ЛЕКЦИЯ 21

Достаточное условие жесткости гиперповерхностей. — Гиперповерхности с данной второй основной формой. — Гиперповерхности с данными первой и второй основными формами. — Доказательство их единственности. — Доказательство их существования. — Доказательство локального варианта теоремы существования и единственности.

Достаточное условие жесткости гиперповерхностей

Свойство жесткости имеет — по крайней мере при $n \geqslant 3$ — весьма общий характер и выполнено не только для сфер, но и для любых двусторонних (не обязательно полных!) гиперповерхностей, у которых в каждой точке по крайней мере три главные кривизны отличны от нуля.

Теорема 1. *Чтобы двусторонняя гиперповерхность евклидова пространства была жестка, достаточно, чтобы в каждой ее точке по крайней мере три главные кривизны были отличны от нуля.*

Мы выведем теорему 1 из следующей теоремы.

Теорема 2. *Для связных двусторонних гиперповерхностей $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}^*$ евклидова пространства тогда и только тогда существует изометрия $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, переводящая вторую основную форму гиперповерхности $\mathcal{X}$ во вторую основную форму гиперповерхности $\mathcal{X}^*$, когда эти гиперповерхности можно совместить движением.*

Иначе говоря, *связная двусторонняя гиперповерхность евклидова пространства однозначно определяется — с точностью до движения — ее первой и второй основными формами.*

Конечно, гиперповерхности предполагаются здесь оснащенными, а движения — переводящими одно оснащение в другое. Без последнего условия изометрия, индуцированная движением, может менять знак второй основной формы.

В дальнейшем, для сокращения формулировок, изометрии, удовлетворяющие условиям теоремы 2, мы будем называть изометриями, *сохраняющими вторые основные формы.*

Доказательство теоремы 1. Согласно теореме 2 для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что для изометричных связных двусторонних гиперповерхностей $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$, удовлетворяющих условиям этой теоремы, каждая изометрия $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ сохраняет — с точностью до знака — вторые основные формы, т. е. главные кривизны гиперповерхностей $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$ в соответствующих точках либо одинаковы, либо могут быть сделаны одинаковыми умножением всех кривизн на -1. Поскольку же для изометричных поверхностей тензоры кривизны в соответствующих точках совпадают, в силу формулы (6) лекции 20 все сводится к следующей алгебраической лемме.

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ и $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ — такие вектор-строки длины n, что при $i \neq j$*

$$h_i h_j = k_i k_j$$

для любых $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда если хотя бы три компоненты вектора $\boldsymbol{h}$ отличны от нуля, то $\boldsymbol{h} = \pm \boldsymbol{k}$.

Доказательство. Пусть для определенности $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$ и $h_3 \neq 0$. Тогда $k_1 = \lambda h_1$ и $k_2 = \lambda^{-1} h_2$, где $\lambda \neq 0$. Поэтому для любого $j \neq 1$

$$h_1 h_j = k_1 k_j = \lambda h_1 k_j$$

и, значит, $h_j = \lambda k_j$. Аналогично для любого $i \neq 2$

$$h_i h_2 = k_i k_2 = \lambda^{-1} k_i h_2$$

и, значит, $h_i = \lambda^{-1} k_i$. В частности, $\lambda k_3 = \lambda^{-1} k_3$, что при $k_3 \neq 0$ возможно только при $\lambda = \pm 1$. Следовательно, $\boldsymbol{h} = \pm \boldsymbol{k}$. $\square$

Тем самым по модулю теоремы 2 теорема 1 доказана. $\square$

Гиперповерхности с данной второй основной формой

Что же касается теоремы 2, то ясно, что ограничение на $\mathcal{X}$ произвольного движения пространства $\mathcal{V}$, совмещающего $\mathcal{X}$ с $\mathcal{X}^*$ (и переводящего оснащение гиперповерхности $\mathcal{X}$ в оснащение гиперповерхности $\mathcal{X}^*$), будет изометрией $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, сохраняющей вторые основные формы.

