ЛЕКЦИЯ 23

Пространственные формы. — Теорема Картана — Киллинга. — (Псевдо)римановы симметрические пространства. — Классификация пространственных форм. — Сферические формы четной размерности. — Ориентируемые пространственные формы. — Комплексно аналитические и конформные факторомногообразия. — Римановы пространства с группой изометрий максимальной размерности. — Их перечисление. — Условие полной подвижности.

Пространственные формы Из пространств $\mathcal{M}_K$ можно получать и другие пространства постоянной кривизны.

Ясно, что если в римановом накрытии $(\widetilde{\mathcal{X}}, \pi, \mathcal{X})$ одно из пространств $\widetilde{\mathcal{X}}$ или $\mathcal{X}$ является римановым пространством постоянной кривизны K, то другое пространство также будет пространством постоянной кривизны K.

В частности, *для любой дискретно действующей группы* Γ *изометрий пространства* $\mathcal{M}_K$ *факторпространство* $\mathcal{M}_K/\Gamma$ *является пространством постоянной кривизны* K.

***Определение* 1**. Факторпространства вида $\mathcal{M}_K/\Gamma$ называются *пространственными формами* (при $K = 0$ — *евклидовыми*, или *параболическими*, при $K > 0$ — *сферическими* или *эллиптическими* и при $K < 0$ — *гиперболическими*).

Группа Γ называется *фундаментальной группой* пространственной формы $\mathcal{M}_K/\Gamma$.

[Легко видеть, что *каждое из пространств* $\mathcal{M}_K$ *односвязно* (при $n \geqslant 2$). Поэтому (см. предложение 3 лекции IV.4) группа Γ является фундаментальной группой пространства $\mathcal{X} = \mathcal{M}_K/\Gamma$ в смысле определения 1 лекции IV.3.]

***Предложение* 1**. *Две пространственные формы* $\mathcal{M}_K/\Gamma$ *и* $\mathcal{M}_K/\Delta$ *тогда и только тогда изометричны, когда группы* Γ *и* Δ *сопряжены в группе* $\operatorname{Iso}\mathcal{M}_K$ *всех изометрий пространства* $\mathcal{M}_K$.

Доказательство. Если $\Delta = f\Gamma f^{-1}$, $f \in \operatorname{Iso}\mathcal{M}_K$, то формула $\overline{f}\colon \Gamma p \mapsto \Delta f(p)$, $p \in \mathcal{M}_K$, корректно определяет отображение $\overline{f}\colon \mathcal{M}_K/\Gamma \to \mathcal{M}_K/\Delta$, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{M}_K \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{M}_K/\Gamma \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathcal{M}_K/\Delta \end{tikzcd} \tag{1}$$

вертикальными стрелками которой являются канонические проекции. Так как f — изометрия, то $\overline{f}$ — также изометрия (и обратно). Таким образом, если группы Γ и Δ сопряжены, то пространственные формы $\mathcal{M}_K/\Gamma$ и $\mathcal{M}_K/\Delta$ изометричны.

Обратно, пусть существует изометрия $\overline{f}\colon \mathcal{M}_K/\Gamma \to \mathcal{M}_K/\Delta$. Так как пространство $\mathcal{M}_K$ односвязно, то отображение

$$\overline{f} \circ \pi\colon \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_K/\Delta$$

поднимаемо (см. следствие теоремы 1 лекции IV.4), т. е. существует отображение $f\colon \mathcal{M}_K \to \mathcal{M}_K$, замыкающее диаграмму (1). Так как $\overline{f}$ — изометрия, то f — также изометрия. Кроме того, для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ и любой точки $p_0 \in \mathcal{M}_K$ имеет место равенство

$$(\pi \circ f)(\gamma p_0) = (\overline{f} \circ \pi)(\gamma p_0) = (\overline{f} \circ \pi)(p_0) = (\pi \circ f)(p_0),$$

