ЛЕКЦИЯ 24

Тензоры Бианки при $n = 4$. — Матричное представление тензоров Бианки при $n = 4$. — Явный вид тензоров Бианки при $n = 4$. — Числа Эйлера при $n = 4$. — Теорема Чженя — Милнора. — Секционные кривизны четырехмерных пространств Эйнштейна. — Теорема Берже. — Число Понтрягина четырехмерного риманова пространства. — Теорема Торпа. — Теорема Сентенак.

Тензоры Бианки при $n=4$

В этой лекции мы изучим четырехмерные римановы пространства (случай $n = 4$) и, в частности, полностью опишем их тензоры кривизны (для $n = 2$ это было сделано в лекции 16, а для $n = 3$ — в лекции 17; см. формулу (10) лекции 16 и формулу (25) лекции 17). Особое внимание, которое мы уделяем этому случаю, объясняется не только тем, что для него имеют место элегантные теоремы, справедливые только при $n = 4$, но также и тем, что согласно общей теории относительности Эйнштейна физическое пространство-время является псевдоримановым пространством сигнатуры $(1,3)$, метрика которого задается распределением тяготеющих масс. (Впрочем, мы сосредоточим наше внимание лишь на случае римановых пространств.)

Основным нашим орудием в исследовании геометрии четырехмерного риманова пространства $\mathcal{X}$ будет оператор Ходжа

$$*\colon \Lambda^2\mathcal{X} \to \Lambda^2\mathcal{X}$$

(см. формулу (7) лекции 17).

Как мы знаем (см. утверждение задачи 3 лекции 17), для любого ортонормированного базиса X_1, X_2, X_3, X_4 модуля $a\mathcal{X}$ над координатной окрестностью U бивекторы $X_{ij} = X_i \wedge X_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, составляют ортонормированный базис модуля $\Lambda^2\mathcal{X}$ над U.

Впрочем, нам будет более удобен базис

$$X_{12},\ X_{31} = -X_{13},\ X_{14},\ X_{23},\ X_{24},\ X_{34}, \tag{1}$$

получающийся заменой X_{13} на X_{31}.

Задача 1. Покажите, что в базисе (1) оператор $*$

имеет матрицу

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Пусть R — произвольный тензор Бианки на многообразии $\mathcal{X}$, и пусть $\|R^{ij}_{kl}\|$ — его матрица как оператора $\Lambda^2\mathcal{X} \to \to \Lambda^2\mathcal{X}$ (см. лекцию 16) в базисе (1). Поскольку оператор R самосопряжен, а базис (1) ортонормирован, матрица $\|R^{ij}_{kl}\|$ симметрична ($R^{ij}_{kl} = R^{kl}_{ij}$) и, кроме того, спуск индексов не меняет числового значения компонент:

$$R^{ij}_{kl} = R_{ij,kl}.$$

Поэтому при $(i, j, k, l) = (1, 2, 3, 4)$ тождество Бианки для тензора R имеет вид

$$R^{12}_{34} + R^{23}_{14} + R^{31}_{24} = 0. \tag{3}$$

Умножив это тождество на 2 и воспользовавшись симметричностью матрицы $\|R^{ij}_{kl}\|$, мы получим тождество

$$R^{12}_{34} + R^{31}_{24} + R^{14}_{23} + R^{23}_{14} + R^{24}_{31} + R^{34}_{12} = 0, \tag{4}$$

означающее, что в матрице $\|R^{ij}_{kl}\|$ равна нулю сумма всех элементов побочной диагонали (состоящей в матрице (2) из единиц).

С другой стороны, умножив матрицу (2) на матрицу $\|R^{ij}_{kl}\|$, мы, как легко видеть, получим матрицу, главная диагональ которой будет побочной диагональю матрицы $\|R^{ij}_{kl}\|$ и, значит, след которой будет равен сумме (4).

Это доказывает, что *тождество Бианки* (3) *равносильно соотношению*

$$\operatorname{Tr}(*R) = 0. \tag{5}$$

Так как $\dim \Lambda^2\mathcal{X} = 6$, то размерность модуля всех самосопряженных операторов $\Lambda^2\mathcal{X} \to \Lambda^2\mathcal{X}$ равна

$$\frac{6(6+1)}{2} = 21$$

и, значит, размерность его подмодуля, состоящего из операторов, удовлетворяющих соотношению (5), равна $21 - 1 = 20$, т. е. (см. задачу 4 лекции 15) равна размерности модуля $B\mathcal{X}$. Это доказывает, что *при $n = 4$ условие* (5) *характеризует тензоры Бианки* (каждое тождество Бианки является следствием тождества (5)).

Матричное представление тензоров Бианки при $n = 4$

Чтобы не писать матриц шестого порядка, удобно ввести в рассмотрение собственные подпространства

$$\begin{aligned} \Lambda^2_+\mathcal{X} &= \{X \in \Lambda^2\mathcal{X}; *X = X\}, \\ \Lambda^2_-\mathcal{X} &= \{X \in \Lambda^2\mathcal{X}; *X = -X\} \end{aligned} \tag{6}$$

оператора $*$, принадлежащие собственным значениям $+1$ и -1. Эти подпространства являются, очевидно, подмодулями $\mathsf{F}\mathcal{X}$-модуля $\Lambda^2\mathcal{X}$. При этом, так как оператор $*$ инволютивен (см. формулу (9) лекции 17), то модуль $\Lambda^2\mathcal{X}$ разлагается в прямую сумму

$$\Lambda^2\mathcal{X} = \Lambda^2_+\mathcal{X} + \Lambda^2_-\mathcal{X} \tag{7}$$

подмодулей (6).

