ЛЕКЦИЯ 22

Пространства постоянной кривизны. — Модельные пространства постоянной кривизны. — Модельные пространства как гиперповерхности. — Изометрии модельных пространств. — Неподвижные точки изометрий. — Теорема Римана.

Пространства постоянной кривизны Пусть риманово пространство $\mathcal{X}$ обладает следующим свойством.

★ *В каждой точке $p \in \mathcal{X}$ секционная кривизна $K_p(\pi)$ пространства $\mathcal{X}$ одна и та же для всех двумерных направлений $\pi \subset \mathsf{T}_p\mathcal{X}$.*

Таким образом, если это свойство выполиено, то формула

$$K_p = K_p(\pi), \qquad p \in \mathcal{X},\ \pi \subset \mathsf{T}_p\mathcal{X}, \tag{1}$$

корректно определяет на $\mathcal{X}$ иекоторую функцию $K\colon p \mapsto K_p$.

На языке риманова теизора R пространства $\mathcal{X}$, интерпретированного как квадратичный функциоиал иа $\Lambda^2\mathcal{X}$ (см. лекцию 15), свойство ★ означает, что для любого бивекториого поля $P \in \mathsf{A}^2\mathcal{X}$ значение $R(P)$ тензора R на P выражается формулой

$$R(P) = K|P|^2 \tag{2}$$

(ср. формулу (20) лекции 15). С другой стороны, та же формула (2) имеет место, очевидно, и для тензора Бианки KE, где E — тензор Бнанки, являющийся тождественным оператором $\Lambda^2\mathcal{X} \to \Lambda^2\mathcal{X}$ (см. лекцию 16). Таким образом, $R = KE$ на $\mathsf{A}^2\mathcal{X}$, а потому — см. предложение 3 лекции 15 — и на всем $\Lambda^2\mathcal{X}$. Этим доказано, что *риманово пространство $\mathcal{X}$ тогда и только тогда обладает свойством ★, когда для его риманова тензора кривизны имеет место равенство*

$$R = KE, \tag{3}$$

где K — некоторая функция на $\mathcal{X}$ (связанная с секционной кривизной формулой (1)). [Условие (3) у нас уже неоднократно встречалось; см., например, предложение 3 лекции 18.]

Для компонент $R_{ij,kl}$ тензора кривизны условие (3) означает — см. лекцию 15, — что

$$R_{ij,kl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \tag{3'}$$

а для компонент $R^i_{j,kl}$ — что

$$R^i_{j,kl} = K(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}). \qquad (3'')$$

При $n = 2$ это дает новое доказательство предложения 1 лекции 16, поскольку в этом случае условие ★ выполнено автоматически. [Заметим, что в этом случае K является не чем иным, как гауссовой кривизной поверхности $\mathcal{X}$.]

Рассмотрим тензор W с компонентами

$$W^i_{j,kl} = R^i_{j,kl} - \frac{1}{n-1}(R_{jl}\delta^i_k - R_{jk}\delta^i_l)$$

или

$$W_{ij,kl} = R_{ij,kl} - \frac{1}{n-1}(R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il}).$$

Легко видеть, что тензор W является *тензором Вейля*. Он называется *тензором проективной кривизны*. (Мы здесь не имеем возможности объяснить это название.)

Предложение 1. *Тензор W тогда и только тогда равен нулю, когда риманов тензор кривизны пространства $\mathcal{X}$ имеет вид* (3).

Доказательство. Ясно, что если $R_{ij} = \frac{\mathcal{R}}{n}g_{ij}$ (пространство $\mathcal{X}$ является пространством Эйнштейна), то тождество (3′) равносильно равенству $W_{ij,kl} = 0$ (см. формулы (10) лекции 18 и (7) лекции 16). С другой стороны, как мы знаем (см. задачу 12 лекции 17), если (3′) выполнено, то пространство $\mathcal{X}$ эйнштейново, а если $W_{ij,kl} = 0$, т. е.

$$R_{ij,kl} = \frac{1}{n-1}(R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il}),$$

то

$$R_{ik} = g^{jl}R_{ij,kl} = \frac{1}{n-1}(\mathcal{R}g_{ik} - R_{ik}),$$

и снова $R_{ij} = \frac{\mathcal{R}}{n}g_{ij}$. □

Пусть $n \geqslant 3$.