Обратно, пусть существует сохраняющая вторые основные формы изометрия $\varphi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ оснащенных гиперповерхностей $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$. Выбрав в пространстве $\mathcal{X}$ точку p_0, а в линеале $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ базис $A_1, \ldots, A_n$, рассмотрим движение Φ: $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$, переводящее точку p_0 в точку $\varphi(p_0)$, базис $A_1, \ldots$ $\ldots, A_n$ — в базис $(d\varphi)_{p_0} A_1, \ldots, (d\varphi)_{p_0} A_n$ линеала $\mathsf{T}_{\varphi(p_0)}\mathcal{X}^*$, а нормальный вектор $\boldsymbol{n}_0$ — в нормальный вектор $\boldsymbol{n}_0^*$. (Такое движение всегда существует и единственно.) Пусть $\mathcal{X}'$ — образ гиперповерхности $\mathcal{X}^*$ при движении Φ^{-1}. Тогда $p_0 \in$ $\in \mathcal{X}'$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}'$, и отображение

$$\psi = (\Phi|_{\mathcal{X}'})^{-1} \circ \varphi \tag{1}$$

будет сохраняющей вторые основные формы изометрией $\mathcal{X} \to \mathcal{X}'$, оставляющей на месте точку p_0 и векторы $A_1, \ldots, A_n$. Если изометрия ψ индуцируется движением Ψ, то изометрия φ будет индуцироваться движением $\Phi \circ \Psi$. Поэтому теорему 2 достаточно доказать для изометрий вида (1). Это сводит теорему 2 к следующему ее частному случаю (утверждающему, кроме того, что $\Psi = \mathrm{id}$).

Теорема 2′. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$ — такие связные двусторонние оснащенные гиперповерхности, имеющие общую точку p_0, что $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} = \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}^*$. Если существует сохраняющая вторые основные формы изометрия: φ: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, оставляющая на месте точку p_0 и такая, что $(d\varphi)_{p_0} = \mathrm{id}$, то $\mathcal{X} = \mathcal{X}^*$ и $\varphi = \mathrm{id}$.*

Пусть f — произвольное изометрическое погружение n-мерного риманова пространства $\mathcal{X}$ в $(n+1)$-мерное евклидово пространство $\mathcal{V}$. Считая f вложением, мы можем рассматривать пространство $\mathcal{X}$ как гиперповерхность в $\mathcal{V}$, и потому — выбрав оснащение $\boldsymbol{n}$ — говорить о его второй основной форме h. Для сокращения формулировок погружение f, для которого на $\mathcal{X}$ выбрано оснащение $\boldsymbol{n}$, мы будем называть *оснащенным погружением*, а соответствующую вторую основную форму на $\mathcal{X}$ — *второй основной формой оснащенного погружения* f. [Заметим, что если пространство $\mathcal{X}$ связно, то оснащение $\boldsymbol{n}$ однозначно определяется его значением $\boldsymbol{n}_0$ в некоторой точке $p_0 \in \mathcal{X}$, т. е. единичным вектором $\boldsymbol{n}_0$, ортогональным гиперплоскости $(df)_{p_0}\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$. На этом основании мы будем называть вектор $\boldsymbol{n}_0$ *оснащающим вектором* погружения f.]

В этой терминологии теорема 2′ может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 2″. *Пусть f и f^* — два оснащенных изометрических погружения связного ориентируемого n-мерного риманова пространства $\mathcal{X}$ в $(n+1)$-мерное евклидово пространство $\mathcal{V}$. Если*

а *для некоторой точки $p_0 \in \mathcal{X}$ имеют место равенства*

$$f(p_0) = f^*(p_0) \quad \text{и} \quad (df)_{p_0} = (df^*)_{p_0};$$

б *вторые основные формы погружений f и f^* совпадают,*

то $f = f^*$.

Эта **теорема единственности** может быть дополнена соответствующей **теоремой существования**.

Гиперповерхности с данными первой и второй основными формами

По построению каждая гиперповерхность $\mathcal{X}$ представляет собой риманово пространство с дополнительной структурой — симметрическим тензорным полем h типа (2,0), связанным с метрическим тензором соотношениями Гаусса

$$R_{ij,kl} = h_{ik}h_{jl} - h_{jk}h_{il} \tag{2}$$

и Петерсона — Кодацци

$$(\nabla_k h)_{ij} = (\nabla_i h)_{kj} \tag{3}$$

(см. формулы (3) и (4) лекции 20; теперь $\varepsilon = 1$, так как объемлющее пространство $\mathcal{V}$ евклидово), которые должны иметь место в каждой карте многообразия $\mathcal{X}$. Это означает, что соотношения (2) и (3) **необходимы** для того, чтобы для симметрического тензорного поля h, заданного на римановом пространстве $\mathcal{X}$, существовала реализация этого пространства в виде гиперплоскости евклидова пространства, второй основной формой которой является h. Будут ли эти соотношения достаточны? Для односвязных многообразий ответ оказывается утвердительным.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{X}$ — связное и односвязное n-мерное риманово пространство, на котором задано симметрическое тензорное поле h типа (2,0), связанное с метрическим тензором g соотношениями Гаусса (2) и Петерсона — Кодацци (3). Пусть, далее, p_0 —*