Задача 2. Покажите, что *подмодули* (6) *ортогональны*, т. е. что $\langle X, Y\rangle = 0$ для любых тензоров $X \in \Lambda^2_+\mathcal{X}$, $Y \in \Lambda^2_-\mathcal{X}$. [Указание. Оператор $*$ самосопряжен.]

Задача 3. Покажите, что

$$\dim \Lambda^2_+\mathcal{X} = 3, \quad \dim \Lambda^2_-\mathcal{X} = 3.$$

[Указание. Над каждой координатной окрестностью U тензоры

$$\frac{X_{12} + X_{34}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{X_{31} + X_{24}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{X_{14} + X_{23}}{\sqrt{2}} \tag{8}$$

образуют ортонормированный базис модуля $\Lambda^2_+\mathcal{X}$, а тензоры

$$\frac{X_{12} - X_{34}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{X_{31} - X_{24}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{X_{14} - X_{23}}{\sqrt{2}} \tag{9}$$

— ортонормированный базис модуля $\Lambda^2_-\mathcal{X}$.]

В соответствии с разложением (7) каждый самосопряженный оператор R: $\Lambda^2\mathcal{X} \to \Lambda^2\mathcal{X}$ может быть записан

в виде матрицы
$$\begin{Vmatrix} A & B \\ B' & C \end{Vmatrix}, \tag{10}$$
где операторы
$$A\colon \Lambda^2_+\mathcal{X} \to \Lambda^2_+\mathcal{X}, \qquad C\colon \Lambda^2_-\mathcal{X} \to \Lambda^2_-\mathcal{X}$$
самосопряжены, оператор
$$B\colon \Lambda^2_-\mathcal{X} \to \Lambda^2_+\mathcal{X}$$
произволен, а оператор $B'\colon \Lambda^2_+\mathcal{X} \to \Lambda^2_-\mathcal{X}$ сопряжен с оператором B (т. е. для любых тензоров $\boldsymbol{X} \in \Lambda^2_+\mathcal{X}$, $\boldsymbol{Y} \in \Lambda^2_-\mathcal{X}$ удовлетворяет соотношению $\langle B'\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\rangle = \langle \boldsymbol{X}, B\boldsymbol{Y}\rangle$).

Для тензора Бианки E матрица (10) имеет вид
$$\begin{Vmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{Vmatrix},$$
а для оператора Ходжа $*$ — вид
$$\begin{Vmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & -\mathrm{id} \end{Vmatrix}.$$
Поэтому для любого оператора R оператор $*R$ имеет матрицу
$$\begin{Vmatrix} A & B \\ -B' & -C \end{Vmatrix},$$
откуда следует, что условие (5) равносильно равенству
$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} C. \tag{11}$$

Таким образом, *оператор* (10) *тогда и только тогда является тензором Бианки, когда он удовлетворяет условию* (11).

При этом для его инварианта K (гауссовой кривизны) будет иметь место равенство
$$K = \frac{1}{3}\operatorname{Tr} A;$$
см. формулу (7) лекции 16.

Явный вид тензоров Бианки при $n = 4$

Чтобы найти явный вид тензоров Бианки (и, значит, в частности, риманова тензора кривизны пространства $\mathcal{X}$), мы опишем сначала все тензоры Эйнштейна $Q(S)$ (см. лекцию 17).

Пусть S — произвольный функционал из $S^2\mathcal{X}$ (см. лекцию 17). Поскольку рассматриваемый как оператор $a\mathcal{X} \to a\mathcal{X}$ этот функционал самосопряжен, модуль $a\mathcal{X}$ обладает над произвольной координатной окрестностью U ортонормированным базисом X_1, X_2, X_3, X_4, состоящим из собственных векторов оператора S, т. е. таким, что S имеет в этом базисе диагональную матрицу вида

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{matrix} \right\|. \tag{12}$$

Отвечающий функционалу S тензор Бианки P (определенный формулой (21) лекции 17) будет иметь в соответствующем базисе (1) компоненты

$$\begin{aligned} P_{ij,kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}\lambda_j - \delta_{il}\delta_{jk}\lambda_j + \delta_{jl}\delta_{ik}\lambda_i - \delta_{jk}\delta_{il}\lambda_i = \\ = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})(\lambda_i + \lambda_j). \end{aligned}$$

При $i < j$ и $k < l$ это означает, что

$$P_{ij,kl} = \begin{cases} \lambda_{ij}, & \text{если } (i,j) = (k,l), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где для сокращения формул положено $\lambda_{ij} = \lambda_i + \lambda_j$.

Операторы A и C, отвечающие этому тензору, имеют, следовательно, в базисах (8) и (9) одну и ту же матрицу

$$\frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix} \right\| = \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{id},$$

где $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \operatorname{Tr} S$, а оператор B — матрицу

$$\frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \lambda_{12} - \lambda_{34} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{13} - \lambda_{24} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{14} - \lambda_{23} \end{matrix} \right\|. \tag{13}$$

Следовательно, оператор

$$Q(S) = \frac{P}{2} - \frac{\operatorname{Tr} S}{6} E$$

(см. формулу (24) лекции 17) будет иметь матрицу

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\lambda}{12}\,\mathrm{id} & \dfrac{1}{2}B \\ \dfrac{1}{2}B' & \dfrac{\lambda}{12}\,\mathrm{id} \end{Vmatrix}.$$

Этим доказано, что *при $n = 4$ любой тензор Эйнштейна имеет вид*

$$\begin{Vmatrix} K & B \\ B' & K \end{Vmatrix}, \tag{14}$$

где K — оператор $K\,\mathrm{id}$ умножения на K, а B — некоторый оператор $\Lambda^2_-\mathcal{X} \to \Lambda^2_+\mathcal{X}$.