означающее, что $f(\gamma p_0) = \delta f(p_0)$ для некоторого $\delta \in \Delta$, т. е. что отображения $\delta^{-1} f \gamma$ и f одинаково действуют на точку p_0. Поскольку отображение $\delta^{-1} f\gamma$ также, очевидно, накрывает отображение $\overline{f} \circ \pi$, отсюда — в силу утверждения единственности из следствия теоремы 1 лекции IV.4 — следует, что $\delta^{-1} f\gamma = f$ всюду, т. е. что $f\gamma f^{-1} = \delta$. Следовательно, $f\Gamma f^{-1} = \Delta$, т. е. группы Γ и Δ сопряжены. □

Теорема Картана — Киллинга Каждое из модельных пространств $\mathcal{M}_K$, являясь замкнутым подпространством полного метрического пространства, полно. (Оно полно также по теореме Хопфа — Ринова; см. теорему 1 лекции 12.) Следовательно (см. задачу 3 лекции 19), каждое пространство $\mathcal{M}_K/\Gamma$ также полно.

Таким образом, *каждая пространственная форма $\mathcal{M}_K/\Gamma$ является полным пространством постоянной кривизны.*

Замечательно, что верно и обратное.

Теорема 1. *Каждое связное полное пространство $\mathcal{X}$ постоянной кривизны K изометрично некоторой пространственной форме $\mathcal{M}_K/\Gamma$.*

Эта теорема называется теоремой Картана—Киллинга. Она еще раз оправдывает представление о пространствах $\mathcal{M}_K$ как модельных пространствах постоянной кривизны.

Отметим следующий частный случай теоремы 1.

Теорема 2. *Каждое связное и односвязное полное пространство постоянной кривизны K изометрично пространству $\mathcal{M}_K$.*

Эта теорема также называется теоремой Картана—Киллинга.

Заметим, что *теорема* 1 *легко следует из теоремы* 2. Действительно, пространство $\widetilde{\mathcal{X}}$, универсально накрывающее пространство $\mathcal{X}$, является — очевидно, полным и односвязным — пространством постоянной кривизны K. Следовательно, согласно теореме 2 оно изометрично пространству $\mathcal{M}_K$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{M}_K$. С другой стороны, согласно следствию 2 теоремы 2 лекции IV.5, если Γ — группа автоморфизмов накрытия $\mathcal{M}_K \to \mathcal{X}$ (состоящая согласно утверждению **А** задачи 5 лекции 19 из изометрий), то факторпространство $\mathcal{M}_K/\Gamma$ гомеоморфно (а в наших условиях и диффеоморфно) многообразию $\mathcal{X}$. Для завершения доказательства остается заметить, что этот диффеоморфизм является, очевидно, изометрией. $\square$

Поэтому нам достаточно доказать лишь теорему 2. Мы сделаем это в более общем контексте симметрических пространств.

(Псевдо)римановы симметрические пространства Пусть $\mathcal{X}$ — (псевдо)риманово пространство, являющееся одновременно симметрическим пространством (в смысле определения 2 лекции 5).

Определение 2. Пространство $\mathcal{X}$ называется *(псевдо)римановым симметрическим пространством*, если все симметрии

$$s_p\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad p \in \mathcal{X},$$

представляют собой изометрии.

Будучи изометриями, симметрии s_p являются по отношению к связности Леви-Чивита ∇ на $\mathcal{X}$ аффинными отображениями. Поэтому (см. замечание 2 лекции 5) относительно связности ∇ пространство $\mathcal{X}$ будет глобально симметрическим пространством, и, значит, — в силу единственности канонической связности — *связность ∇ является канонической связностью на $\mathcal{X}$.*

Задача 1. Докажите, что *если (псевдо)риманово пространство имеет ковариантно постоянный тензор кривизны (является по отношению к связности Леви-Чивита локально симметрическим пространством), то для любой точки $p_0 \in \mathcal{X}$ локальная геодезическая симметрия*

$$\exp_{p_0} A \mapsto \exp_{p_0}(-A), \qquad A \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X},$$

является изометрией. [Указание. Отображение $A \mapsto -A$ пространства $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ на себя изометрично.]

