# ЛЕКЦИЯ 25

Левоинвариантные метрики на группе Ли. — Инвариантные метрики на группе Ли. — Полупростые группы и алгебры Ли. — Простые группы и алгебры Ли. — Внутренние дифференцирования алгебр Ли. — Присоединенная группа. — Группы и алгебры Ли без центра.

**Левоинвариантные метрики на группе Ли**

Интересные римановы метрики возникают в теории групп Ли.

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольная связная группа Ли и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли.

Напомним, что символом $L_a$, $a \in \mathcal{G}$, мы обозначаем *левый сдвиг*

$$L_a\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \quad p \mapsto ap, \qquad p \in \mathcal{G}.$$

***Определение* 1**. Риманова (или псевдориманова) метрика $g$ на группе Ли $\mathcal{G}$ называется *левоинвариантной*, если $L_a^* g = g$ для любого элемента $a \in \mathcal{G}$, т. е. если для любой точки $p \in \mathcal{G}$ и любых векторов $A, B \in \mathsf{T}_p\mathcal{G}$

$$g_p(A, B) = g_{ap}((dL_a)_p A, (dL_a)_p B). \tag{1}$$

Иными словами, *метрика левоинвариантна, если все левые сдвиги $L_a$ являются изометриями.*

Поэтому (см. задачу 3 лекции 6 и задачу 1 лекции 19) *связность Леви-Чивита, отвечающая левоинвариантной метрике, левоинвариантна.*

В интерпретации поля $g$ как $\mathsf{F}\mathcal{X}$-морфизма $\mathfrak{a}\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{a}\mathfrak{g} \to \mathsf{F}\mathcal{X}$ условие (1) равносильно тому, что

$$g(X, Y) = \text{const}$$

для любых левоинвариантных полей $X, Y \in \mathfrak{g}$, т. е. тому, что для любого базиса

$$X_1, \ldots, X_n \tag{2}$$

алгебры Ли $\mathfrak{g}$ функции

$$g_{ij} = g(X_i, X_j), \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

являются константами. Это означает, что *левоинвариантные (псевдо)римановы метрики на группе Ли $\mathcal{G}$ находятся в естественном биективном соответствии с (псевдо)евклидовыми структурами на линейном пространстве $\mathfrak{g}$, и поэтому могут быть с ними отождествлены.*

Как правило, вместо $g(X,Y)$ мы будем писать просто $(X,Y)$; ср. лекцию 11.

**Инвариантные метрики на группе Ли** Конечно, наибольший интерес на группе Ли имеют метрики, для которых проходящие через точку $e$ геодезические совпадают с однопараметрическими подгруппами, т. е. для которых отвечающая им связность Леви-Чивита является связностью Картана (см. определение 2 лекции 6). Поскольку в силу единственности симметрической связности Картана, последняя связность должна задаваться формулой (10) лекции 6, левоинвариантная метрика тогда и только тогда обладает этим свойством, когда

$$([X,Y],Z)+(Y,[X,Z])=0 \tag{3}$$

для любых полей $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ (См. формулу (2) лекции 11; так как метрика $g$ левоинвариантна, то $(Y,Z)=\mathrm{const}$, и потому левая часть этой формулы равна нулю.)

Задача 1. Покажите, что *условие* (3) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$(X,[X,Y])=0 \tag{3'}$$

*для любых полей* $X,Y\in\mathfrak{g}$.

(Псевдо)евклидова метрика на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условию (3) (и/или условию (3′)), называется *инвариантной метрикой.*

Основания для этой терминологии следующие.

Пусть для простоты метрика $g$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ евклидова. Тогда условие (3) в точности означает, что оператор

$$\operatorname{ad}X\colon\ Y\mapsto[X,Y] \tag{4}$$

на евклидовом пространстве $\mathfrak{g}$ кососимметричен. (См. определение 5 лекции II.20.) Поэтому (см. лекцию III.11) линейный оператор

$$e^{\operatorname{ad}X}\colon\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$$

ортогонален (изометричен). Поскольку $e^{\operatorname{ad} X} = (d\,\mathrm{int}_a)_e$, где $a = \exp X$ (см. задачу 16 лекции IV.14) и

$$R_a = L_{ba} \circ \mathrm{int}_{a^{-1}} \circ L_b^{-1}, \qquad a, b \in \mathcal{G},$$

а потому и

$$(dR_a)_b = (dL_{ba})_e \circ (d\,\mathrm{int}_{a^{-1}})_e \circ (dL_b^{-1})_b,$$