Предложение 2. (Теорема Шура). *Для любого связного риманова пространства $\mathcal{X}$ размерности $n \geqslant 3$, удовлетворяющего условию ★, функция K, определенная формулой* (1), *постоянна*.

Доказательство. Из (3″) следует, что для любых индексов i, j, k, l и s

$$\nabla_s R^i_{j,kl} = g_{jl}\delta^i_k \partial_s K - g_{jk}\delta^i_l \partial_s K,$$

где $\partial_s K = \dfrac{\partial K}{\partial x^s}$. (Напомним, что тензоры с компонентами g_{ij} и δ^i_j ковариантно постоянны.) Поэтому в силу второй формулы Бианки (формула (23″) лекции 2) циклирование по k, l и s правой части этого равенства дает нуль:

$$g_{j(l}\delta^i_k \partial_{s)} K - g_{j(k}\delta^i_l \partial_{s)} K = 0. \qquad (4)$$

Так как по условию $n \geqslant 3$, то для любого индекса s существуют отличные от него и друг от друга индексы k и l. Но если все три индекса k, l и s различны, то при $i = k$ равенство (4) приобретает вид

$$g_{js}\partial_l K - g_{jl}\partial_s K = 0.$$

Свернув это равенство с тензором g^{pj}, мы получим, что

$$\delta^p_s \partial_l K - \delta^p_l \partial_s K = 0.$$

В частности, при $p = l$ отсюда следует (поскольку $\delta^l_s = 0$), что $\partial_s K = 0$. Так как это верно для любого s, то, следовательно, $K = \mathrm{const}$. □

Задача 1. Изложите это рассуждение в инвариантной (не использующей компонент) форме.

Предложение 2 мотивирует следующее определение.

***Определение* 1.** Связное риманово пространство $\mathcal{X}$ называется *пространством постоянной кривизны* K, если для каждой его точки $p \in \mathcal{X}$ и любого двумерного направления $\pi \subset \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ его секционная кривизна $K_p(\pi)$ равна K, т. е., иначе говоря, если для его риманова тензора кривизны имеет место равенство (3).

При $n \geqslant 3$ это, согласно предложению 2, в точности связные римановы пространства, для которых имеет место равенство (2), а при $n = 2$ — уже известные нам (см. лекцию III.5) поверхности постоянной гауссовой кривизны.

Модельные пространства постоянной кривизны

Следующие три примера пространств постоянной кривизны имеют, как мы увидим, особое значение. Указанные в этих примерах пространства называются *модельными пространствами постоянной кривизны*.

Пример 1. Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ с обычной евклидовой метрикой

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2. \tag{5}$$

Так как $g_{ij} = \text{const}$, то $\Gamma^i_{kj} = 0$ и, тем более, $R^i_{j,kl} = 0$. Поэтому равенство (3″) имеет место при $K = 0$.

Таким образом, *пространство* $\mathbb{R}^n$ *является пространством нулевой постоянной кривизны.*

Пример 2. Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{B}^n_R$ — открытый шар $|\boldsymbol{x}| < R$ пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой

$$ds^2 = 4R^4 \frac{(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2}{(R^2 - |\boldsymbol{x}|^2)^2}, \tag{6}$$

где $|\boldsymbol{x}|^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$.

Непосредственное вычисление тензора кривизны в этом случае хотя и вполне автоматично, но представляет собой задачу в достаточной мере утомительную. Поэтому мы изберем обходной путь.

В первую очередь мы заметим, что шар $\mathbb{B}^n_R$ с метрикой (6) — это в точности модель Пуанкаре n-мерного пространства Лобачевского (см. формулу (16) лекции II.12в). Поэтому для его исследования мы можем применить геометрию Лобачевского.

