $h(x_0, x_0) = h(y_0, y_0)$ и $h(x_0, y_0) = 0$. Но по условию

$$h(x_0, x_0)h(y_0, y_0) \leqslant h(x_0, y_0)^2$$

и, значит, $h(x_0, x_0)^2 \leqslant 0$, что возможно только при $h(x_0, x_0) = 0$. □

Предложение 3. (Теорема Чженя—Кюипера). *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное n-мерное подмногообразие m-мерного евклидова пространства $\mathcal{V}$. Предположим, что для любой точки $p \in \mathcal{X}$ линеал $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ содержит k-мерное подпространство $\check{\mathsf{T}}_p\mathcal{X}$, обладающее тем свойством, что для секционной кривизны $K_p(\pi)$ по каждому двумерному направлению $\pi \subset \check{\mathsf{T}}_p$*

$$K_p(\pi) \leqslant 0.$$

Тогда $m \geqslant n + k$.

Доказательство. Из условия на секционную кривизну следует в силу соотношения Гаусса (см. формулу (9′) лекции 19), что на каждом линеале $\check{\mathsf{T}}_p\mathcal{X}$ и, в частности, на линеале $\check{\mathsf{T}}_{p_0}\mathcal{X}$, где p_0 — точка, предусмотренная леммой 1, форма h удовлетворяет условиям леммы 2 (с $\mathcal{W} = \mathsf{N}_{p_0}$). Поэтому если $m - n < k$, то вопреки лемме 1 существует такой вектор $A \in \check{\mathsf{T}}_{p_0}\mathcal{X} \subset \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$, что $h_{p_0}(A, A) = 0$. Следовательно, $m - n \geqslant k$. □

Следствие 1. *Компактное n-мерное риманово пространство $\mathcal{X}$ неположительной секционной кривизны не может быть изометрически погружено в $\mathbb{R}^{2n-1}$.* □

В частности, *в $\mathbb{R}^{2n-1}$ не может быть изометрически погружено никакое компактное n-мерное плоское пространство.*

Например, в трехмерном пространстве не существует поверхности (даже с самопересечениями), изометричной факторпространству $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (тору, снабженному евклидовой метрикой).

Первая и вторая квадратичные формы

В случае $m = n+1$, т. е. когда $\mathcal{X}$ является (вполне неизотропной) *гиперповерхностью* пространства $\mathcal{V}$ (которое мы теперь считаем, вообще говоря, псевдоевклидовым), нормальное подпространство $\mathsf{N}_p\mathcal{X}$ в каждой точке $p \in \mathcal{X}$ одномерно, и потому порождается некоторым вектором $\boldsymbol{n}$, называемым *вектором нормали* гиперповерхности $\mathcal{X}$ в точке p. Так как гиперповерхность $\mathcal{X}$ вполне неизотропна, то *вектор* $\boldsymbol{n}$ *неизотропен*, т. е. $\boldsymbol{n}^2 \neq 0$. (В противном случае этот вектор принадлежал бы подпространству $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ и был бы ортогонален каждому вектору из $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$, следовательно, метрика на $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ была бы вырождена.) Поэтому без ограничения общности можно считать, что *вектор* $\boldsymbol{n}$ *нормирован*, т. е. что

$$\boldsymbol{n}^2 = \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \pm 1$ одно и то же для всех точек $p \in \mathcal{X}$.

Задача 4. Пусть (a, b) — сигнатура псевдоевклидова пространства $\mathcal{V}$. Докажите, что *сигнатура гиперповерхности* $\mathcal{X}$ *равна* $(a-1, b)$ *при* $\varepsilon = 1$ *и равна* $(a, b-1)$ *при* $\varepsilon = -1$.

Выбрать векторы $\boldsymbol{n}$ во всех точках $p \in \mathcal{X}$ так, чтобы они составляли гладкое нормальное поле на $\mathcal{X}$, вообще говоря, нельзя. Когда это можно сделать, гиперповерхность $\mathcal{X}$ называется *двусторонней*, а в противном случае — *односторонней*. (Стандартным примером односторонней поверхности в трехмерном пространстве служит лист Мебиуса; см. лекцию I.31.)

Гладкое нормальное поле на двусторонней гиперповерхности называется ее *оснащением*, а гиперповерхность, на которой выбрано оснащение, называется *оснащенной гиперповерхностью*.

На связной двусторонней поверхности существуют два и только два оснащения, отличающиеся знаком.