Задача 2. Докажите, что *связное и односвязное (псевдо)риманово пространство тогда и только тогда является (псевдо)римановым симметрическим пространством, когда оно полно и его тензор кривизны ковариантно постоянен.*

В частности, *любое связное и односвязное полное пространство постоянной кривизны является римановым симметрическим пространством.*

Задача 3. Докажите, что *связные и односвязные (псевдо)римановы симметрические пространства одной и той же сигнатуры и кривизны изометричны.* [Указание. В случае, когда пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ из теоремы 2 лекции 5 являются (псевдо)римановыми пространствами одной и той же сигнатуры, за фигурирующий в этой теореме изоморфизм φ может быть принята изометрия.]

Теперь мы можем доказать и теорему 2

Доказательство теоремы 2. Эта теорема непосредственно вытекает из утверждений задач 2 и 3. □

Обратим также внимание на то, что *каждое связное полное (псевдо)риманово локально симметрическое пространство (в частности, любое (псевдо)риманово симметрическое пространство) имеет* *вид $\mathcal{X}/\Gamma$, где $\mathcal{X}$ — односвязное (псевдо)риманово симметрическое пространство, а Γ — дискретно действующая группа его изометрий.*

Ср. предложение 2 лекции 5.

Классификация пространственных форм

Согласно теореме Картана — Киллинга задача перечисления всех пространственных форм сводится к задаче перечисления — с точностью до сопряжения — всех дискретно действующих подгрупп групп (15) лекции 22.

Наиболее простой — и до конца изученный — случай возникает при $K > 0$, т. е. для сферических пространственных форм. Дело здесь в том, что в силу компактности группы $O(n+1)$ любая дискретная группа изометрий сферы необходимо конечна. Вместе с требованием, чтобы ни одно нетождественное преобразование группы не имело неподвижных точек, это позволяет найти все подгруппы Γ группы $O(n+1)$, дискретно действующие на сфере $\mathbb{S}^n_R$, и, тем самым, описать все сферические формы. Ответ, полученный в 1966 г. Винсентом, имеет вид довольно длинного и малообозримого списка. Поэтому мы рассмотрим ниже лишь случай сфер четной размерности, когда ответ неожиданно прост, а также — в следующем Семестре — случай $n = 3$, когда еще сохраняется геометрическая наглядность. (Любопытно, что случай $n \equiv 3 \pmod 4$ является самым сложным; при $n \equiv 1 \pmod 4$ ситуация оказывается существенно более простой.)

Полная классификация гиперболических пространственных форм известна только при $n = 2$ (и то лишь в предположении, что группа Γ имеет конечное число образующих). Эти формы возникают как римановы поверхности аналитических функций, и их теория относится не столько к геометрии, сколько к теории функций (но все же мы их вкратце рассмотрим в следующем Семестре). При $n \geqslant 3$ теория гиперболических форм делает пока лишь первые шаги и весьма далека от какой-либо законченности.

Евклидовы пространственные формы занимают промежуточное положение. Хотя они пока проклассифицированы лишь при $n \leqslant 4$, о них известно довольно много и имеется целый ряд обещающих подходов к их полной классификации. В следующем Семестре мы найдем их все при $n \leqslant 3$ и, кроме того, для любого n найдем все евклидовы формы, фундаментальная группа которых состоит только из параллельных переносов (трансляций).

Сферические формы четной размерности

Простейший пример нетривиальной сферической формы доставляет нам уже знакомое (см. пример 1 лекции 19) эллиптическое пространство

$$\mathbb{R}P^n_R = \mathbb{S}^n_R/\{\mathrm{id}, \sigma\},$$

представляющее собой факторпространство сферы $\mathbb{S}^n_R$ по группе второго порядка $\{\mathrm{id}, \sigma\}$, порожденной антиподальным отображением

$$\sigma\colon \boldsymbol{x} \mapsto -\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^n_R.$$

Предложение 2. *Любая сферическая пространственная форма X четной размерности $n = 2m$ изометрична либо сфере $\mathbb{S}^n_R$, либо проективному пространству $\mathbb{R}P^n_R$.*