Пусть сначала $n = 2$. Тогда мы можем перейти к модели Пуанкаре на верхней полуплоскости, для которой

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

(см. формулу (21) лекции II.12в). Дальнейшее преобразование

$$u = R \ln \frac{y}{R}, \quad v = x$$

(с обратным преобразованием $x = v$, $y = Re^{u/R}$) переводит эту квадратичную форму в форму

$$ds^2 = du^2 + e^{-2u/R} dv^2,$$

т. е. в форму, задаваемую формулой (9) лекции 16 (с $G = e^{-2u/R}$). Поэтому согласно произведенному в лекции 16 вычислению гауссова кривизна в этом случае будет равна

$$-\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}} = -\frac{e^{-u/R}}{R^2 e^{-u/R}} = -\frac{1}{R^2}.$$

Этим доказано, что при $n = 2$ наше риманово пространство (плоскость Лобачевского) является пространством постоянной отрицательной кривизны $K = -\frac{1}{R^2}$.

Пусть теперь $n > 2$.

В геометрии Лобачевского прямые являются, как мы знаем (см. лекцию II.12в), кратчайшими и, значит, геодезическими. Поэтому для любой точки $p_0 \in \mathcal{X}$ и любой двумерной плоскости $\pi \subset \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ поверхность из предложения 2 лекции 16 (заметаемая исходящими из точки p_0 геодезическими) будет не чем иным, как плоскостью Лобачевского в пространстве Лобачевского, и, значит, сама будет двумерным пространством Лобачевского. Следовательно, по уже доказанному, ее гауссова кривизна, т. е — согласно предложению 2 лекции 16 — секционная кривизна $K_{p_0}(\pi)$, будет равна $-\frac{1}{R^2}$. Это доказывает, что *при любом* $n \geqslant 2$ *пространство Лобачевского* $\mathbb{B}^n_R$ *является римановым пространством постоянной отрицательной кривизны* $K = -\frac{1}{R^2}$.

Заметим, что метрика (6) (после умножения всех координат на 2) может быть также записана в виде

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2}{\left(1 + \frac{K}{4}|\boldsymbol{x}|^2\right)^2}. \tag{7}$$

При $K = 0$ эта метрика переходит в евклидову метрику (5) из примера 1.

Пример 3. Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{S}^n_R$ — сфера $|\boldsymbol{t}|^2 = R^2$, $\boldsymbol{t} = (t^0, t^1, \ldots, t^n)$, радиуса R пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ с метрикой, индуцированной евклидовой метрикой пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $x^1, \ldots, x^n$ — стереографические координаты иа сфере $\mathbb{S}^n_R$, связанные с координатами $t^0, t^1, \ldots, t^n$ формулами

$$t^0 = R\frac{R^2 - |\boldsymbol{x}|^2}{R^2 + |\boldsymbol{x}|^2}, \qquad |\boldsymbol{x}|^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2,$$

$$t^i = \frac{2R^2}{R^2 + |\boldsymbol{x}|^2}x^i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

(см. пример 10 лекции III.6). Тогда в понятных обозначениях

$$\begin{aligned}
dt^0 &= -\frac{4R^3}{(R^2+|\boldsymbol{x}|^2)^2}\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x},\\
dt^i &= -\frac{4R^2\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x}}{(R^2+|\boldsymbol{x}|^2)^2}x^i + \frac{2R^2dx^i}{R^2+|\boldsymbol{x}|^2} =\\
&= -\frac{2R^2}{(R^2+|\boldsymbol{x}|^2)^2}[2(\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x})x^i - (R^2+|\boldsymbol{x}|^2)dx^i],
\end{aligned}$$

и потому

$$\begin{aligned}
&(dt^0)^2 + (dt^1)^2 + \ldots + (dt^n)^2 =\\
&= \frac{16R^6}{(R^2+|\boldsymbol{x}|^2)^4}(\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x})^2 + \frac{4R^4}{(R^2+|\boldsymbol{x}|^2)^4}\Bigg[4(\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x})^2\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 -\\
&-4(R^2+|\boldsymbol{x}|^2)(\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x})\sum_{i=1}^{n}x^idx^i + (R^2+|\boldsymbol{x}|^2)^2\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2\Bigg] =\\
&= \frac{4R^4}{(R^2+|\boldsymbol{x}|^2)^4}[4R^2(\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x})^2 + 4(\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x})^2|\boldsymbol{x}|^2 -\\
&-4(R^2+|\boldsymbol{x}|^2)(\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x})^2 + (R^2+|\boldsymbol{x}|^2)^2(d\boldsymbol{x})^2] = \frac{4R^4(d\boldsymbol{x})^2}{(R^2+|\boldsymbol{x}|^2)^2}.
\end{aligned}$$