Задача 5. Покажите, что *гиперповерхность пространства* $\mathcal{V}$ *тогда и только тогда является двусторонней гиперповерхностью, когда она представляет собой ориентируемое многообразие.*

Отсюда следует — но, впрочем, легко доказывается и непосредственно, — что оснащение существует на любой координатной окрестности U.

Выбрав на U оснащение $\boldsymbol{n}$, мы можем переписать формулы (14) лекции 19 в следующем виде:

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{k}\boldsymbol{r}_k + h_{ij}\boldsymbol{n}, \qquad i,j = 1,\ldots,n, \tag{1}$$

где h_{ij} — некоторые гладкие функции на U, составляющие симметрическую матрицу $\|h_{ij}\|$. Квадратичная форма $h_{ij}dx^i dx^j$ с этой матрицей называется *второй основной формой* гиперповерхности $\mathcal{X}$. (Ее *первой основной формой* является форма $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$.)

Это, кстати, и объясняет применение термина «вторая основная форма» к отображению h в общем случае.

Для оснащенной двусторонней гиперповерхности $\mathcal{X}$ форма h определена на всей этой гиперповерхности (представляет собой поле симметрических тензоров типа (2,0) на $\mathcal{X}$).

Для поверхности трехмерного евклидова пространства (случай $n = 2$ и $\varepsilon = 1$) формулы (1) — это в точности три первые формулы Вейнгартена из лекции III.5.

Аналогичным образом может быть проинтерпретирована и формула (7) лекции 19.

Так как $\boldsymbol{n}^2 = \pm 1$, то для любого поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ имеет место равенство

$$\boldsymbol{n} \cdot D_X\boldsymbol{n} = 0.$$

Поскольку поле $\boldsymbol{n}$ составляет базис одномерного $\mathsf{F}\mathcal{X}$-модуля $\Gamma\nu$ над U, отсюда следует, что $D_X\boldsymbol{n} = 0$ тождественно. Поэтому при $s = n$ в формуле (7) лекции 19 остается справа лишь первое слагаемое, и при $X = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ эта формула приобретает вид

$$\boldsymbol{n}_i = -a_i^j\boldsymbol{r}_j,$$

где $\boldsymbol{n}_i = \dfrac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial x^i}$, а a_i^j — элементы матрицы оператора $A = A_{\boldsymbol{n}}$ в базисе $\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_n$. Поскольку $a_i^j = \varepsilon h_{ik}g^{kj}$ (см. формулу (5) лекции 19), этим доказано, что

$$\boldsymbol{n}_i = -\varepsilon h_{ik}g^{kj}\boldsymbol{r}_j. \tag{2}$$

При $n = 2$ и $\varepsilon = 1$ это в точности две последние формулы Вейнгартена из лекции III.5.

Соотношение Гаусса (формула (9') лекции 19) для гиперповерхности приобретает — при $X = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ и $W = \dfrac{\partial}{\partial x^l}$ — вид

$$\varepsilon R_{ij,kl} = h_{ik}h_{jl} - h_{jk}h_{il}, \qquad i,j,k,l = 1,\ldots,n. \tag{3}$$

Таким образом, *для гиперповерхности евклидова пространства (вполне неизотропной гиперповерхности псевдоевклидова пространства) тензор кривизны выражается через коэффициенты второй основной формы.*

Для поверхности трехмерного евклидова пространства (случай $n = 2$ и $\varepsilon = 1$) формулы (3) сводятся к формуле

$$R_{12,12} = h_{11}h_{22} - h_{12}^2,$$

с точностью до обозначений совпадающей с установленной в лекции 16 формулой для $R_{12,12}$.

Для случая гиперповерхности формула (11′) лекции 19 (соотношение Риччи) удовлетворяется автоматически (обе ее части тождественно равны нулю). Кроме того, так как $D_X\boldsymbol{n} = 0$, то $D_X(h_{ij}\boldsymbol{n}) = Xh_{ij}\cdot\boldsymbol{n}$, и потому

$$(\overline{\nabla}_k h)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^p_{ki}h_{pj} - \Gamma^p_{kj}h_{ip}\right)\boldsymbol{n}.$$

Поскольку коэффициент при $\boldsymbol{n}$ в правой части этой формулы является не чем иным, как компонентой $(\nabla_k h)_{ij}$ частной ковариантной производной $\nabla_k h$ тензора h с компонентами h_{ij}, отсюда следует, что для гиперповерхности в (псевдо)евклидовом пространстве формула (10′) лекции 19 (соотношение Петерсона — Кодацци) равносильна формуле

$$(\nabla_k h)_{ij} = (\nabla_i h)_{kj}, \tag{4}$$

означающей, что *тензор* $(\nabla_k h)_{ij}$ *симметричен* (по всем индексам).