Доказательство. Каждое преобразование группы $\mathrm{SO}(2m+1)$ имеет — см. теорему 2 лекции II.23 — собственный вектор, принадлежащий собственному значению 1, и потому, рассматриваемое как преобразование из $\mathrm{Iso}\,\mathbb{S}^{2m}_R$, обладает неподвижной точкой. Поэтому для фундаментальной группы $\Gamma \subset \mathrm{Iso}\,\mathbb{S}^{2m}_R = \mathrm{O}(2m+1)$ должно иметь место равенство $\Gamma \cap \mathrm{SO}(2m+1) = \{\mathrm{id}\}$. Так как квадрат γ^2 любого элемента $\gamma \in \mathrm{O}(n+1)$ принадлежит $\mathrm{SO}(n+1)$, отсюда следует, что $\gamma^2 = \mathrm{id}$, т. е. группа Γ состоит только из инволюций. С другой стороны, так как каждый инволютивный линейный оператор γ диагонализируем (и имеет собственные значения ± 1), то оператор $\gamma \neq \mathrm{id}$ тогда и только тогда не имеет неподвижных точек, когда $\gamma\colon \boldsymbol{x} \mapsto -\boldsymbol{x}$. $\square$

В частности, *сферы $\mathbb{S}^2_R$ и проективные (эллиптические) плоскости $\mathbb{R}P^2_R$ исчерпывают все двумерные сферические формы.* Вместе с тем, скажем, при $n = 3$ имеется — как мы покажем в следующем Семестре, — кроме сфер и проективных пространств, еще шесть серий сферических пространственных форм.

Ориентируемые пространственные формы

Ясно, что каждое модельное пространство $\mathcal{M}_K$ представляет собой ориентируемое (см. определение 1 лекции III.25) гладкое многообразие. Тем не менее существуют и неориентируемые пространственные формы $\mathcal{M}_K/\Gamma$. Как по группе Γ узнать, ориентируемо ли многообразие $\mathcal{M}_K/\Gamma$? Мы разберем этот вопрос в общем контексте произвольного многообразия $\mathcal{X}/\Gamma$, где $\mathcal{X}$ — связное ориентируемое гладкое многообразие и Γ — дискретно действующая на $\mathcal{X}$ группа диффеоморфизмов.

Определение 3. Говорят, что диффеоморфизм $\gamma\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ связного ориентируемого многообразия $\mathcal{X}$ на себя *сохраняет ориентацию*, если в картах любого ориентирующего атласа (см. определение 1 лекции III.25) он задается функциями с положительным якобианом.

Задача 4. Покажите, что *это определение корректно*, т. е. не зависит от выбора ориентирующего атласа.

При $\mathcal{X} = \mathcal{M}_K$ движение $\gamma \in \operatorname{Iso}\mathcal{M}_K$ тогда и только тогда сохраняет ориентацию, когда оно является собственным движением (принадлежит компоненте единицы группы $\operatorname{Iso}\mathcal{M}_K$).

Задача 5. Покажите, что *для любого ориентирующего атласа $\mathcal{A}$ многообразия $\mathcal{X}$ и любого сохраняющего ориентации диффеоморфизма $\gamma\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ каждая карта (U, h) многообразия $\mathcal{X}$, обладающая тем свойством, что карта $(\gamma U, h \circ \gamma^{-1})$ принадлежит атласу $\mathcal{A}$, положительно согласована с картами атласа $\mathcal{A}$.*

Пусть Γ — дискретно действующая группа диффеоморфизмов связного и ориентируемого многообразия $\mathcal{X}$.

Предложение 3. *Фактормногообразие $\mathcal{X}/\Gamma$ многообразия $\mathcal{X}$ по группе Γ тогда и только тогда ориентируемо, когда все элементы группы Γ сохраняют ориентацию.*

Доказательство. Назовем атлас $\{(V, k)\}$ многообразия $\mathcal{X}/\Gamma$ *ровно накрытым*, если носитель V каждой его карты ровно накрыт отображением $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\Gamma$. Ясно, что в этом случае все карты вида $(U, k\circ\pi)$, где U — открытое множество в $\mathcal{X}$, диффеоморфно отображающееся посредством π на носитель V некоторой карты атласа $\{(V, k)\}$, составляют атлас многообразия $\mathcal{X}$. Мы будем говорить, что атлас $\{(U, k \circ \pi)\}$ является *прообразом* ровно накрытого атласа $\{(V, k)\}$. Так как функции перехода атласов $\{(V, k)\}$ и $\{(U, k \circ \pi)\}$ очевидным образом совпадают, то эти атласы одновременно являются или не являются ориентирующими атласами.