Это означает, что *риманова метрика на* $\mathbb{S}^n_R$ *задается в координатах* $x^1,\ldots,x^n$ *формулой*

$$ds^2 = 4R^4\frac{(dx^1)^2+\ldots+(dx^n)^2}{(R^2+|\boldsymbol{x}|^2)^2}. \tag{8}$$

Чтобы вычислить кривизну этой метрики, можно поступить, как выше в примере 2 (следует только предварительно убедиться, что геодезическими на сфере являются дуги больших кругов), но можно поступить и еще проще, заметив, что полученный в примере 2 результат означает, что если при $K < 0$ для метрики (7) произвести все полагающиеся для вычисления тензора кривизны выкладки, то получится тензор с компонентами (3). Но ясно, что эти выкладки никак не могут зависеть от знака постоянного параметра K и при K положительном (или равном нулю) дадут тот же результат. Поскольку метрика (8) имеет (после умиожения всех координат на 2) вид (7) с $K = \frac{1}{R^2}$, это доказывает, что *сфера* $\mathbb{S}^n_R$ *с метрикой* (8) *является пространством постоянной кривизны* $K = \frac{1}{R^2}$.

Подчеркнем, что *метрику вида* (7) *имеют все три пространства* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{B}^n_R$ *и* $\mathbb{S}^n_R$. Различие между этими пространствами только в том, что K равно нулю для $\mathbb{R}^n$, отрицательно для $\mathbb{B}^n_R$ и положительно для $\mathbb{S}^n_R$. (Кроме того, для пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{B}^n_R$ координаты $x^1, \dots, x^n$ определены всюду, а для сферы $\mathbb{S}^n_R$ — лишь вне полюса стереографической проекции.)

Для единства обозначений мы будем пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{B}^n_R$ и $\mathbb{S}^n_R$ с метрикой (7) обозначать символом $\mathcal{M}_K$, где $K = 0$ для пространства $\mathbb{R}^n$ и $K = \pm\frac{1}{R^2}$ для пространств $\mathbb{S}^n_R$ и $\mathbb{B}^n_R$.

Модельные пространства как гиперповерхности

По определению при $K > 0$ пространство $\mathcal{M}_K$ является гиперповерхностью $\mathbb{S}^n_R$, $R = 1/\sqrt{K}$, евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ и риманова метрика на $\mathcal{M}_K$ индуцирована евклидовой метрикой на $\mathbb{R}^{n+1}$. Аналогично, при $K = 0$ пространство $\mathcal{M}_K = \mathbb{R}^n$ мы можем отождествить с гиперповерхностью $x^{n+1} = 0$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, и тогда метрика на $\mathcal{M}_K$ будет также индуцироваться метрикой на $\mathbb{R}^{n+1}$. Что же касается пространства $\mathcal{M}_K$ при $K < 0$, то (см. лекцию II.12в) оно может быть отождествлено с гиперповерхностью псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ сигнатуры $(1, n)$, являющейся полой сферы радиуса $R = 1/\sqrt{-K}$ этого пространства. Поскольку эта гиперповерхность очевидным образом вполне неизотропна, метрика пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ индуцирует на $\mathcal{M}_K$, $K < 0$, некоторую риманову метрику (точнее, риманова метрика получается дополнительным изменением знака).

Задача 2. Покажите, что последняя метрика совпадает с метрикой (7).

Таким образом, *каждое пространство* $\mathcal{M}_K$ *является гиперповерхностью пространства* $\mathbb{R}^{n+1}$ (*евклидова* *при $K \geqslant 0$ и псевдоевклидова при $K < 0$), снабженной индуцированной римановой метрикой.*

Вычислим вторую основную форму h этой гиперповерхности.