При этом так как размерность модуля всех операторов B равна $9 = 3 \times 3$, а размерность модуля тензоров Эйнштейна равна 10, то *оператор* (14) *является тензором Эйнштейна для любого оператора B и любой функции K.*

Задача 4. Докажите, что *тензор Бианки R тогда и только тогда является:*

а *бесследным тензором Эйнштейна, когда*

$$*R = -R*;$$

б *тензором Вейля, когда его след равен нулю и*

$$*R = R*.$$

Поэтому *тензоры Вейля при $n = 4$ — это в точности операторы вида*

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{Vmatrix}, \qquad \text{где } \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} C = 0.$$

Резюмируя, мы видим, что *разложение матрицы* (10) *в сумму матриц*

$$K\begin{Vmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & B \\ B' & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{Vmatrix}, \qquad \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} C = 0,$$

в точности отражает разложение произвольного тензора Бианки в сумму тензора, кратного тензору E, бесследного тензора Эйнштейна и тензора Вейля.

В частности, это дает общий вид риманова тензора кривизны произвольного четырехмерного риманова пространства $\mathcal{X}$.

При этом *тензор Риччи* $\operatorname{Ric} R$ *тензора Бианки* R *с матрицей* (10) *выражается через оператор* B *и след* $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} C$ *операторов* A *и* C. Именно, если X_1, X_2, X_3, X_4 — такой ортонормированный базис модуля $a\mathcal{X}$ над координатной окрестностью U, что в соответствующих базисах (8) и (9) модулей $\Lambda^2_+\mathcal{X}$ и $\Lambda^2_-\mathcal{X}$ матрица оператора B диагональна (такой базис непременно существует), то тензор Риччи $\operatorname{Ric} R$ является не чем иным, как оператором $a\mathcal{X} \to a\mathcal{X}$, имеющим в базисе X_1, X_2, X_3, X_4 матрицу (12) с диагональными элементами

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= b_1 + b_2 + b_3 + \operatorname{Tr} A,\\
\lambda_2 &= b_1 - b_2 - b_3 + \operatorname{Tr} A,\\
\lambda_3 &= -b_1 + b_2 - b_3 + \operatorname{Tr} A,\\
\lambda_4 &= -b_1 - b_2 + b_3 + \operatorname{Tr} A,
\end{aligned} \tag{15}$$

где b_1, b_2, b_3 — диагональные элементы матрицы оператора B в базисах (8) и (9). [Для доказательства достаточно приравнять удвоенную матрицу $\operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3)$ матрице (13) и учесть, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \operatorname{Tr} \operatorname{Ric} R = 2 \operatorname{Tr} R = 4 \operatorname{Tr} A$ (см. формулу (5) лекции 16).] $\square$

Числа Эйлера при $n = 4$

Как следует из теоремы Гаусса — Бонне, топология многообразия $\mathcal{X}$ накладывает определенные — подчас довольно сильные — ограничения, которым должны удовлетворять возможные на $\mathcal{X}$ дифференциально-геометрические структуры. Мы проиллюстрируем сейчас этот общий принцип на примере связных, компактных и ориентируемых четырехмерных многообразий.

Согласно формуле (15) лекции 17 (при $n = 4$)

$$e[\mathcal{X}] = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{\mathcal{X}} \operatorname{Tr}(*R * R)\, dV, \tag{16}$$

где R — риманов тензор кривизны многообразия $\mathcal{X}$.

С другой стороны, если R имеет вид (10), то

$$*R * R = \begin{Vmatrix} A^2 - BB' & AB - BC \\ CB' - B'A & C^2 - B'B \end{Vmatrix}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Tr}(*R * R) = \operatorname{Tr}(A^2 + C^2 - 2BB').$$

Таким образом, *характеристическое число Эйлера связного четырехмерного компактного ориентируемого риманова многообразия $\mathcal{X}$ с тензором кривизны* (10) *выражается формулой*

$$e[\mathcal{X}] = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\mathcal{X}} \operatorname{Tr}(A^2 + C^2 - 2BB')\,dV. \tag{17}$$

[Эту формулу можно, конечно, доказать прямым вычислением, не ссылаясь на общую формулу (15) лекции 17, подобно тому как в лекции 17 была доказана формула (5). Однако, это вычисление хотя и вполне автоматично, но довольно громоздко.]

Задача 5. Докажите следующую формулу д'Аве:

$$e[\mathcal{X}] = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\mathcal{X}} [\operatorname{Tr} R^2 - \operatorname{Tr}(\operatorname{Ric} R)^2 + (\operatorname{Tr} R)^2]dV.$$

[Указание. $\operatorname{Tr} R^2 = \operatorname{Tr}(A^2 + C^2 + 2BB')$, и в обозначениях из формулы (15)

$\operatorname{Tr}(\operatorname{Ric} R)^2 = \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2 = 4(b_1^2+b_2^2+b_3^2)+4(\operatorname{Tr} A)^2 = 4\operatorname{Tr} BB'+(\operatorname{Tr} R)^2$.]