произвольная точка пространства $\mathcal{X}$, *и* $A_1, \ldots, A_n$ — *базис пространства* $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$. *Наконец, пусть* $\mathcal{V}$ — *евклидово* $(n+1)$-*мерное пространство,* $\boldsymbol{r}_0$ — *его точка,* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — *такое семейство векторов пространства* $\mathcal{V}$, *что*

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = g_{ij}(p_0) \qquad \text{для всех } i,j = 1, \ldots, n,$$

и $\boldsymbol{n}_0$ — *единичный вектор пространства* $\mathcal{V}$, *ортогональный векторам* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

Тогда существует такое изометрическое погружение

$$f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{V}, \tag{4}$$

что

$$f(p_0) = \boldsymbol{r}_0, \quad (df)_{p_0}A_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \ldots, \quad (df)_{p_0}A_n = \boldsymbol{a}_n, \tag{5}$$

причем по отношению к оснащающему вектору n_0 *второй основной формой погружения* f *служит* h.

Согласно теореме $2''$ *погружение* (4) *единственно.*

Обе теоремы $2''$ и 3 имеют локальные аналоги. Мы объединим их в одну теорему и одновременно обобщим на случай псевдоевклидова пространства $\mathcal{V}$. (Конечно, аналогичное обобщение возможно и по отношению к самим теоремам $2''$ и 3. Вопрос: переносится ли на случай гиперповерхностей псевдоевклидова пространства теорема $\mathring{1}$?)

Пусть в некотором связном открытом множестве $\mathring{U}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ заданы два симметрических тензора g и h типа (2,0) с компонентами g_{ij} и h_{ij}. Предположим, что в каждой точке множества $\mathring{U}$:

а *тензор* g *невырожден (является псевдоримановой метрикой);*

б *имеют место соотношения* (3) *и* (4) *лекции* 20, *где* $R_{ij,kl}$ *и* ∇_k *построены по римановой связности, отвечающей метрике* g, *а* $\varepsilon = \pm 1$.

Пусть, далее, (k,l) — сигнатура тензора g, и пусть $\mathcal{V}$ — псевдоевклидово $(n+1)$-мерное пространство сигнатуры $(k+1,l)$, если $\varepsilon = 1$, и сигнатуры $(k,l-1)$, если $\varepsilon = -1$, где $\varepsilon = \pm 1$ — число, фигурирующее в соотношении (3) лекции 20.

Пусть $\boldsymbol{x}_0 \in \mathring{U}$, и пусть

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{n}_0$$

— такой базис пространства $\mathcal{V}$, что

1) *имеют место равенства*

$$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j = g_{ij}(\boldsymbol{x}_0), \qquad i, j = 1, \ldots, n;$$

2) *вектор $\boldsymbol{n}_0$ ортогонален векторам $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$;*

3) *выполнено соотношение*

$$\boldsymbol{n}_0^2 = \varepsilon.$$

Наконец, пусть $\boldsymbol{r}_0$ — произвольный вектор пространства $\mathcal{V}$.

Рассмотрим всевозможные вектор-функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{V}$, определенные в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$, и такие, что

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{r}_0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a}_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^n}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a}_n. \tag{6}$$

В достаточно малой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$ каждая такая функция удовлетворяет условию регулярности

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^n} \neq 0,$$

и потому уравнение $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ определяет в $\mathcal{V}$ элементарную — очевидно, вполне неизотропную — гиперповерхность $\mathcal{X}$. Эта гиперповерхность обладает оснащением $\boldsymbol{n}$, принимающим в точке $\boldsymbol{r}_0$ значение $\boldsymbol{n}_0$.

Мы будем считать, что вторая основная форма гиперповерхности $\mathcal{X}$ строится именно с помощью этого оснащения.

Теорема 4. *Если тензоры g и h удовлетворяют вблизи точки $\boldsymbol{x}_0$ условиям* **а** *и* **б**, *то существует единственная вектор-функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющая условиям* (6) *и такая, что первая и вторая основные формы гиперповерхности $\mathcal{X}$ совпадают вблизи $\boldsymbol{x}_0$ с g и h соответственно.*

Другими словами, эта теорема утверждает существование и единственность оснащенного погружения в (псевдо)евклидово пространство $\mathcal{V}$ окрестности точки риманова пространства $\mathcal{X}$ с метрикой g, второй основной формой которого является h и которое удовлетворяет начальным условиям (6).

Прежде чем доказывать эту теорему, мы выведем из нее глобальные теоремы 2″ и 3.