Гиперповерхности, все точки которых омбиличны

Точка гиперповерхности $\mathcal{X}$ называется *омбилической*, если в этой точке тензоры g и h пропорциональны, т. е. существует такое число λ (возможно, равное нулю), что в каждой карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$

$$h_{ij} = \lambda g_{ij} \tag{5}$$

для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Если все точки гиперповерхности $\mathcal{X}$ омбилические, то формула (5) определяет на $\mathcal{X}$ — очевидно, гладкую — функцию $\lambda\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Оказывается, *эта функция постоянна* (если, конечно, многообразие $\mathcal{X}$ связно). Действительно, из (5) следует — ввиду ковариантного постоянства тензора g, — что

$$(\nabla_k h)_{ij} = \lambda_k g_{ij}, \qquad \text{где} \quad \lambda_k = \frac{\partial \lambda}{\partial x^k}.$$

Поэтому в силу формулы (4)

$$\lambda_k g_{ij} = \lambda_i g_{kj}.$$

Свертывая с тензором g^{ij}, мы немедленно получаем отсюда равенство $n\lambda_k = \lambda_k$, возможное (поскольку $n \geqslant 2$) только при $\lambda_k = 0$. Так как это верно для любого $k = 1, \ldots, n$, то, следовательно, $\lambda = \mathrm{const}$. □

Теперь легко видеть, что *связная гиперповерхность $\mathcal{X}$, все точки которой омбиличны, расположена либо на гиперплоскости, либо на сфере пространства $\mathcal{V}$* (т. е. получается из сферы или гиперплоскости удалением некоторого замкнутого, возможно, пустого, множества). Действительно, если $\boldsymbol{r}$, как и выше, — радиус-вектор точек гиперповерхности $\mathcal{X}$ и $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали, то в каждой карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$

$$\boldsymbol{n}_i = -\varepsilon h_{ik} g^{kj} \boldsymbol{r}_j = -\varepsilon \lambda g_{ik} g^{kj} \boldsymbol{r}_j = -\varepsilon \lambda \boldsymbol{r}_i.$$

Поэтому $(\lambda \boldsymbol{r} + \varepsilon \boldsymbol{n})_i = 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$, и, значит вектор $\lambda \boldsymbol{r} + \varepsilon \boldsymbol{n}$ постоянен (на U, а потому и на всем $\mathcal{X}$). Пусть $\lambda \boldsymbol{r} + \varepsilon \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} = \mathrm{const}$. Если $\lambda \neq 0$, то $\boldsymbol{r} - \dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda} = -\dfrac{\varepsilon}{\lambda} \boldsymbol{n}$, и потому $\left| \boldsymbol{r} - \dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda} \right|^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$. Поскольку последнее уравнение задает сферу радиуса $1/|\lambda|$ с центром в точке $\boldsymbol{a}/\lambda$, это доказывает утверждение при $\lambda \neq 0$. Если же $\lambda = 0$, то рассмотрим на $\mathcal{X}$ функцию $\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}$. Так как вектор $\varepsilon \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}$ постоянен, то в каждой карте производные этой функции равны $\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_i$ и, значит, равны нулю. Следовательно, $\boldsymbol{n}\boldsymbol{r} = \text{const}$, и для завершения доказательства остается заметить, что уравнение $\boldsymbol{n}\boldsymbol{r} = \text{const}$ задает в пространстве $\mathcal{V}$ гиперплоскость. $\square$

Если подмногообразие $\mathcal{X}$ полно, то $\mathcal{X}$ совпадает со всей гиперплоскостью или сферой (в псевдоевклидовом случае — с одной полой сферы).

Нетрудное вычисление (которое нам, однако, удобно отложить до лекции 22; см. формулу (11) лекции 22) показывает, что и обратно, все точки сферы или гиперплоскости в (псевдо)евклидовом пространстве являются омбилическими точками. (При $n = 2$ это наглядно очевидно, поскольку в этом случае омбиличность равносильна тому, что индикатриса Дюпена является окружностью.)

Таким образом, *свойство омбиличности всех точек характеризует сферы и гиперплоскости.*

Главные кривизны гиперповерхности

Пусть снова объемлющее пространство $\mathcal{V}$ евклидово.