Теорема Чженя — Милнора Если разложить тензор кривизны R пространства $\mathcal{X}$ в сумму

$$R = W + Z \tag{18}$$

тензора W с матрицей $\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{Vmatrix}$ и бесследного тензора Эйнштейна Z с матрицей $\begin{Vmatrix} 0 & B \\ B' & 0 \end{Vmatrix}$, то для следа $\operatorname{Tr}(A^2 + C^2 - 2BB')$ будет иметь место формула

$$\operatorname{Tr}(A^2 + C^2 - 2BB') = \operatorname{Tr}(W^2 - Z^2).$$

Поэтому формулу (17) можно записать в виде

$$e[\mathcal{X}] = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\mathcal{X}} \operatorname{Tr}(W^2 - Z^2)\,dV. \tag{17'}$$

Так как

$$*R* = W - Z$$

(см. задачу 4), то для любого бивектора P (в произвольной точке $p \in \mathcal{X}$) имеет место формула

$$\begin{aligned}\langle R(*P), *P\rangle = \langle(*R*)(P), P\rangle = \\ = \langle(W - Z)(P), P\rangle = \langle W(P), P\rangle - \langle Z(P), P\rangle,\end{aligned}$$

тогда как

$$\langle R(P), P\rangle = \langle W(P), P\rangle + \langle Z(P), P\rangle.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\langle R(P), P\rangle + \langle R(*P), *P\rangle = 2\langle W(P), P\rangle, \\ \langle R(P), P\rangle - \langle R(*P), *P\rangle = 2\langle Z(P), P\rangle.\end{aligned} \tag{19}$$

По определению если площадь $|P| = \sqrt{\langle P, P\rangle}$ бивектора P равна единице, то число $\langle R(P), P\rangle$ является не чем иным, как секционной кривизной $K_p(\pi)$ риманова пространства $\mathcal{X}$, где π — двумерное направление в точке p, задаваемое бивектором P (плоскость пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{X}$ с направляющим бивектором P), а чнсло $\langle R(*P), *P\rangle$ — секционной кривизной $K_p(\pi^\perp)$ по ортогональному направлению $\pi^\perp$ (так как $n = 4$, то $\dim \pi^\perp = \dim \pi = 2$). Поэтому формулу (19) мы можем переписать в следующем виде

$$\begin{aligned}K_p(\pi) + K_p(\pi^\perp) = 2\langle W(P), P\rangle, \\ K_p(\pi) - K_p(\pi^\perp) = 2\langle Z(P), P\rangle.\end{aligned} \tag{19'}$$

Будучи тензором Эйнштейна, тензор Z имеет вид $Q(S)$, где S — самосопряженный оператор $\mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}$ со следом, равным нулю. Пусть, как и выше, X_1, X_2, X_3, X_4 — ортоиормированиый базис модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ над координатиой окрестностью U, в котором оператор S имеет диагональную матрицу (12).

З а д а ч а 6. Покажите, что *в ортонормированном базисе* (1) *линеала* $\Lambda^2\mathcal{X}$, *отвечающем базису* X_1, X_2, X_3, X_4, *матрица оператора* $Z = Q(S)$ *также диагональна.* [У к а з а н и е. Оператор Z имеет вид (14), где $K = 0$, а оператор B представляется в базисах (8) и (9) диагональной матрицей.]

Диагональными элементами матрицы оператора Z являются числа $\langle Z(\boldsymbol{X}_{ij}),\boldsymbol{X}_{ij}\rangle$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, а матрицы оператора Z^2 — их квадраты $\langle Z(\boldsymbol{X}_{ij}),\boldsymbol{X}_{ij}\rangle^2$. Поэтому согласно второй из формул (19′)

$$\operatorname{Tr} Z^2 = \sum_{i<j} \langle Z(\boldsymbol{X}_{ij}),\boldsymbol{X}_{ij}\rangle^2 = \frac{1}{4}\sum_{i<j}(K_p(\pi_{ij}^{\perp}) - K_p(\pi_{ij}))^2,$$

где π_{ij} — плоскость бивектора $\boldsymbol{X}_{ij} = X_i \wedge X_j$ (в данной точке $p \in U$). (Заметим, что $|\boldsymbol{X}_{ij}| = 1$.)

С другой стороны, если все кривизны $K_p(\pi)$ имеют один и тот же знак, то

$$(K_p(\pi^{\perp}) - K_p(\pi))^2 \leqslant (K_p(\pi^{\perp}) + K_p(\pi))^2$$

для произвольной плоскости $\pi \subset \mathsf{T}_p\mathcal{X}$. Поэтому в данном случае

$$\operatorname{Tr} Z^2 \leqslant \frac{1}{4}\sum_{i<j}(K_p(\pi_{ij}^{\perp}) + K_p(\pi_{ij}))^2 = \\ = \sum_{i<j}\langle W(\boldsymbol{X}_{ij}),\boldsymbol{X}_{ij}\rangle^2 \leqslant \operatorname{Tr} W^2.$$

[Для любой симметрической матрицы $A = \|a_{ij}\|$ след $\operatorname{Tr} A^2$ ее квадрата равен сумме квадратов ее элементов

$$\operatorname{Tr} A^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2,$$

и потому оценивается снизу суммой квадратов ее диагональных элементов: $\operatorname{Tr} A^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2$.]

В силу формулы (17′) этим доказано следующее предложение.

Предложение 1. (Теорема Чженя — Милнора). *Если в связном компактном и ориентируемом четырехмерном римановом пространстве $\mathcal{X}$ секционная кривизна имеет во всех точках и по всем двумерным направлениям один и тот же знак, то число Эйлера этого пространства неотрицательно:*

$$e[\mathcal{X}] \geqslant 0. \qquad \square$$

Замечание 1. Интересно, что *неравенство* $e[\mathcal{X}] < 0$ *(и даже неравенство* $e[\mathcal{X}] < 2$) *возможно (при* $n = 4$) *только для неодносвязных (компактных и ориентируемых) многообразий* $\mathcal{X}$. [Если многообразие $\mathcal{X}$ односвязно, то, как можно довольно легко понять, его первое число Бетти h^1 равно нулю. Поэтому в силу теоремы двойственности Пуанкаре — см. лекцию 17, с. 297 — равно нулю и число h^3, и, значит, эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{X})$ равна $h^0 + h^2 + h^4 = 2 + h^2 \geqslant 2$ (напомним, что для компактного связного и ориентируемого многообразия $h^0 = h^n = 1$).]