Доказательство их единственности

Доказательство теоремы 2″. Утверждение теоремы 4 об единственности вектор-функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ означает, что погружения f и f^*, обладающие свойствами **а** и **б** из теоремы 2″, совпадают в некоторой окрестности точки p_0. Пусть C — множество всех точек $p \in \mathcal{X}$, для которых $f(p) = f^*(p)$ и $(df)_p = (df^*)_p$. Это множество содержит точку p_0, и потому непусто. Кроме того, если $p \in C$, то по тому же утверждению единственности (примененному вместо p_0 к p) существует такая окрестность U точки p, что $U \subset C$. Следовательно, множество C открыто.

Докажем, что множество C также и замкнуто.

Пусть $p \in \overline{C}$, и пусть Φ — движение пространства $\mathcal{V}$, переводящее точку $f(p)$ в точку $f^*(p)$, гиперплоскость $(df)_p\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ — в гиперплоскость $(df^*)_p\mathsf{T}_p\mathcal{X}$, а вектор нормали к $f\mathcal{X}$ в точке $f(p)$ — в вектор нормали к $f^*\mathcal{X}$ в точке $f^*(p)$. Тогда погружения f и $\Phi^{-1}\circ f^*$ удовлетворяют в точке p условиям теоремы 2″, и потому — согласно уже доказанному — совпадают в некоторой окрестности U этой точки. Следовательно, $f^* = \Phi\circ f$ на U. Но так как $p \in \overline{C}$, то существует такая точка $q \in C$, что $q \in U$. Тогда движение Φ оставляет на месте точку $f(q)$ и индуцирует тождественное отображение ассоциированного с $\mathcal{V}$ линеала. Поэтому $\Phi = \mathrm{id}$ и, следовательно, $f^* = f$ на U. Значит, $U \subset C$ и, в частности, $p \in C$.

Являясь непустым открыто-замкнутым подмножеством связного многообразия $\mathcal{X}$, множество C совпадает со всем $\mathcal{X}$. Следовательно, $f = f^*$. □

Доказательство их существования

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.

Для упрощения формулировок изометрические погружения вида $U \to \mathcal{V}$, где U — открытое множество в $\mathcal{X}$, второй основной формой которых (при некотором выборе оснащения $\boldsymbol{n}$) служит ограничение данной формы h на U, мы будем называть в этом доказательстве *допустимыми погружениями*.

Пусть $J(\mathcal{X},\mathcal{V})$ — подмножество пространства $G(\mathcal{X},\mathcal{V})$ ростков гладких отображений из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{V}$ (см. лекцию 5), состоящее из ростков $[f]_p$ допустимых погружений $f\colon U \to \mathcal{V}$, $p \in U$, $U \subset \mathcal{X}$. (Ясио, что если $[f]_p = [f_1]_p$ и f — погружение в p, то f_1 — также погружение в p. Более того, без ограничения общности можно считать, что f_1 является изометрическим вложением.)

Очевидно, что подпространство $J(\mathcal{X},\mathcal{V})$ непусто.

Лемма 2. *На каждой компоненте пространства* $J(\mathcal{X},\mathcal{V})$ *отображение*

$$\alpha\colon J(\mathcal{X},\mathcal{V}) \to \mathcal{X}, \qquad [f]_p \mapsto p, \tag{7}$$

является накрытием.

Доказательство. Согласно уже доказанной теореме 2″, если $f\colon U \to \mathcal{V}$ и $f_1\colon U_1 \to \mathcal{V}$ — такие допустимые погружения, что для некоторой точки $p_0 \in U \cap U_1$ имеют место равенства

$$f(p_0) = f_1(p_0), \quad (df)_{p_0} = (df_1)_{p_0},$$

то $f = f_1$ на компоненте $(U \cap U_1)_{p_0}$ пересечения $U \cap U_1$, содержащей точку p_0, и, значит, $[f]_p = [f_1]_p$ для любой точки $p \in (U \cap U_1)_{p_0}$. Ср. лемму 1 лекции 5.

Это означает (ср. доказательство леммы 2 лекции 5), что открытые (в $\alpha^{-1}U$, а потому и в $J(\mathcal{X},\mathcal{V})$) множества

$$\sigma_f U = \{[f]_p,\ p \in U\}, \tag{8}$$

построенные для всех связных открытых множеств $U \subset \mathcal{X}$ и любых допустимых погружений $f\colon U \to \mathcal{V}$, либо совпадают, либо не пересекаются. Кроме того, на каждом из них отображение является (докажите!) гомеоморфизмом на U. Поэтому для доказательства леммы 2 нужно лишь показать, что для каждой точки $p_0 \in \mathcal{X}$ существует такая ее связная окрестность U, что любая точка $[f_1]_p \in \alpha^{-1}U$ принадлежит какому-нибудь множеству вида (8), т. е. для любой точки $p \in U$ каждое допустимое отображение f_1 вида $U_1 \to \mathcal{V}$, где $p \in U_1 \subset U$, является в окрестности точки p ограничением некоторого допустимого отображения $U \to \mathcal{V}$.