С другой стороны, каждый диффеоморфизм $\gamma \in \Gamma$, являясь преобразованием скольжения, переводит каждую карту $(U, k \circ \pi)$ в карту $(\gamma U, k \circ \pi)$ того же вида и, значит, действует в этих картах по равенству координат. Поскольку якобиан тождественного преобразования положителен, этим доказано, что в картах атласа $\{(U, k \circ \pi)\}$ все диффеоморфизмы из Γ задаются функциями с положительным якобианом и, значит, в случае, когда этот атлас ориентирующий, являются диффеоморфизмами, сохраняющими ориеитацию. Этим доказано, что если для $\mathcal{X}/\Gamma$ существует ровно накрытый ориентирующий атлас $\{(V, k)\}$, то группа Γ состоит из диффеоморфизмов, сохраняющих ориентацию.

Поскольку для ориентируемого многообразия $\mathcal{X}/\Gamma$ такого рода атлас очевидным образом существует, мы видим, что в случае, когда многообразие $\mathcal{X}/\Gamma$ ориентируемо, все диффеоморфизмы из группы Γ действительно сохраняют ориентацию. Таким образом, нам остается лишь доказать обратное утверждение.

Задача 6. Докажите, что *для многообразия $\mathcal{X}$ существует такой ориентирующий атлас $\mathcal{A}$, что*

а *носитель каждой карты этого атласа диффеоморфно отображается посредством π на некоторое ровно накрытое множество многообразия $\mathcal{X}/\Gamma$;*

б *каждая карта многообразия $\mathcal{X}$, положительно согласованная с картами атласа $\mathcal{A}$ и обладающая свойством* **а**, *содержится в атласе $\mathcal{A}$ (атлас $\mathcal{A}$ максимален по отношению к свойству* **а**).

Пусть V — такое ровно накрытое множество многообразия $\mathcal{X}/\Gamma$, что в атласе $\mathcal{A}$ существует карта (U_0, h_0), для которой $\pi U_0 = V$. Выбрав такую карту, мы положим

$$k = h_0 \circ (\pi|_{U_0})^{-1}.$$

Тогда пара (V, k) будет картой многообразия $\mathcal{X}/\Gamma$, и все карты такого вида будут составлять ровно накрытый атлас $\{(V, k)\}$ этого многообразия. Рассмотрим прообраз

$\{(U, k \circ \pi)\}$ атласа $\{(V, k)\}$. Для каждой карты $(U, k \circ \pi)$ атласа $\{(U, k \circ \pi)\}$ имеют место равенства

$$U = \gamma U_0, \quad k \circ \pi = h_0 \circ \gamma^{-1},$$

где $\gamma \in \Gamma$, а (U_0, h_0) — выбранная для $V = \pi U_0$ карта атласа $\mathcal{A}$.

Поэтому (см. задачу 5) если γ сохраняет ориентацию, то карта $(U, k\circ\pi)$ положительно согласована с картами атласа $\mathcal{A}$ и, значит, в силу свойства б этого атласа принадлежит атласу $\mathcal{A}$.

Таким образом, если все диффеоморфизмы из группы Γ сохраняют ориентацию, то атлас $\{(U, k \circ \pi)\}$ содержится в ориентирующем атласе $\mathcal{A}$, и потому сам является ориентирующим атласом. В этом случае атлас $\{(V, k)\}$ также будет ориентирующим атласом и, значит многообразие $\mathcal{X}/\Gamma$, обладая ориентирующим атласом, ориентируемо. $\square$

Ср. предложение 3 лекции IV.5.