Секционные кривизны четырехмерных пространств Эйнштейна

Особый интерес представляют, конечно, четырехмерные пространства Эйнштейна. Приведенное выше вычисление показывает, что *четырехмерное риманово пространство тогда и только тогда является пространством Эйнштейна, когда его тензор кривизны имеет вид*

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{Vmatrix}, \qquad \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} C, \tag{20}$$

т. е. является тензором Вейля (в разложении (18) *равна нулю его эйнштейнова компонента* Z).

С другой стороны, из второй формулы (19′) непосредственно следует, что в пространстве $\mathcal{X}$ во всех точках $p \in \mathcal{X}$ для всех двумерных направлений $\pi \subset \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ тогда и только тогда имеет место равенство $K_p(\pi^\perp) = K_p(\pi)$, когда $\langle Z(\boldsymbol{P}), \boldsymbol{P}\rangle = 0$ для всех бивекторов $\boldsymbol{P}$, т. е. — см. предложение 3 лекции 15 — когда $Z = 0$. Следовательно, *четырехмерное риманово пространство* $\mathcal{X}$ *тогда и только тогда является пространством Эйнштейна, когда в каждой точке* $p \in \mathcal{X}$ *для любого двумерного направления* $\pi \subset \mathsf{T}_p\mathcal{X}$ *имеет место равенство*

$$K_p(\pi^\perp) = K_p(\pi), \tag{21}$$

где $\pi^\perp$ *— ортогональное направление.*

Теорема Берже

Для пространства Эйнштейна $\mathcal{X}$ формула (17) принимает вид

$$e[\mathcal{X}] = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathcal{X}} \operatorname{Tr}(A^2 + C^2)\, dV. \tag{22}$$

Предложение 2. (Теорема Берже). *Число Эйлера (эйлерова характеристика) связного четырехмерного компактного и ориентируемого пространства Эйнштейна $\mathcal{X}$ неотрицательно:*

$$e[\mathcal{X}] \geqslant 0.$$

При этом если $e[\mathcal{X}] = 0$, то пространство $\mathcal{X}$ плоско (его тензор кривизны тождественно равен нулю).

Доказательство. Для самосопряженных операторов A и C след $\operatorname{Tr}(A^2 + C^2)$ неотрицателен и равен нулю только при $A = C = 0$. □

Удивительно, как два совершенно различных дифференциально-геометрических свойства приводят к одному и тому же топологическому условию.

Теорему Берже можно усилить.

Число Понтрягина четырехмерного риманова пространства

Для этого нам понадобится, ориентировав многообразие $\mathcal{X}$, рассмотреть его число Понтрягина $p_1[\mathcal{X}]$ (равное — см. задачу 10 лекции 17 — утроенной сигнатуре $3\operatorname{sign}\mathcal{X}$ многообразия $\mathcal{X}$).

Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 — положительно ориентированный ортонормированный базис модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ над координатной окрестностью U, и пусть, как всегда, $X_{ij} = X_i \wedge X_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$.

Прежде всего мы заметим, что по определению внешнего умножения (см. формулу (14) лекции II.9б) для любой дифференциальной формы Ω степени 2 имеет место равенство

$$(\Omega \wedge \Omega)(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{i_1 < i_2} (-1)^w \Omega(X_{i_1}, X_{i_2}) \Omega(X_{j_1}, X_{j_2}),$$

где $j_1 < j_2$ — такие индексы, что последовательность (i_1, i_2, j_1, j_2) является перестановкой последовательности $(1, 2, 3, 4)$, а w — число инверсий в этой перестановке.

Сравнив это равенство с определением оператора Ходжа (формула (16) лекции II.9б) и учтя, что

$$\Omega(X, Y) = \Omega(X \wedge Y),$$

мы немедленно получим, что

$$(\Omega \wedge \Omega)(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{i_1 < i_2} \Omega(\boldsymbol{X}_{i_1 i_2})\Omega(*\boldsymbol{X}_{i_1 i_2}).$$

С другой стороны, так как для любой кососимметрической матрицы $A = \|a^i_j\|$ число

$$\sigma_2(A) = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a^i_i & a^i_j \\ a^j_i & a^j_j \end{vmatrix}$$

равно

$$\sum_{i<j} \begin{vmatrix} 0 & a^i_j \\ -a^i_j & 0 \end{vmatrix} = \sum_{i<j} (a^i_j)^2,$$

то класс Понтрягина $p_1 = p_1(\tau_{\mathcal{X}})$ многообразия $\mathcal{X}$ задается (см. определение 2 лекции IV.23) дифференциальной формой, имеющей на U вид

$$\frac{1}{4\pi^2} \sum_{i<j} \Omega^i_j \wedge \Omega^i_j,$$

где Ω^i_j — форма кривизны многообразия $\mathcal{X}$ на U.