Мы примем за U произвольную окрестность точки p_0, для которой существует хотя бы одно допустимое погружение $f\colon U \to \mathcal{V}$. Существование такой окрестности обеспечивается теоремой 4. Пусть Φ — движение пространства $\mathcal{V}$, переводящее точку $f(p)$ в точку $f_1(p)$, гиперплоскость $(df)_p\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ — в гиперплоскость $(df_1)_p\mathsf{T}_p\mathcal{X}$, а вектор нормали к $f(U)$ в точке $f(p)$ — в соответствующий вектор нормали в точке $f_1(p)$. Тогда погружение $\Phi\circ f\colon U \to \mathcal{V}$ допустимо и согласно теореме 4 совпадает с f_1 в окрестности точки p. □

Доказательство теоремы 3. Согласно теореме 4 существует окрестность U точки p_0 и допустимое погружение $f\colon U \to \mathcal{V}$, удовлетворяющее условиям (5). Пусть $J_0(\mathcal{X},\mathcal{V})$ — компонента пространства $J(\mathcal{X},\mathcal{V})$, содержащая росток $[f]_{p_0}$ этого погружения. Так как пространство $\mathcal{X}$ по условию связно и односвязно, то отображение (7) на компоненте $J_0(\mathcal{X},\mathcal{V})$, будучи накрытием, является гомеоморфизмом, и потому обладает обратным отображением $\alpha^{-1}\colon \mathcal{X} \to J_0(\mathcal{X},\mathcal{V})$. Мы примем за погружение (4) композицию $\beta\circ\alpha^{-1}$, где $\beta\colon J_0(\mathcal{X},\mathcal{V}) \to \mathcal{V}$ — отображение $[f]_p \mapsto f(p)$. Ясно, что эта композиция является допустимым погружением $\mathcal{X} \to \mathcal{V}$ и удовлетворяет условиям (5). □

Замечание 1. Изложенное доказательство теоремы 3 подсказывает, как можно сформулировать и доказать ее аналог для подмногообразий любой коразмерности (а не только гиперповерхностей). Мы оставим это инициативе читателя.

Обратимся теперь к доказательству теоремы 4.

Доказательство локального варианта теоремы существования и единственности

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим следующую систему линейных дифференциальных уравнений относительно $n+1$ вектор-функций $\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_n$ и $\boldsymbol{n}$, где коэффициенты Γ^k_{ij} определяются по тензору g формулами (5′) лекции 11:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial x^i} &= \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{r}_k + h_{ij}\boldsymbol{n}, \qquad i,j = 1,\dots,n,\\ \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^i} &= -\varepsilon h_{ik}g^{kj}\boldsymbol{r}_j, \qquad i = 1,\dots,n.\end{aligned} \tag{9}$$

Если вектор-функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ из теоремы 4 существует, то эти уравнения имеют решение, для которого $\boldsymbol{n}$ является единичным вектором нормали гиперповерхности $\mathcal{X}$, а функции $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ — частными производными $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^n}$ этой функции (см. формулы (1) и (2) лекции 20). Обратно, предположив, что эти уравнения имеют решение $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, \boldsymbol{n}$, для которого

$$\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a}_1, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{r}_n(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a}_n, \quad \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{n}_0, \tag{10}$$

рассмотрим линейную дифференциальную форму $\boldsymbol{r}_j dx^j$ с векторными коэффициентами (т. е. — если быть педантично точным — семейство линейных дифференциальных форм, коэффициентами которых служат координаты вектор-функций $\boldsymbol{r}_j$). Так как в силу первого из уравнений (9) частные производные $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial x^i}$ симметричны по i и j, то эта форма замкнута. Поэтому, согласно лемме Пуанкаре (см. лекцию III.20), в каждой шаровой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$ она является дифференциалом $d\boldsymbol{r}$ некоторой вектор-функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$. Прибавляя константу, мы всегда можем добиться, чтобы имело место равенство $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{r}_0$, и ясно, что удовлетворяющая этому условию функция $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ определена единственным образом.