Следствие 1. *Пространственная форма $\mathcal{M}_K/\Gamma$ тогда и только тогда является ориентируемым многообразием, когда ее фундаментальная группа Γ состоит из собственных движений.* $\square$

Например, *проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ тогда и только тогда ориентируемо, когда его размерность n нечетна* (поскольку только в этом случае антиподальное отображение $x \mapsto -x$ сферы $\mathbb{S}^n$ в себя сохраняет ориентацию). Ср. задачу 1 лекции III.25.

Вообще, имеет место следующее следствие.

Следствие 2. *Каждая нечетномерная сферическая форма $\mathbb{S}^n/\Gamma$, $n = 2m - 1$, является ориентируемым многообразием.*

Доказательство. Согласно теореме 2 лекции II.23 каждое несобственное ортогональное преобразование четномерного пространства $\mathbb{R}^{2m}$ необходимо имеет собственный вектор с собственным значением 1, и потому, рассматриваемое как преобразование сферы $\mathbb{S}^{2m-1}$, обладает неподвижной точкой. Поэтому дискретно действующая группа Γ изометрий сферы $\mathbb{S}^{2m-1}$ является подгруппой группы $SO(2m)$. $\square$

Таким образом, *единственными неориентируемыми сферическими формами являются четномерные эллиптические пространства $\mathbb{R}P_R^{2m}$.*

Комплексно аналитические и конформные фактормногообразия

Аналог предложения 3 имеет место и для комплексно аналитических (см. лекцию III.11) многообразий.

Пусть Γ — дискретно действующая группа диффеоморфизмов связного комплексно аналитического многообразия $\mathcal{X}$.

Задача 7. Докажите, что *фактормногообразие $\mathcal{X}/\Gamma$ многообразия $\mathcal{X}$ по группе Γ тогда и только тогда обладает комплексной структурой, по отношению к которой естественное отображение $\mathcal{X} \to \mathcal{X}/\Gamma$ комплексно аналитично, когда все элементы группы Γ являются комплексно аналитическими диффеоморфизмами.*

Докажите также, что при $n = 2$ аналогичное утверждение имеет место и по отношению к конформным структурам. (См. лекцию 14.)

Римановы пространства с группой изометрий максимальной размерности

В заключение этой лекции мы дадим еще одну характеризацию модельных пространств постоянной кривизны, объясняющую их уникальное положение среди всех так называемых «неевклидовых пространств» (вместе, правда, с эллиптическим пространством $\mathbb{R}P^n_R$).

Напомним, что символом $\operatorname{Iso}\mathcal{X}$ мы обозначаем группу всех изометрий $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ риманова пространства $\mathcal{X}$. Согласно предложению 3 лекции 19 эта группа является группой Ли, размерность $\dim\operatorname{Iso}\mathcal{X}$ которой не превосходит числа $\dfrac{n(n+1)}{2}$, где $n = \dim\mathcal{X}$.

***Предложение* 4**. *Если*

$$\dim\operatorname{Iso}\mathcal{X} = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{2}$$

то $\mathcal{X}$ является пространством постоянной кривизны.

Доказательство. Выбрав точку $p \in \mathcal{X}$, рассмотрим ее стабилизатор $\operatorname{Iso}_p\mathcal{X}$ в группе $\operatorname{Iso}\mathcal{X}$. Для любого элемента $\gamma \in \operatorname{Iso}_p\mathcal{X}$ его дифференциал $(d\gamma)_p$ представляет собой ортогональное отображение евклидова пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ на себя, т. е. является элементом ортогональной группы $\mathrm{O}(n)$. Возникающее отображение

$$\mathrm{Iso}_p\mathcal{X} \to \mathrm{O}(n), \quad \gamma \mapsto (d\gamma)_p, \tag{3}$$

группы Ли $\mathrm{Iso}_p\mathcal{X}$ в группу Ли $\mathrm{O}(n)$, очевидно, представляет собой гомоморфизм.