Являясь в каждой точке $p \in \mathcal{X}$ симметрической билинейной формой на евклидовом пространстве $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$, вторая основная форма h гиперповерхности $\mathcal{X}$ (предполагаемой оснащенной) локально приводится к нормальному виду, т. е. в окрестности U любой точки $p \in \mathcal{X}$ существует такой ортонормированный (не голономный!) базис $X_1, \dots, X_n$ модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$, что

$$h(X_i, X_j) = 0 \qquad \text{при} \quad i \neq j.$$

Диагональные коэффициенты $h_i = h(X_i, X_i)$ формы h в этом базисе называются *главными кривизнами* гиперповерхности X. Будучи собственными значениями самосопряженного оператора $A = A_{\boldsymbol{n}}$ (см. лекцию 19), эти кривизны не зависят от выбора базиса $X_1, \dots, X_n$ и, значит, представляют собой — очевидно, гладкие — функции, определенные на всей гиперповерхности $\mathcal{X}$.

Задача 6. Докажите, что при $n = 2$ это в точности главные кривизны k_1, k_2 поверхности $\mathcal{X}$ в смысле лекции III.4.

Точка гиперповерхности $\mathcal{X}$ тогда и только тогда омбилична, когда в этой точке все главные кривизны равны друг другу.

Заметим, что *кривизны $h_1, \ldots, h_n$ определены с точностью до знака*; при замене оснащения все они одновременно меняют знак.

Особое значение имеют элементарные симметрические функции

$$K_i = \sigma_i(h_1, \ldots, h_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

от главных кривизн, которые алгебраически выражаются через компоненты тензоров g и h.

Функция $H = \frac{1}{n}K_1$, т. е. функция

$$H = \frac{h_1 + \ldots + h_n}{n}$$

называется *средней кривизной* гиперповерхности $\mathcal{X}$, а функция

$$K_n = h_1 \ldots h_n$$

— ее *полной кривизной*.

При $n = 2$ это средняя и гауссова кривизна поверхности в смысле лекции III.4.

При замене оснащения $\mathbf{n}$ на $-\mathbf{n}$ средняя кривизна меняет знак, а полная меняет знак при нечетном n и остается прежней при четном n.

Согласно формуле (9′) лекции 19 компоненты $R_{ij,kl} = R(X_i, X_j, X_k, X_l)$ тензора кривизны $R = R_{\mathcal{X}}$ гиперповерхности $\mathcal{X}$ в базисе $X_1, \ldots, X_n$ выражаются формулой

$$\begin{aligned} R_{ij,kl} = h(X_i, X_k)h(X_j, X_l) - h(X_j, X_k)h(X_i, X_l) = \\ = h_i\delta_{ik}h_j\delta_{jl} - h_j\delta_{jk}h_i\delta_{il}, \end{aligned}$$

т. е. формулой

$$R_{ij,kl} = h_ih_j(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}). \tag{6}$$

Следовательно, *попарные произведения h_ih_j главных кривизн не зависят от погружения (и оснащения) гиперповерхности $\mathcal{X}$ и определяются исключительно ее внутренней геометрией (метрическим тензором g)*.

Поэтому при четном n полная кривизна K_n также является инвариантом внутренней геометрии.

При $n = 2$ это дает инвариантность гауссовой кривизны при изгибаниях (theorema egregium Гаусса; см. лекцию III.4).

Скалярная кривизна гиперповерхности Из формулы (6) следует, что компоненты R_{ij} тензора Риччи гиперповерхности $\mathcal{X}$ в базисе $X_1, \ldots, X_n$ выражаются формулой

$$R_{ij} = \delta_{ij}[h_i(h_1 + \ldots + h_n) - h_i^2],$$

и, значит, его след $\mathcal{R}$ (скалярная кривизна; см. определение 1 лекции 16) равен

$$\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} h_i^2 = 2K_2.$$

Таким образом, *скалярная кривизна гиперповерхности выражается формулой*

$$\mathcal{R} = 2K_2.$$

(В частности, мы видим, что *гауссова кривизна* K гиперповерхности равна $\dfrac{2K_2}{n(n-1)}$ и, вообще говоря, отлична — при $n > 2$ — от ее полной кривизны K_n.)

Гиперповерхности, являющиеся пространствами Эйнштейна В случае, когда гиперповерхность $\mathcal{X}$ является пространством Эйнштейна, из последней формулы следует (см. предложение 3 лекции 17), что при $n \geqslant 3$

$$K_2 = \text{const}.$$

Кроме того, поскольку в ортонормированном базисе $X_1, \ldots, X_n$ метрический тензор имеет компоненты δ_{ij}, условие эйнштейновости $\mathrm{Ric} = \dfrac{\mathcal{R}}{n} g$ сводится к n равенствам

$$h_i(h_1 + \ldots + h_n) - h_i^2 = \frac{2}{n} K_2, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