Пусть $\mathcal{X}$ — гиперповерхность с уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$. Так как векторы $\boldsymbol{r}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, являются для этой гиперповерхности не чем иным, как векторами $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, то скалярные произведения $\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_j$ представляют собой компоненты метрического тензора гиперповерхности $\mathcal{X}$. С другой стороны, так как

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_j}{\partial x^k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial x^k}\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{r}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial x^k} = \Gamma^p_{ki} \boldsymbol{r}_p \boldsymbol{r}_j + \Gamma^p_{kj} \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_p$$

и (см. формулы (2′) и (3) лекции 11)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^p_{ki} g_{pj} + \Gamma^p_{kj} g_{ip}, \tag{11}$$

то функции $\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_j$ и g_{ij} являются решениями одной и той же системы дифференциальных уравнений (11) с одними и теми же начальными условиями $(\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j)(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = g_{ij}(\boldsymbol{x}_0)$. Поэтому эти функции совпадают:

$$g_{ij} = \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j, \qquad i,j = 1,\ldots,n.$$

Этим доказано, что *первой основной формой гиперповерхности $\mathcal{X}$ является тензор g.*

Далее, так как

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_j\boldsymbol{n}}{\partial x^i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial x^i}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{r}_j\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^i} = h_{ij}\boldsymbol{n}^2 - \varepsilon h_{ik}g^{kp}\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{r}_p =$$
$$= h_{ij}\boldsymbol{n}^2 - \varepsilon h_{ik}g^{kp}g_{jp} = (\boldsymbol{n}^2 - \varepsilon)h_{ij}$$

и

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}^2}{\partial x^i} = 2\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^i}\boldsymbol{n} = -2\varepsilon h_{ik}g^{kj}\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{n},$$

то функции $u_0 = \boldsymbol{n}^2$ и $u_j = \boldsymbol{r}_j\boldsymbol{n}$, $j = 1,\ldots,n$, являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_0}{\partial x^i} = -2\varepsilon h_{ik}g^{kj}u_j, \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x^i} = (u_0 - \varepsilon)h_{ij} \tag{12}$$

с начальными условиями $u_0(\boldsymbol{x}_0) = \varepsilon$, $u_j(\boldsymbol{x}_0) = 0$. Поскольку же уравнения (12) удовлетворяются постоянными функциями $u_0 = \varepsilon$, $u_j = 0$, это доказывает, что равенства

$$\boldsymbol{n}^2 = \varepsilon, \qquad \boldsymbol{r}_j\boldsymbol{n} = 0$$

выполняются тождественно. Следовательно, $\boldsymbol{n}$ является единичным вектором нормали гиперповерхности $\mathcal{X}$.

Сравнив теперь формулу Гаусса (1) лекции 20 для гиперповерхности $\mathcal{X}$ с первым уравнением (9), мы немедленно обнаружим, что *второй основной формой гиперповерхности $\mathcal{X}$ является тензор h.*

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 4 нужно лишь доказать, что уравнения (9) имеют единственное решение $\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_n,\boldsymbol{n}$, удовлетворяющее начальным условиям (10).

Уравнения (9), написанные для координат векторов $\boldsymbol{r}_j$ и $\boldsymbol{n}$, принадлежат классу уравнений вида

$$\frac{\partial u_j}{\partial x^i} = A_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{13}$$

где $A_{ij} = A_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ — гладкие функции векторов $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ и $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$, пробегающих связные открытые множества $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$. Начальные же условия (10) имеют вид $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{u}_0$, где $\boldsymbol{x}_0 \in U$ и $u_0 \in V$.

Напомним основы теории уравнений (13).

Пусть X_i — линейные дифференциальные операторы (векторные поля), определенные в области $W = U \times V$ пространства $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ формулами

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + A_{ij}\frac{\partial}{\partial u_j}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Пусть, далее, $p = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in W$, а $\mathcal{E}_p$ — линейная оболочка векторов $(X_1)_p, \ldots, (X_n)_p$. Ясно, что $\mathcal{E}_p$ является n-мерным подпространством касательного пространства $\mathsf{T}_pW = \mathbb{R}^{n+m}$, гладко зависящим от p, т. е. соответствие $p \mapsto \mathcal{E}_p$ представляет собой распределение на W (см. лекцию IV.14). Так как каждое пространство $\mathcal{E}_p$ биективно проектируется на $\mathsf{T}_xU = \mathbb{R}^n$, то интегральными многообразиями распределения $\mathcal{E}$ являются *графики* заданных на U вектор-функций $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ (подмногообразия пространства $\mathbb{R}^{n+m}$, состоящие из всех точек вида $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$). Касательное пространство к графику функции $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ в точке $p = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ порождается, очевидно, векторами

$$\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial u_j},$$

откуда непосредственно вытекает, что *график вектор-функции $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ тогда и только тогда представляет собой интегральное многообразие распределения $\mathcal{E}$, когда эта вектор-функция является решением уравнений* (13).