Поэтому значение $p_1[\mathfrak{e}]$ этой формы на элементе объема $\mathfrak{e} = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4$ выражается формулой

$$p_1[\mathfrak{e}] = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i<j} \sum_{i_1 < i_2} \Omega^i_j(\boldsymbol{X}_{i_1 i_2})\Omega^i_j(*\boldsymbol{X}_{i_1 i_2}).$$

При этом так как базис X_1, X_2, X_3, X_4 ортонормирован и, следовательно,

$$\Omega^i_j(X_{i_1}, X_{i_2}) = R(X_i, X_j, X_{i_1}, X_{i_2}),$$

то

$$\Omega^i_j(\boldsymbol{X}_{i_1 i_2}) = R(\boldsymbol{X}_{ij}, \boldsymbol{X}_{i_1 i_2}) = \langle R(\boldsymbol{X}_{ij}), \boldsymbol{X}_{i_1 i_2} \rangle.$$

Аналогично,

$$\Omega^i_j(*\boldsymbol{X}_{i_1 i_2}) = \langle R(\boldsymbol{X}_{ij}), *\boldsymbol{X}_{i_1 i_2} \rangle.$$

Кроме того, так как числа $\langle R(\boldsymbol{X}_{ij}), \boldsymbol{X}_{i_1 i_2} \rangle$, $i < j$, $i_1 < i_2$, являются не чем иным, как элеменами матрицы оператора кривизны R в (ортонормированном!) базисе $\{X_{ij}, i<j\}$, то

$$\sum_{i_1<i_2} \Omega_j^i(X_{i_1 i_2})\Omega_j^i(*X_{i_1 i_2}) = \sum_{i_1<i_2} \langle R(X_{ij}), X_{i_1 i_2}\rangle \times$$
$$\times \langle *R(X_{ij}), X_{i_1 i_2}\rangle = \langle (R*R)(X_{ij}), X_{ij}\rangle$$

и

$$\sum_{i<j}\sum_{i_1<i_2} \Omega_j^i(X_{i_1 i_2})\Omega_j^i(*X_{i_1 i_2}) =$$
$$= \sum_{i<j}\langle (R*R)(X_{ij}), X_{ij}\rangle = \mathrm{Tr}(R*R).$$

Следовательно,

$$p_1[\mathfrak{e}] = \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{Tr}(R*R),$$

и, значит, класс когомологий p_1 задается формой

$$\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{Tr}(R*R)dV$$

(на U, а потому и на всем $\mathcal{X}$).

Этим доказано, что *число Понтрягина* $p_1[\mathcal{X}]$ *связного четырехмерного компактного и ориентированного риманова пространства* $\mathcal{X}$ *выражается формулой*

$$p_1[\mathcal{X}] = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathcal{X}} \mathrm{Tr}(R*R)\,dV, \tag{23}$$

где R *— риманов тензор кривизны многообразия* $\mathcal{X}$.

Задача 7. Аналогичным вычислением покажите, что *при* $n = 4k$ *имеет место формула*

$$p_k[\mathcal{X}] = \left(\frac{(2k)!}{(4\pi)^k k!}\right)^2 \int_{\mathcal{X}} \mathrm{Tr}(R_k * R_k)\,dV,$$

где R_k задается формулой (12) лекции 17.

Теорема Торпа Если

$$R = \begin{Vmatrix} A & B \\ B' & C \end{Vmatrix},$$

то

$$R*R = \begin{Vmatrix} A^2 - BB' & AB - BC \\ B'A - CB' & B'B - C^2 \end{Vmatrix},$$

и потому $\mathrm{Tr}(R*R) = \mathrm{Tr}(A^2 - C^2)$.

Это показывает, что формулу (23) мы можем переписать в следующем виде:

$$p_1[\mathcal{X}] = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathcal{X}} (\operatorname{Tr} A^2 - \operatorname{Tr} C^2)\, dV. \tag{23$'$}$$

Сравнив формулы (22) и (23′), мы немедленно получим, что в случае, когда $\mathcal{X}$ является пространством Эйнштейна,

$$2e[\mathcal{X}] - p_1[\mathcal{X}] = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{\mathcal{X}} \operatorname{Tr} C^2\, dV \geqslant 0 \tag{24}$$

и, значит,

$$e[\mathcal{X}] \geqslant \frac{p_1[\mathcal{X}]}{2}.$$

При смене ориентации многообразия $\mathcal{X}$ число $e[\mathcal{X}]$ остается прежним, а число $p_1[\mathcal{X}]$ меняет знак. Поэтому полученное неравенство на самом деле имеет вид

$$e[\mathcal{X}] \geqslant \left| \frac{p_1[\mathcal{X}]}{2} \right|. \tag{25}$$

Этим доказано следующее предложение, уточняющее теорему Берже.

***Предложение* 3.** (Теорема Торпа). *Для любого связного четырехмерного компактного и ориентированного пространства Эйнштейна имеет место неравенство* (25).

В силу равенств $e[\mathcal{X}] = \chi(\mathcal{X})$ и $p_1[\mathcal{X}] = 3 \operatorname{sign} \mathcal{X}$ неравенство (25) может быть переписано также в следующем виде

$$\frac{3}{2} |\operatorname{sign} \mathcal{X}| \leqslant \chi(\mathcal{X}). \tag{25$'$}$$

Равенство здесь может иметь место и для неплоских метрик, но в этом случае, как показал Хитчин, многообразие $\mathcal{X}$ обязано быть одним из трех совершенно конкретных комплексных алгебраических многообразий (имеющих над полем $\mathbb{C}$ размериость 2 и называемых *поверхностями Энриквеса* и *поверхностью* $K3$).

Задача 8. Покажите, что *если в* (25) *имеет место знак равенства, то тензор Риччи многообразия $\mathcal{X}$ равен нулю.*

Существуют односвязные четырехмерные многообразия, не удовлетворяющие условию (25), на которых, следовательно, не может быть метрики Эйнштейна.

Теорема Сентенак Аналогичное уточнение — для пространств Эйнштейна! — допускает и теорема Чженя — Милнора.