Так как радиус сферы $\mathbb{S}^n_R$ направлен по нормали к этой сфере, то единичный вектор ее нормали в точке с радиус-вектором $\boldsymbol{a}$ задается формулой

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}}{R}. \tag{9}$$

Оказывается, что *формула* (9) *остается в силе и для сферы псевдоевклидова пространства* (если, конечно, ортогональность и длину понимать по отношению к псевдоевклидову скалярному умножению). Действительно, сфера радиуса R как в евклидовом, так и в псевдоевклидовом пространстве имеет уравнение

$$\boldsymbol{t}^2 - R^2 = 0 \tag{10}$$

(но в псевдоевклидовом пространстве $\boldsymbol{t}^2 = (t^0)^2 - (t^1)^2 - \ldots \ldots - (t^n)^2$; мы предполагаем — поскольку только этот случай нам и нужен, — что псевдоевклидова метрика имеет сигнатуру $(1, n)$). С другой стороны, из курса анализа известно, что касательная гиперплоскость в точке с радиус-вектором $\boldsymbol{a} = (a^0, a^1, \ldots, a^n)$ к гиперповерхности с уравнением $F(\boldsymbol{t}) = 0$ задается уравнением

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t^0}\right)_{\boldsymbol{a}}(t^0 - a^0) + \left(\frac{\partial F}{\partial t^1}\right)_{\boldsymbol{a}}(t^1 - a^1) + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial t^n}\right)_{\boldsymbol{a}}(t^n - a^n) = 0.$$

Это уравнение для сферы (10) имеет (в случае псевдоевклидова пространства сигнатуры $(1, n)$ и после сокращения на 2) вид

$$a^0(t^0 - a^0) - a^1(t^1 - a^1) - \ldots - a^n(t^n - a^n) = 0,$$

означающий, что вектор $\boldsymbol{a}$ ортогонален (по отношению к псевдоевклидовой метрике) каждому вектору $\boldsymbol{t} - \boldsymbol{a}$ этой гиперплоскости, т. е. — на другом языке — что этот вектор является в рассматриваемой точке вектором нормали сферы (10). Следовательно, единичный вектор нормали имеет вид $\lambda\boldsymbol{a}$, где λ — обратная величина длины вектора $\boldsymbol{a}$ (в псевдоевклидовой метрике). Для завершения доказательства осталось заметить, что по условию эта длина равна R. $\square$

Заметим, что мы фактически повторили обычное рассуждение, доказывающее формулу (9) для сферы евклидова пространства.

Пусть g_{ij} — риманова метрика на гиперповерхности $\mathcal{M}_K$, которая в случае $K \geqslant 0$ индуцирована метрикой пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, а в случае $K < 0$ отличается от индуцированной метрики знаком. Докажем, что *для каждой из гиперповерхностей $\mathcal{M}_K$ имеет место равенство*

$$h_{ij} = -\sigma\sqrt{|K|}g_{ij}, \tag{11}$$

где $\sigma = +1$ при $K \geqslant 0$ и $\sigma = -1$ при $K < 0$ (и, значит, *все точки гиперповерхности $\mathcal{M}_K$ омбиличны*; см. лекцию 20). Действительно, согласно формуле (1) лекции 20, если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ — векторное параметрическое уравнение гиперповерхности $\mathcal{M}_K$, то

$$h_{ij} = \boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{n},$$

поскольку $\boldsymbol{n}^2 = 1$. С другой стороны, так как $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{n} = 0$, то $a_{ij}\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{n}_j$, а согласно формуле (9) при $K \neq 0$

$$\boldsymbol{n}_j = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{R}\right) = \frac{\boldsymbol{a}_j}{R} = \sqrt{|K|}\boldsymbol{a}_j.$$

Поскольку $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = \sigma g_{ij}$, это доказывает (11). (При $K = 0$ формула (9) не применима, но в этом случае $\boldsymbol{n} = \text{const}$, и потому $h_{ij} = 0$.) □

Изометрии модельных пространств Интерпретация пространства $\mathcal{M}_K$ как подпространства (псевдо)евклидова пространства позволяет без особого труда найти также его группу изометрий $\operatorname{Iso}\mathcal{M}_K$.