Задача 8. Докажите, что *индуцированный этим гомоморфизмом гомоморфизм алгебр Ли*

$$\mathfrak{iso}_p\mathcal{X} \to \mathfrak{so}(n) \tag{4}$$

является мономорфизмом. [Указание. Гомоморфизм (4) совпадает с ограничением на $\mathfrak{iso}_p\mathcal{X}$ мономорфизма, сопоставляющего векторному полю X линейный оператор, задаваемый формулой (8) лекции 8.]

Задача 9. Докажите, что *при выполнении равенства* (2) *имеет место равенство*

$$\dim \mathrm{Iso}_p\mathcal{X} = \frac{n(n-1)}{2} \tag{5}$$

и, значит, мономорфизм (4) *является изоморфизмом.*

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ — связные группы Ли одной и той же размерности. Тогда каждый гомоморфизм*

$$\mathcal{G} \to \mathcal{H}, \tag{6}$$

индуцирующий изоморфизм алгебр Ли, является эпиморфизмом.

Доказательство. Гомоморфизм (6), индуцирующий изоморфизм алгебр Ли, этален в единице группы $\mathcal{G}$, т. е. является диффеоморфизмом некоторой окрестности этой единицы на некоторую окрестность U единицы группы $\mathcal{H}$. Следовательно, подгруппа $\varphi\mathcal{G}$ группы $\mathcal{H}$ содержит окрестность U. Но поскольку группа $\mathcal{H}$ связна, она порождается этой окрестностью (см. задачу 12 лекции IV.14). Поэтому $\varphi\mathcal{G} = \mathcal{H}$. $\square$

Замечание 1. Полезно иметь в виду, что *гомоморфизм* (6) *тогда и только тогда индуцирует изоморфизм алгебр Ли, когда его ядро дискретно.*

Из леммы 1 (и утверждения задачи 9) вытекает, в частности, что *образ гомоморфизма* (3) *содержит компоненту единицы* $\mathrm{SO}(n)$ *группы* $\mathrm{O}(n)$.

Поскольку группа $\mathrm{SO}(n)$ транзитивно действует на множестве всех двумерных плоскостей n-мерного евклидова пространства, отсюда следует, что *для любых двух плоскостей* $\pi, \pi' \subset \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ *в группе* $\mathrm{Iso}_p\,\mathcal{X}$ *существует такая изометрия* γ, *что*

$$(d\gamma)_p\pi = \pi'. \tag{7}$$

Поскольку при выполненни равенства (7) секционные кривизны $K_p(\pi)$ н $K_p(\pi')$ по двумерным направлениям π и π', очевидно, совпадают, отсюда непосредственно следует, что риманово пространство $\mathcal{X}$ обладает рассмотренным в начале лекции 22 свойством ★. Поэтому согласно теореме Шура (предложение 2 лекции 22) это пространство при $n \geqslant 3$ является пространством постоянной кривизны.

Задача 10. Докажите последнее утверждение и при $n = 2$. [Указание. Из равенств (2) и (5) следует, что для любого вектора $A \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ существует такое поле Киллинга $X \in \mathfrak{iso}\mathcal{X}$, что $X_p = A$.]

Тем самым предложение 4 полностью доказано. □

Их перечисление

Как мы знаем (см. формулу (17) лекции 22), каждое модельное пространство постоянной кривнзны удовлетворяет условию (2). Однако, этому условию удовлетворяет н еще одно пространство.

Задача 11. Покажите, что *условие* (2) *выполнено и при* $\mathcal{X} = \mathbb{R}P^n_R$.

Таким образом, условие (2) выполнено не только для модельных пространств $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n_R$, $\mathbb{B}^n_R$, но и для эллнптического пространства $\mathbb{R}P^n_R$.

Оказывается, однако, что это исключение единственно.