Предложение 4. *Если в связном четырехмерном компактном ориентируемом пространстве Эйнштейна $\mathcal{X}$ секционные кривизны во всех точках и по всем направлениям имеют один и тот же знак, то*

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} |\operatorname{sign} \mathcal{X}| \leqslant \chi(\mathcal{X}). \tag{26}$$

Так как число $\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}$ иррационально, то равенство здесь возможно только при $\operatorname{sign} \mathcal{X} = 0$ и $\chi(\mathcal{X}) = 0$. Но если $\chi(\mathcal{X}) = e[\mathcal{X}] = 0$, то (см. формулу (22)) $R = 0$, т. е. метрика на $\mathcal{X}$ плоская. Следовательно, *равенство в* (26) *имеет место только для плоских метрик Эйнштейна.*

Предложение 4 было впервые доказано Сентенак. Ее доказательство основывается на следующей лемме.

Лемма 1. *Над каждой координатной окрестностью U произвольного четырехмерного пространства Эйнштейна $\mathcal{X}$ модуль векторных полей $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ обладает таким ортонормированным базисом X_1, X_2, X_3, X_4, что в соответствующем базисе $X_i \wedge X_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, модуля $\Lambda^2 \mathcal{X}$ тензор кривизны R пространства $\mathcal{X}$, рассматриваемый как оператор $\Lambda^2\mathcal{X} \to \Lambda^2\mathcal{X}$, имеет — при соответствующем расположении бивекторов $X_i \wedge X_j$ — матрицу вида*

$$\begin{Vmatrix} L & M \\ M & L \end{Vmatrix}, \tag{27}$$

где

$$L = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{Vmatrix}, \qquad M = \begin{Vmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \mu_3 \end{Vmatrix}$$

и $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$.

Доказательство. По условию тензор R имеет вид (20), где A и C — самосопряженные — и, следовательно, ортогонально диагонализируемые — операторы с $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} C$. Поэтому подмодули $\Lambda^2_+\mathcal{X}$ и $\Lambda^2_-\mathcal{X}$ обладают над U

такими ортонормированными базисами ξ_1, ξ_2, ξ_3 и η_1, η_2, η_3, что

$$A\xi_1 = a_1\xi_1, \qquad A\xi_2 = a_2\xi_2, \qquad A\xi_3 = a_3\xi_3,$$
$$C\eta_1 = c_1\eta_1, \qquad C\eta_2 = c_2\eta_2, \qquad C\eta_3 = c_3\eta_3,$$

где $a_1 + a_2 + a_3 = c_1 + c_2 + c_3$. Мы положим

$$\begin{gathered} \boldsymbol{P}_1 = \frac{\xi_1 + \eta_1}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{P}_2 = \frac{\xi_2 + \eta_2}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{P}_3 = \frac{\xi_3 + \eta_3}{\sqrt{2}}, \\ \boldsymbol{P}_1^{\perp} = \frac{\xi_1 - \eta_1}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{P}_2^{\perp} = \frac{\xi_2 - \eta_2}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{P}_3^{\perp} = \frac{\xi_3 - \eta_3}{\sqrt{2}}. \end{gathered} \tag{28}$$

Тогда в базисе $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_1^{\perp}, \boldsymbol{P}_2^{\perp}, \boldsymbol{P}_3^{\perp}$ оператор R будет иметь матрицу вида (27) с

$$\lambda_i = \frac{a_i + c_i}{2}, \quad \mu_i = \frac{a_i - c_i}{2}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

для которой

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \frac{(a_1 + a_2 + a_3) - (c_1 + c_2 + c_3)}{2} = 0.$$

Поэтому для завершения доказательства леммы 1 надо лишь доказать, что этот базис состоит из бивекторов вида $X_i \wedge X_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$.

С этой целью мы заметим, что согласно формуле (10) лекции 17

$$\xi_i \wedge \eta_j = -\xi_i \wedge *\eta_j = -\langle \xi_i, \eta_j \rangle \mathfrak{e} = 0$$

и, аналогично,

$$\xi_i \wedge \xi_j = \delta_{ij}\mathfrak{e}, \quad \eta_i \wedge \eta_j = -\delta_{ij}\mathfrak{e}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{P}_i \wedge \boldsymbol{P}_j = \frac{\xi_i + \eta_i}{\sqrt{2}} \wedge \frac{\xi_j + \eta_j}{\sqrt{2}} = 0 \tag{29}$$

для любых $i, j = 1, 2, 3$ и, значит, $\langle \boldsymbol{P}_i, *\boldsymbol{P}_j \rangle = 0$.

Аналогично показывается, что

$$\langle \boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{P}_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

З а д а ч а 9. Докажите, что *для кососимметрического тензора* $\boldsymbol{P}$ *степени* 2 *в четырехмерном пространстве равенство* $\langle \boldsymbol{P}, *\boldsymbol{P} \rangle = 0$ *имеет место тогда и только тогда, когда тензор* $\boldsymbol{P}$ *является бивектором.* [У к а з а н и е. Число $\langle \boldsymbol{P}, *\boldsymbol{P} \rangle$ равно левой части соотношения Плюккера (см. пример 2 лекции II.8).]

В частности, отсюда следует, что все тензоры $\boldsymbol{P}_i$, $i = 1, 2, 3$ являются бивекторами (точнее, бивекторными полями).