Пусть сначала $K > 0$. Каждое ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ (элемент группы $\mathrm{O}(n+1)$) переводит сферу $\mathbb{S}^n_R$ в себя и, значит, — будучи изометрией пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ — индуцирует некоторую изометрию $\mathbb{S}^n_R \to \mathbb{S}^n_R$. Возникающее отображение $\mathrm{O}(n+1) \to \operatorname{Iso}\mathbb{S}^n_R$ является, очевидно, мономорфизмом. Это позволяет отождествлять ортогональное преобразование из $\mathrm{O}(n+1)$ с его образом в $\operatorname{Iso}\mathbb{S}^n_R$ и, значит, считать, что

$$\mathrm{O}(n+1) \subset \operatorname{Iso}\mathbb{S}^n_R. \tag{12}$$

При $K < 0$ аналогичным образом возникает включение

$$O^{\uparrow}(1,n) \subset \operatorname{Iso} \mathbb{B}^n_R, \tag{13}$$

где $O^{\uparrow}(1,n)$ — группа всех ортохронных (сохраняющих направление оси времени) псевдоортогональных преобразований $(n+1)$-мерного псевдоевклидова пространства сигнатуры $(1,n)$.

Наконец, при $K = 0$ имеет место включение

$$\operatorname{Euc}(n) \subset \operatorname{Iso} \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

где $\operatorname{Euc}(n)$ — группа всех движений (собственных и несобственных) евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. [С алгебраической точки зрения группа $\operatorname{Euc}(n)$ является *полупрямым произведением* $\operatorname{Trans}(n) \ltimes \mathrm{O}(n)$ группы трансляций $\operatorname{Trans}(n) \approx \approx \mathbb{R}^n$ и группы $\mathrm{O}(n)$. Геометрическим выражением этого обстоятельства является представление любого движения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ формулой $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{A} \in \mathrm{O}(n)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$.]

Группы

$$\operatorname{Euc}(n), \quad \mathrm{O}(n+1), \quad O^{\uparrow}(1,n) \tag{15}$$

(элементы которых мы будем для сокращения речи называть здесь *движениями* соответствующих геометрий) являются группами Ли, состоящими из двух компонент связности. Их компонентами единицы являются соответственно группы

$$\operatorname{Euc}^+(n) = \operatorname{Trans}(n) \ltimes \mathrm{SO}(n), \ \mathrm{SO}(n+1), \ O^{\uparrow}_+(1,n) \tag{16}$$

(группы *собственных движений*). С другой стороны, согласно предложению 3 лекции 19 группы $\operatorname{Iso}\mathcal{M}_K$ также являются группами Ли, причем их размерность не превосходит числа $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Но размерность групп (16) равна этому числу! Поэтому на самом деле

$$\dim \operatorname{Iso} \mathcal{M}_K = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{17}$$

и, значит, — поскольку подгруппа Ли связной группы Ли, размерность которой равна размерности группы, совпадает со всей группой — *компонентой единицы группы* $\operatorname{Iso}\mathcal{M}_K$ *является соответствующая группа* (16).

Это утверждение — и даже его усиление, относящееся ко всей группе $\operatorname{Iso}\mathcal{M}_K$ — можно доказать и по-другому, заменив ссылку на предложение 3 лекции 19 ссылкой на предложение 2 лекции 3, согласно которому каждая изометрия $f\colon \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_K$, будучи аффиннитетом, однозначно определяется своим дифференциалом

$$(df)_{p_0}\colon \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{M}_K \to \mathsf{T}_{q_0}\mathcal{M}_K, \qquad q_0 = f(p_0),$$

в произвольной раз навсегда выбранной точке $p_0 \in \mathcal{M}_K$. С другой стороны, легко видеть, что *для любых двух точек* $p_0, q_0 \in \mathcal{M}_K$ *и любого изометричного отображения*

$$\varphi\colon \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{M}_K \to \mathsf{T}_{q_0}\mathcal{M}_K$$

существует такое движение f_φ *пространства* $\mathcal{M}_K$, *что* $f_\varphi(p_0) = q_0$ *и* $(df_\varphi)_{p_0} = \varphi$.

Задача 3. Докажите это утверждение.