это доказывает, что *отображение* $R_a\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ *является изометрией* (для точек $a$ из некоторой окрестности единицы, а значит, — ввиду связности группы $\mathcal{G}$ — и для всех точек $a \in \mathcal{G}$). Обратно, если все отображения $R_a$, $a \in \mathcal{G}$, являются изометриями, то изометриями будут и все отображения $\mathrm{int}_a$. В частности, для любого поля $X \in \mathfrak{g}$ изометрией будет оператор $e^{\operatorname{ad} X}$, т. е. оператор $\operatorname{ad} X$ будет кососимметричен. Называя метрику $g$ на группе Ли *инвариантной*, если по отношению к этой метрике изометриями являются как все левые, так и все правые сдвиги $L_a$ и $R_a$, мы видим, следовательно, что *условие* (3) *для левоинвариантной метрики* $g$ *на группе Ли* $\mathcal{G}$ *равносильно тому, что эта метрика инвариантна.*

Не на каждой группе Ли существует инвариантная метрика.

Пример 1. Пусть $\mathcal{G}$ — группа всех $2 \times 2$-матриц вида

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad a \neq 0$$

(эта группа изоморфна группе всех аффинных преобразований $y = ax + b$ прямой). Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы $\mathcal{G}$ состоит из матриц вида

$$\begin{Vmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

(докажите!) и порождается матрицами

$$E_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad E_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

связанными соотношением $[E_1, E_2] = E_2$. Поэтому при $X = E_1$, $Y = E_2$ соотношение (3′) дает $(E_1, E_2) = 0$, а при $X = E_2$, $Y = E_1$ дает $(E_2, E_2) = 0$. Следовательно, элемент $E_2$ ортогонален всем элементам из $\mathfrak{g}$, что противоречит невырожденности метрики. Поэтому удовлетворяющей условию (3) метрики на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существовать не может.

**Полупростые группы и алгебры Ли**

Положив

$$\operatorname{Kil}(X,Y)=\operatorname{Tr}(\operatorname{ad}X\circ\operatorname{ad}Y),\qquad X,Y\in\mathfrak{g},$$

мы, очевидно, получим на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ билинейный симметрический функционал (форму) Kil. Этот функционал называется *формой Киллинга* на $\mathfrak{g}$. (Некоторые авторы называют его *формой Картана — Киллинга.*)

Так как для любого автоморфизма $\varphi\colon\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$

$$\varphi[X,\varphi^{-1}Y]=[\varphi X,Y],\qquad X,Y\in\mathfrak{g},$$

то

$$\operatorname{ad}(\varphi X)=\varphi\circ\operatorname{ad}X\circ\varphi^{-1},\qquad X\in\mathfrak{g},\qquad(5)$$

откуда непосредственно следует, что

$$\operatorname{Kil}(\varphi X,\varphi Y)=\operatorname{Kil}(X,Y),\qquad X,Y\in\mathfrak{g}$$

(*форма* Kil *инвариантна относительно автоморфизмов*).

Кроме того, так как $\operatorname{ad}[X,Y]=[\operatorname{ad}X,\operatorname{ad}Y]$ и $\operatorname{Tr}AB=\operatorname{Tr}BA$, то форма Kil удовлетворяет условию (3′):

$$\operatorname{Kil}(X,[X,Y])=\operatorname{Tr}(\operatorname{ad}X\circ\operatorname{ad}[X,Y])=$$
$$=\operatorname{Tr}(\operatorname{ad}X\circ\operatorname{ad}X\circ\operatorname{ad}Y-\operatorname{ad}X\circ\operatorname{ad}Y\circ\operatorname{ad}X)=0.$$

Однако, вообще говоря, эта форма вырождена.

***Определение* 2.** Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ (а также соответствующая группа Ли $\mathcal{G}$) называется *полупростой*, если форма Киллинга Kil невырождена.

Замечание 1. Это определение имеет смысл для алгебр Ли над произвольным полем $\mathbb{K}$ (и, в частности, над полем $\mathbb{C}$).

Таким образом, на полупростой алгебре Ли (над полем $\mathbb{R}$) форма Киллинга является инвариантной метрикой (и, значит, на группе Ли $\mathcal{G}$ задает инвариантную (псевдо)риманову метрику). В дальнейшем мы всегда будем считать, что полупростая алгебра $\mathfrak{g}$ снабжена этой метрикой, и вместо $\operatorname{Kil}(X,Y)$ будем, как правило, писать просто $(X,Y)$.