Теорема 3*. Связное полное риманово пространство* $\mathcal{X}$, *удовлетворяющее условию* (2), *является либо одним из модельных пространств* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n_R$, $\mathbb{B}^n_R$, *либо эллиптическим пространством* $\mathbb{R}P^n_R$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ — модельное пространство, универсально накрывающее пространство $\mathcal{X}$, и пусть $\pi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{X}$ — соответствующая проекция (накрывающее отображение). Так как для каждой точки $p \in \mathcal{M}$ отображение $(d\pi)_p\colon \mathsf{T}_p\mathcal{M} \to \mathsf{T}_{\pi(p)}\mathcal{X}$ является изоморфизмом, то для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ существует единственное векторное поле $Y \in \mathfrak{a}\mathcal{M}$, которое π-связано с полем X (поле Y определяется формулой $Y_p = (d\pi)_p^{-1} X_{\pi(p)}$, $p \in \mathcal{M}$). Ясно, что поле Y тогда и только тогда является полем Киллинга, когда полем Киллинга является поле X. Поэтому соответствие $X \mapsto Y$ представляет собой гомоморфизм алгебр Ли

$$\mathfrak{iso}\,\mathcal{X} \to \mathfrak{iso}\,\mathcal{M}.$$

Этот гомоморфизм является, очевидно, мономорфизмом и, значит, — так как по условию

$$\dim \mathfrak{iso}\mathcal{X} = \frac{n(n+1)}{2} = \dim \mathfrak{iso}\mathcal{M}$$

— изоморфизмом. Поэтому если N — число листов накрытия π: $\mathcal{M} \to \mathcal{X}$ (возможно, бесконечное), то число нулей каждого поля $Y \in \mathfrak{iso}\,\mathcal{M}$ (точек, в которых оно обращается в нуль) делится на N (при $N = \infty$ это число либо равно нулю, либо бесконечно). С другой стороны, легко видеть, что *на пространствах* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbb{B}^n_R$ *существует поле Киллинга, обращающееся в нуль только в одной точке, а на пространстве* $\mathbb{S}^n_R$ *— только в двух диаметрально противоположных точках.*

Задача 12. Докажите последнее утверждение. [Указание. Рассмотрите однопараметрическую подгруппу, состоящую из вращений с центром в данной точке.]

Поэтому при $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n_R$ необходимо $N = 1$ (и, значит, $\mathcal{X} = \mathcal{M}$, т. е. $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n_R$), а при $\mathcal{M} = \mathbb{S}^n_R$ либо $N = 1$ (и тогда $\mathcal{X} = \mathbb{S}^n_R$), либо $N = 2$ (и тогда $\mathcal{X} = \mathbb{R}P^n_R$). $\square$

Задача 13. Докажите, что *в теореме* 3 *условие полноты пространства* $\mathcal{X}$ *излишне.*

Условие полной подвижности *Репером* в римановом пространстве $\mathcal{X}$ называется семейство $(p, A_1, \ldots, A_n)$, состоящее из точки $p \in \mathcal{X}$ и базиса $A_1, \ldots, A_n$ пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$. *Образом* репера $(p, A_1, \ldots, A_n)$ при изометрии γ: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется репер $(\gamma p, (d\gamma)_p A_1, \ldots, (d\gamma)_p A_n)$. Говорят, что связное риманово пространство $\mathcal{X}$ удовлетворяет *условию свободной подвижности*, если для любых двух реперов существует изометрия, переводящая один репер в другой (т. е. если группа $\operatorname{Iso}\mathcal{X}$ транзитивна на реперах).

Задача 14. Докажите, что *связное риманово пространство $\mathcal{X}$ тогда и только тогда удовлетворяет условию свободной подвижности, когда для него имеет место равенство* (2). [Указание. Для такого пространства $\mathcal{X}$ число $\dim \operatorname{Iso} \mathcal{X}$ не меньше, чем $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.]

Поэтому *единственными римановыми пространствами, удовлетворяющими условию свободной подвижности, являются пространства* $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{B}^n$ и $\mathbb{R}P^n$.

Это объясняет, почему кроме гиперболической, сферической и эллиптической геометрии других «хороших» неевклидовых геометрий нет.

Аналогичным образом объясняется особая роль аффинных пространств.

Задача 15. Докажите, что *каждое связное n-мерное пространство аффинной связности $\mathcal{X}$, для которого* $\dim \operatorname{Aff} \mathcal{X} = n + n^2$, *является аффинным пространством A^n.*