В частности, движение f_φ, построенное по дифференциалу $\varphi = (df)_{p_0}$, будет не чем иным, как изометрией f. Это заново доказывает, что *каждая изометрия является движением.*

Таким образом, мы видим, что все три включения (12), (13) и (14) являются равенствами:

$$\operatorname{Iso}\mathcal{M}_k = \begin{cases} \operatorname{Euc}(n), & \text{если } K = 0,\\ \mathrm{O}(n+1), & \text{если } K > 0,\\ O^{\uparrow}(1,n), & \text{если } K < 0,\end{cases} \tag{18}$$

т. е. *изометрии пространств* $\mathcal{M}_K$ *— это в точности их движения.*

Кроме того, мы видим, что *группа* $\operatorname{Iso}\mathcal{M}_K$ *транзитивно действует на пространстве* $\mathcal{M}_K$.

Неподвижные точки изометрий

Неподвижные точки евклидова движения $\gamma\colon x \to Ax + a$ определяются из уравнения

$$(A - E)x + a = 0,$$

задающего в пространстве $\mathbb{R}^n$ некоторую плоскость. (Ее размерность r может быть любым целым числом от -1 до n;

при $r = -1$ эта плоскость является пустым множеством, при $r = 0$ — точкой, а при $r = 1$ — прямой. Равенство $r = n$ означает, что движение γ тождественно.)

Поскольку движениями сферы $\mathbb{S}^n_R$ являются вращения (вообще говоря, несобственные) объемлющего пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е. элементы группы $O(n+1)$, а движениями пространства Лобачевского $\mathbb{B}^n_R$ — элементы группы Лоренца $O^\uparrow(1,n)$, то этот вывод остается в силе и в неевклидовых пространствах $\mathbb{S}^n_R$ и $\mathbb{B}^n_R$. Для удобства ссылок мы сформулируем этот результат в виде отдельного предложения.

Предложение 3. *В произвольном модельном пространстве $\mathcal{M}_K$ постоянной кривизны неподвижные точки каждого движения $\mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_K$ составляют некоторую плоскость.* $\square$

Теорема Римана Характеристика пространств $\mathcal{M}_K$, как модельных, объясняется следующей теоремой Римана.

Теорема 1. *Каждое пространство $\mathcal{X}$ постоянной кривизны локально изометрично пространству $\mathcal{M}_K$, т. е. любая его точка обладает окрестностью, изометрично отображающейся на окрестность некоторой точки пространства $\mathcal{M}_K$.*

(Так как группа Iso $\mathcal{M}_K$ транзитивно действует на пространстве $\mathcal{M}_K$, то любые две точки этого пространства обладают изометричными окрестностями.)

На координатном языке теорема 1 утверждает, что пространство $\mathcal{X}$ *обладает атласом, в каждой карте которого метрика этого пространства имеет вид* (7).

Доказательство теоремы 1. Из формулы (11) следует, что для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что тензор σg, где g — метрический тензор пространства $\mathcal{X}$, и тензор h с компонентами

$$h_{ij} = -\sigma\sqrt{|K|}g_{ij} \tag{19}$$

удовлетворяют соотношениям Гаусса и Петерсона — Кодацци. (Действительно, тогда согласно теореме 4 лекции 21 некоторая окрестность любой точки пространства $\mathcal{X}$ будет изометрично вкладываться в $\mathbb{R}^{n+1}$ в качестве элементарной гиперповерхности с основными тензорами σg и h. Поэтому в силу утверждеиия об единствеииости этой гиперповерхности она — при соответствующем выборе начальных условий — будет содержаться в гиперповерхиости $\mathcal{M}_K$ в качестве открытого миожества.)

Но тензор кривизны простраиства $\mathcal{X}$ связаи с метрикой g_{ij} формулой (3′) и, зиачит, теизор кривизны для метрики σg_{ij} выражается формулой

$$R_{ij,kl} = \sigma K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

что в силу (19) иемедлеиио дает соотиошеиие Гаусса (формулу (3) лекции 20) для тензоров σg и h. Далее, так как тензор σg ковариантно постоянен, то теизор с компонентами (19) также ковариантио постояиеи, т. е. $(\nabla_k h)_{ij} = 0$ для всех $i, j, k = 1, \ldots, n$. Поэтому соотношеиие Петерсоиа — Кодацци (формула (4) лекции 20) также выполнено. □