В соответствии с общими алгебраическими определениями подалгебра $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *идеалом*, если

$[X, Y] \in \mathfrak{h}$ для любых $X \in \mathfrak{g}$ и $Y \in \mathfrak{h}$, т. е. если для любого $X \in \mathfrak{g}$ эта подалгебра является инвариантным подпространством оператора $\operatorname{ad} X\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Задача 2. Покажите, что *подалгебра $\mathfrak{h}$ тогда и только тогда является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, когда отвечающая ей* (см. теорему 2 лекции IV.14) *связная подгруппа $\mathcal{H}$ группы Ли $\mathcal{G}$ инвариантна.*

Если $\mathfrak{b}$ — подпространство, дополнительное к идеалу $\mathfrak{h}$, то для каждого $X \in \mathfrak{h}$ оператор $\operatorname{ad} X$ отображает $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{h}$. Схематически

| | $\mathfrak{h}$ | $\mathfrak{b}$ |
|---|---|---|
| $\mathfrak{h}$ | $\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} X$ | $*$ |
| $\mathfrak{b}$ | $0$ | $0$ |

где $\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} X$ — оператор $\operatorname{ad} X$ для алгебры Ли $\mathfrak{h}$, а $*$ — некоторый линейный оператор, нам неинтересный. Поэтому оператор $\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y$ при $X, Y \in \mathfrak{h}$ (и даже при $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{g}$) имеет вид

| | $\mathfrak{h}$ | $\mathfrak{b}$ |
|---|---|---|
| $\mathfrak{h}$ | $\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} X \circ \operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} Y$ | $*$ |
| $\mathfrak{b}$ | $0$ | $0$ |

откуда непосредственно следует, что *ограничение формы Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на идеале $\mathfrak{h}$ является формой Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{h}$*. В условных, но понятных обозначениях

$$\operatorname{Kil}^{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}} = \operatorname{Kil}^{\mathfrak{h}}.$$

Подчеркнем, что это верно только в предположении, что $\mathfrak{h}$ — идеал.

Далее, легко видеть, что *для любого идеала $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ его ортогональное дополнение $\mathfrak{h}^{\perp}$ также является идеалом.* Действительно, если $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}^{\perp}$ и $Z \in \mathfrak{h}$, то $[X, Z] \in \mathfrak{h}$, и потому

$$([X, Y], Z) = -(Y, [X, Z]) = 0. \qquad \square$$

При этом если $X, Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp}$, то для любого $Z \in \mathfrak{g}$

$$([X, Y], Z) = -(Y, [X, Z]) = 0,$$

так как $Y \in \mathfrak{h}^{\perp}$ и $[X, Z] \in \mathfrak{h}$. Поэтому, если метрика невырождена (алгебра Ли полупроста), то $[X, Y] = 0$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с нулевым умножением, т. е. такая, что $[X, Y] = 0$ для любых элементов $X, Y \in \mathfrak{g}$, называется *абелевой.* На такой алгебре форма Киллинга тождественно равна нулю.

Таким образом, мы доказали, что *для любого идеала $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ идеал $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp}$ абелев.* □

Задача 3. Покажите, что *связная группа Ли $\mathcal{G}$ тогда и только тогда абелева (коммутативна), когда ее алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}\mathcal{G}$ абелева.* Это объясняет терминологию.

С другой стороны, легко видеть, что *полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не содержит ненулевых абелевых идеалов.* Действительно, если $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ — абелев идеал, то для любых элементов $X \in \mathfrak{a}$, $Y \in \mathfrak{g}$ оператор $\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y$ имеет вид

$$\begin{array}{c|c|c|} & \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \hline \mathfrak{a} & 0 & * \\ \hline \mathfrak{b} & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

где, как и выше, $\mathfrak{b}$ — подпространство, дополнительное к идеалу $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}$, и, значит, $\operatorname{Kil}(X, Y) = 0$, что в силу невырожденности формы Kil возможно только при $X = 0$. □

Замечание 2. Можно доказать (это трудная теорема!), что и обратно, *алгебра Ли полупроста, если она не содержит ненулевых абелевых идеалов.* Нам это утверждение (принадлежащее Э. Картану) не понадобится.

Сопоставив последние два утверждения, мы немедленно получим, что в полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ для любого идеала $\mathfrak{h}$ имеет место равенство $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp} = 0$. Поскольку в силу невырожденности метрики $\dim \mathfrak{h} + \dim \mathfrak{h}^{\perp} = \dim \mathfrak{g}$ (см. формулу (9) лекции II.5), отсюда следует, что *полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является прямой суммой идеалов $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^{\perp}$*:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}. \tag{6}$$

Но тогда форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$ будет в понятном смысле прямой суммой форм Киллинга алгебр Ли $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^{\perp}$, и потому обе последние формы будут невырождены. Таким образом, *каждый идеал* $\mathfrak{h}$ *полупростой алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *сам является полупростой алгеброй Ли.* □

**Простые группы и алгебры Ли**

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ (а также соответствующая группа Ли $\mathcal{G}$) называется *простой*, если она полупростая и не содержит никаких нетривиальных идеалов (отличных от нулевого идеала 0 и всей алгебры $\mathfrak{g}$).