В силу теоремы Фробениуса (см. лекцию IV.14) отсюда следует, что уравнения (13) тогда и только тогда имеют единственное решение, удовлетворяющее начальному условию вида $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{u}_0$, когда распределение $\mathcal{E}$ инволютивно, т. е. когда для любых $i, j = 1, \ldots, n$ коммутатор $[X_i, X_j]$ линейно выражается через операторы (14). Но так как

$$X_iX_j = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + A_{ik}\frac{\partial}{\partial u_k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + A_{jl}\frac{\partial}{\partial u_l}\right) = \left(\frac{\partial A_{jl}}{\partial x^i} + A_{ik}\frac{\partial A_{jl}}{\partial u_k}\right)\frac{\partial}{\partial u^l} + \ldots,$$

где многоточие обозначает члены, содержащие дифференцирования второго порядка, то

$$[X_i, X_j] = B_{[ij]l}\frac{\partial}{\partial u_l},$$

где

$$B_{ijl} = \frac{\partial A_{jl}}{\partial x^i} + A_{ik}\frac{\partial A_{jl}}{\partial u_k} \tag{15}$$

(а $B_{[ij]l} = B_{ijl} - B_{jil}$). В частности, мы видим, что операторы $[X_i, X_j]$ выражаются только через $\dfrac{\partial}{\partial u_l}$. Поскольку, с другой стороны, никакая нетривиальная линейная комбинация операторов (14) не может, очевидно, обладать этим свойством, тем самым доказано, что распределение $\mathcal{E}$ тогда и только тогда инволютивно, когда

$$[X_i, X_j] = 0 \qquad \text{для любых } i,j = 1,\ldots,n,$$

т. е. когда

$$B_{ijl} = B_{jil} \tag{16}$$

для любых $i,j = 1,\ldots,n$ и $l = 1,\ldots,m$.

Следовательно, *уравнения* (13) *тогда и только тогда имеют единственное решение $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющее начальному условию вида $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{u}_0$, когда выполнены соотношения* (16).

Этому условию можно придать другой — более удобный для запоминания — вид.

Пусть $F = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ — произвольная гладкая функция от $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$. Если $\boldsymbol{u}$ является функцией от $\boldsymbol{x}$, то производная от F по x^i, как известно, равна

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i}\frac{\partial F}{\partial u_k}.$$

Поэтому если $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет уравнениям (13), то эта производная может быть записана в виде

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} + A_{ik}\frac{\partial F}{\partial u_k}. \tag{17}$$

На этом основании функция (17) от $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$ называется *производной от функции F по x^i в силу уравнений* (13). (Подчеркнем, что в (17) аргументы $u_1,\ldots,u_m$ функциями от $x^1,\ldots,x^n$ не предполагаются.)

Так как при $F = A_{jl}$ функция (17) является не чем иным, как функцией (15), то в этой терминологии *условие* (16) *равносильно тому, что для каждого $l = 1,\ldots,m$ и всех $i,j = 1,\ldots,n$ производная по x_i в силу уравнений* (13) *правой части j-го уравнения для функции u_l совпадает с производной по x_j правой части i-го уравнения.*

[В этой форме необходимость условия (16) очевидна из-за симметричности по i и j вторых частных производных $\dfrac{\partial^2 u_l}{\partial x^i \partial x^j}$.]

Замечание 2. В предположении, что все функции A_{ij} вещественно аналитичны (являются функциями класса C^ω), достаточность условия (16) можно доказать методом неопределенных коэффициентов. Для этого нужно, разложив функции A_{ij} в степенные ряды по переменным $x^1,\ldots$ $\ldots,x^n$, $u_1,\ldots,u_m$, подставить в уравнения (13) вместо функций $u_1,\ldots,u_m$ степенные ряды с неопределенными коэффициентами и приравнять коэффициенты при одинаковых одночленах от $x^1,\ldots,x^n$. Получится система линейных уравнений для неизвестных коэффициентов, условие совместности которой в точности равносильно симметричности по i и j всех коэффициентов разложения в степенной ряд функций (15). Поэтому если условие (16) выполнено, то для $u_1, \ldots, u_m$ получатся единственные разложения в степенные ряды. Остается доказать — например, методом мажорант, — что эти ряды сходятся (в окрестности точки x_0). Это рассуждение справедливо, конечно, и в комплексной области.