означающим, что главные кривизны $h_1, \ldots, h_n$ являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 - K_1\lambda + \frac{2}{n} K_2 = 0. \tag{7}$$

Поэтому существует такое k, $1 \leqslant k \leqslant n$, что — возможно, после перенумерации кривизн $h_1, \ldots, h_n$ — имеют место равенства

$$h_1 = \ldots = h_k = \lambda_1, \qquad h_{k+1} = \ldots = h_n = \lambda_2,$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнения (7) (при $k = n$ вторые равенства отсутствуют; в случае $\lambda_1 = \lambda_2$ условно считается, что $k = n$). [Заметим, что корни λ_1, λ_2 необходимо вещественны, и потому $K_1^2 \geqslant \frac{8}{n}K_2$. Это означает, что *для любой гиперповерхности, являющейся пространством Эйнштейна, имеет место неравенство*

$$n^2 H^2 \geqslant 4(n-1)K. \tag{8}$$

При $n = 2$ это сводится к очевидному неравенству $H^2 \geqslant K$, справедливому для любой поверхности трехмерного пространства. Оно называется *неравенством Эйлера.*]

Задача 7. Докажите неравенство (8) прямым вычислением. [Указание. Отдельно рассмотрите случаи $n = 2$ и $n = 3$.]

Так как по формуле Виета $\lambda_1 + \lambda_2 = K_1$, а с другой стороны

$$K_1 = h_1 + \ldots + h_n = k\lambda_1 + (n-k)\lambda_2,$$

то

$$(k-1)\lambda_1 + (n-k-1)\lambda_2 = 0. \tag{9}$$

Кроме того, $\lambda_1\lambda_2 = \frac{2}{n}K_2$.

Можно показать (это трудная теорема!), что функция K_2 (напомним, при $n \geqslant 3$ постоянная) не может быть отрицательной, т. е. либо $K_2 = 0$, либо $K_2 > 0$.

Пусть $K_2 = 0$ (т. е. $\mathcal{R} = 0$). Тогда, не теряя общности, мы можем считать, что $\lambda_2 = 0$, и, значит, что $(k-1)\lambda_1 = 0$. Поэтому либо $\lambda_1 = 0$, либо $k = 1$. В обоих случаях $h_i = 0$ при $i > 1$, и потому, согласно формуле (6), тензор R тождественио равен нулю. Поскольку при $R = 0$ необходимо $\mathcal{R} = 0$, этим доказано, что *гиперповерхность евклидова пространства, являющаяся пространством Эйнштейна, тогда и только тогда локально евклидова (представляет собой плоское риманово пространство), когда ее скалярная кривизна равна нулю* (а главные кривизны все равны нулю, за исключением, быть может, одной).

При $n = 2$ это в точности развертывающиеся поверхности.

Пусть $K_2 > 0$. Тогда λ_1 и λ_2 отличны от нуля и имеют одинаковые знаки.

Поэтому соотношение (9) может быть выполнено либо при $k = 1$ и $n = k + 1$, либо при $k = n$ и $\lambda_2 = (n - 1)\lambda_1$. В первом случае $n = 2$, а во втором $h_1 = \ldots = h_n$ тождественно, следовательно, все точки гиперповерхности $\mathcal{X}$ омбиличны (и, значит, эта гиперповерхность локально является сферой). Этим доказано, что *при $n \geqslant 3$ гиперповерхность евклидова пространства, представляющая собой n-мерное пространство Эйнштейна и имеющая отличную от нуля (и, значит, положительную) скалярную кривизну, локально является сферой.*

В лекции 22 мы докажем, что и обратно, каждая сфера евклидова пространства представляет собой пространство Эйнштейна положительной скалярной кривизны.

Таким образом, *при $n \geqslant 3$ сферы представляют собой единственные гиперповерхности евклидового пространства, являющиеся полными пространствами Эйнштейна отличной от нуля скалярной кривизны.*

Жесткость сферы

Отсюда, в частности, следует, что *при $n \geqslant 3$ любая гиперповерхность $(n+1)$-мерного евклидова пространства, изометричная сфере, сама является сферой.*

Гиперповерхность $\mathcal{X}$ евклидова пространства называется *жесткой*, если любая гиперповерхность, ей изометричная, может быть совмещена с $\mathcal{X}$ движением (вообще говоря, несобственным).

В этой терминологии доказанное утверждение означает, что *сферы размерности $n \geqslant 3$ являются жесткими гиперповерхностями* (теорема о жесткости сферы).

Замечание 1. Эта теорема имеет место и при $n = 2$, но доказательство значительно труднее и требует совсем иных методов.