Задача 10. Докажите, что *для бивекторов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ в четырехмерном пространстве равенство $\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q} = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда существует вектор, параллельный обоим бивекторам.*

Поскольку $\boldsymbol{P}_1 \wedge \boldsymbol{P}_2 = 0$ (и $\langle \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_2 \rangle = 1$), отсюда следует, что на U существуют такие ортонормированные векторные поля X_1, X_2, X_3, что

$$\boldsymbol{P}_1 = X_1 \wedge X_2, \quad \boldsymbol{P}_2 = X_1 \wedge X_3.$$

Дополним эти поля полем X_4 до ортонормированного базиса X_1, X_2, X_3, X_4 модуля $a\mathcal{X}$ над U. Так как $\boldsymbol{P}_1 \wedge \boldsymbol{P}_3 = 0$ и $\boldsymbol{P}_2 \wedge \boldsymbol{P}_3 = 0$, то в разложении бивектора $\boldsymbol{P}_3$ по базису $X_i \wedge X_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, коэффициенты при бивекторах $X_3 \wedge X_4$ и $X_2 \wedge X_4$ равны нулю. Кроме того, так как $\langle \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_3 \rangle = 0$ и $\langle \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3 \rangle = 0$, то же самое верно и для коэффициентов при бивекторах $X_1 \wedge X_2 = \boldsymbol{P}_1$ и $X_1 \wedge X_3 = \boldsymbol{P}_2$. Следовательно, $\boldsymbol{P}_3 = a(X_1 \wedge X_4) + b(X_2 \wedge X_3)$, где $a^2 + b^2 = 1$. Но поскольку $\boldsymbol{P}_3$ — бивектор, это равенство возможно только при $a = \pm 1$ или $b = \pm 1$. Так как, очевидно, $*\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_i^{\perp}$, $i = 1, 2, 3$, то, заменив, если нужно, X_4 на $-X_4$, мы получим, что с точностью до порядка бивекторы $X_i \wedge X_j$ совпадают с бивекторами (28). $\square$

Доказательство предложения 4. Так как оператор R имеет в базисе $\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{P}_i^{\perp}$, $i = 1, 2, 3$, матрицу (27), то

$$\lambda_i = \langle R(\boldsymbol{P}_i), \boldsymbol{P}_i \rangle, \qquad i = 1, 2, 3,$$

и, значит, элементы λ_i являются секционными кривизнами пространства $\mathcal{X}$. Поэтому в условиях предложения 4 они имеют один и тот же знак.

С другой стороны, так как в этом базисе оператор Ходжа имеет матрицу

$$\begin{Vmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{Vmatrix},$$

то операторы $R * R$ и $*R * R$ имеют матрицы

$$\begin{Vmatrix} LM + ML & L^2 + M^2 \\ M^2 + L^2 & ML + LM \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} M^2 + L^2 & ML + LM \\ LM + ML & L^2 + M^2 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Tr}(R*R) = 2\operatorname{Tr}(LM+ML) = 4(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3) = 4\boldsymbol{\lambda\mu},$$

$$\operatorname{Tr}(*R*R) = 2\operatorname{Tr}(L^2+M^2) = \\ = 2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2) = 2(\boldsymbol{\lambda}^2+\boldsymbol{\mu}^2),$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

Лемма 2. *Если числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ имеют один и тот же знак, а числа μ_1, μ_2, μ_3 удовлетворяют соотношению $\mu_1+\mu_2+\mu_3=0$, то*

$$\boldsymbol{\lambda\mu} \leqslant \frac{1}{\sqrt{6}}(\boldsymbol{\lambda}^2+\boldsymbol{\mu}^2), \tag{30}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

Согласно этой лемме

$$\operatorname{Tr}(R*R) \leqslant \frac{2}{\sqrt{6}}\operatorname{Tr}(*R*R),$$

и, значит (см. формулы (16) и (23)),

$$p_1[\mathcal{X}] \leqslant \frac{4}{\sqrt{6}}e[\mathcal{X}].$$

Меняя — если нужно — ориентацию многообразия $\mathcal{X}$, мы немедленно получаем отсюда неравенство

$$|p_1[\mathcal{X}]| \leqslant \frac{4}{\sqrt{6}}e[\mathcal{X}],$$

равносильное неравенству (26). □

Осталось доказать лемму 2.

Доказательство леммы 2. Если $\boldsymbol{\lambda} = 0$ или $\boldsymbol{\mu} = 0$, то неравенство (30) очевидно, а случай $\lambda_i < 0$, $i = 1,2,3$, сводится к случаю $\lambda_i > 0$, $i = 1,2,3$, изменением знака у $\boldsymbol{\mu}$. Поэтому без ограничений общности мы можем считать, что $\lambda_i > 0$, $i = 1,2,3$, и что $\boldsymbol{\mu} \neq 0$.

Пусть θ — угол между векторами $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\mu}$ пространства $\mathbb{R}^3$. Так как наименьшее значение этого угла при фиксированном векторе $\boldsymbol{\lambda}$ и переменном векторе $\boldsymbol{\mu}$ равно углу между вектором $\boldsymbol{\lambda}$ и плоскостью $\mu_1+\mu_2+\mu_3=0$, то

$$\sin\theta \geqslant \frac{\boldsymbol{\lambda e}}{|\boldsymbol{\lambda}|\cdot|\boldsymbol{e}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}},$$

где $e = (1, 1, 1)$ — вектор, ортогональный плоскости $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$. Поскольку, как легко видеть,

$$\min_{\lambda_i \geqslant 0} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} = 1,$$

этим доказано, что $\sin\theta \geqslant 1/\sqrt{3}$ и, значит, что $\cos\theta \leqslant \sqrt{2/3}$. Так как $\boldsymbol{\lambda}^2 + \boldsymbol{\mu}^2 = |\boldsymbol{\lambda}|^2 + |\boldsymbol{\mu}|^2 \geqslant 2|\boldsymbol{\lambda}| \cdot |\boldsymbol{\mu}|$, то

$$2\frac{\boldsymbol{\lambda\mu}}{\boldsymbol{\lambda}^2 + \boldsymbol{\mu}^2} \leqslant \frac{\boldsymbol{\lambda\mu}}{|\boldsymbol{\lambda}| \cdot |\boldsymbol{\mu}|} = \cos\theta \leqslant \sqrt{\frac{2}{3}},$$

что равносильно неравенству (30). □