Для уравнений (9) производные в силу этих уравнений их правых частей по x^j имеют вид (мы заменяем индекс j в первых из этих уравнений на l, а во вторых — на p):

$$\frac{\partial\Gamma^k_{il}}{\partial x^j}\mathbf{r}_k + \Gamma^k_{il}(\Gamma^p_{jk}\mathbf{r}_p + h_{jk}\mathbf{n}) + \frac{\partial h_{il}}{\partial x^j}\mathbf{n} + h_{il}(-\varepsilon h_{jk}g^{kp}\mathbf{r}_p) =$$
$$= \left(\frac{\partial\Gamma^p_{il}}{\partial x^j} + \Gamma^k_{il}\Gamma^p_{jk} - \varepsilon g^{kp}h_{il}h_{jk}\right)\mathbf{r}_p + \left(\Gamma^k_{il}h_{jk} + \frac{\partial h_{il}}{\partial x^j}\right)\mathbf{n};$$

$$-\varepsilon\frac{\partial(h_{ik}g^{kp})}{\partial x^j}\mathbf{r}_p - \varepsilon h_{ik}g^{kp}(\Gamma^q_{jp}\mathbf{r}_q + h_{jp}\mathbf{n}) =$$
$$= -\varepsilon\left(\frac{\partial(h_{ik}g^{kp})}{\partial x^j} + h_{ik}g^{kq}\Gamma^p_{jq}\right)\mathbf{r}_p - \varepsilon h_{ik}h_{jp}g^{kp}\mathbf{n}.$$

Поэтому условие (16) для этих уравнений сводится к следующим четырем соотношениям:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\Gamma^p_{il}}{\partial x^j} + \Gamma^k_{il}\Gamma^p_{jk} - \varepsilon g^{kp}h_{il}h_{jk} = \frac{\partial\Gamma^p_{jl}}{\partial x^i} + \Gamma^k_{jl}\Gamma^p_{ik} - \varepsilon g^{kp}h_{jl}h_{ik},\\
\Gamma^k_{il}h_{jk} + \frac{\partial h_{il}}{\partial x^j} = \Gamma^k_{jl}h_{ik} + \frac{\partial h_{jl}}{\partial x^i},\\
\frac{\partial(h_{ik}g^{kp})}{\partial x^j} + h_{ik}g^{kq}\Gamma^p_{jq} = \frac{\partial(h_{jk}g^{kp})}{\partial x^i} + h_{jk}g^{kq}\Gamma^p_{iq},\\
g^{kp}h_{ik}h_{jp} = g^{kp}h_{jk}h_{ip}.
\end{gathered} \tag{18}$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 4 нам осталось лишь убедиться в том, что эти соотношения выполнены.

Вычтя из левой части первого соотношения (18) его правую часть, мы получим выражение

$$\frac{\partial\Gamma^p_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^p_{jl}}{\partial x^i} + \Gamma^k_{il}\Gamma^p_{jk} - \Gamma^k_{jl}\Gamma^p_{ik} - \varepsilon g^{kp}(h_{il}h_{jk} - h_{jl}h_{ik}) =$$
$$= R^p_{l,ji} - \varepsilon g^{kp}(h_{il}h_{jk} - h_{jl}h_{ik}) = \varepsilon g^{kp}(\varepsilon R_{kl,ji} - h_{il}h_{jk} + h_{jl}h_{ik}),$$

в силу соотношения Гаусса (формула (3) лекции 20) равное нулю. Это доказывает первое соотношение (18).

Переписав второе соотношение (18) в виде

$$\frac{\partial h_{jl}}{\partial x^i} - \Gamma^k_{il} h_{jk} = \frac{\partial h_{il}}{\partial x^j} - \Gamma^k_{jl} h_{ik}$$

и вычтя из обеих его частей $\Gamma^k_{ij} h_{kl}$, мы представим его в виде соотношения Петерсона — Кодацци

$$(\nabla_i h)_{jl} = (\nabla_j h)_{il}.$$

Поэтому второе соотношение также выполнено.

Третье соотношение (18) аналогичным образом представляется в виде равенства ковариантных частных производных

$$(\nabla_i h)^p_j = (\nabla_j h)^p_i \tag{19}$$

тензора h с поднятым вторым индексом (имеющего компоненты $h^p_i = g^{kp} h_{ik}$). [Достаточно из обеих его частей вычесть $\Gamma^q_{ij} h^p_q$.] Но так как метрический тензор g ковариантно постоянен, то $(\nabla_i h)^p_j = g^{kp} (\nabla_i h)_{jk}$. Поэтому после свертки с тензором g соотношение (19) переходит в соотношение Петерсона — Кодацци.

Поскольку четвертое соотношение (18), очевидным образом, выполнено, теорема 4 тем самым полностью доказана. $\square$

Нам эта теорема понадобится только в случае, когда тензор g положительно определен (имеет сигнатуру $(n, 0)$). В этом случае $\mathcal{X}$ является римановым пространством, вложенным в евклидово пространство при $\varepsilon = 1$ и в псевдоевклидово пространство сигнатуры $(n, 1)$ при $\varepsilon = -1$.