Замечание 3. Это определение предложено Хелгасоном. В силу теоремы Картана, указанной в замечании 2, оно равносильно классическому определению, в котором вместо полупростоты требуется лишь неабелевость.

Замечание 4. В общей теории алгебр алгебра называется *простой*, если она не имеет нетривиальных идеалов. С этой точки зрения к простым алгебрам Ли следует причислять также одномерную (автоматически абелеву) алгебру Ли. Однако в теории алгебр Ли это оказывается неудобным. Точно так же в теории групп Ли оказывается неудобным общегрупповое определение простых групп как групп, не содержащих нетривиальных инвариантных подгрупп (согласно нашему определению простая группа Ли может иметь нетривиальные инвариантные подгруппы, но — см. задачу 2 — эти подгруппы должны быть обязательно дискретны).

Так как в разложении (6) оба слагаемые являются идеалами, то $[X, Y] = 0$ при $X \in \mathfrak{h}$ и $Y \in \mathfrak{h}^{\perp}$. Поэтому *любой идеал алгебры Ли* $\mathfrak{h}$ *является также идеалом алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. □

Очевидной индукцией отсюда следует, что *каждая полупростая алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *является ортогональной прямой суммой идеалов*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_r, \tag{7}$$

*являющихся простыми алгебрами Ли.* □

Задача 4. Покажите, что *каждый идеал* $\mathfrak{h}$ *полупростой алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *является суммой простых идеалов из разложения* (7).

**Внутренние дифференцирования алгебр Ли** Общие результаты лекции IV.15, касающиеся групп автоморфизмов конечномерных алгебр (см. пример 2 и задачу 3 лекции IV.15), применимы, в частности, к произвольной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Таким образом, для каждой (конечномерной) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группа $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ ее автоморфизмов является группой Ли (вообще говоря, несвязной), причем алгеброй Ли этой группы служит алгебра Ли $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$, т. е. таких линейных отображений $D\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, что

$$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY] \tag{8}$$

для любых элементов $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Из тождества Якоби непосредственно вытекает, что *каждое отображение* $\operatorname{ad} X$, $X \in \mathfrak{g}$, *является дифференцированием алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *а отображение*

$$\operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}\mathfrak{g}, \qquad X \mapsto \operatorname{ad} X, \qquad X \in \mathfrak{g} \tag{9}$$

— *гомоморфизмом алгебр Ли.* □

В частности, мы видим, что отображения $\operatorname{ad} X$, $X \in \mathfrak{g}$, составляют подалгебру алгебры Ли $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$. Эта подалгебра обозначается символом $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$, а ее элементы называются *внутренними дифференцированиями* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Так как

$$\operatorname{ad} DX = [D, \operatorname{ad} X]$$

для любых $D \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$ и $X \in \mathfrak{g}$ (это лишь иная форма тождества (8)), то *подалгебра* $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ *является идеалом алгебры Ли* $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$. □

Ядром отображения (9) является *центр* $\mathfrak{z}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — ее абелев идеал, состоящий из элементов $X \in \mathfrak{g}$, для которых

$$[X,Y] = 0$$

при любом $Y \in \mathfrak{g}$. Поэтому *если* $\mathfrak{z} = 0$, *то алгебра* $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ *изоморфна алгебре* $\mathfrak{g}$.

В частности, $\operatorname{ad}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ *для любой полупростой алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. □

Следовательно, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то алгебра $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ также полупроста и, значит, ограничение формы

Киллинга алгебры Ли $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ на ее идеале $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ невырождено. Поэтому если $(\operatorname{ad}\mathfrak{g})^\perp$ — ортогональное дополнение алгебры $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ в алгебре $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга алгебры $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$, то идеал $\operatorname{ad}\mathfrak{g}\cap(\operatorname{ad}\mathfrak{g})^\perp$ алгебры $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ (являющийся не чем иным, как нуль-пространством формы Киллинга алгебры $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$) равен нулю. Поскольку для любых $D\in$ $\in(\operatorname{ad}\mathfrak{g})^\perp$ и $X\in\mathfrak{g}$ имеет место включение

$$\operatorname{ad}(DX)=[D,\operatorname{ad}X]\in\operatorname{ad}\mathfrak{g}\cap(\operatorname{ad}\mathfrak{g})^\perp,$$

этим доказано, что $\operatorname{ad}(DX)=0$ и, значит (поскольку ядро отображения ad равно нулю), что $DX=0$, т. е. что $D=0$. Таким образом, $(\operatorname{ad}\mathfrak{g})^\perp=0$, и потому $\operatorname{ad}\mathfrak{g}=\operatorname{Der}\mathfrak{g}$. Это означает, что *любое дифференцирование полупростой алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *является внутренним.* □

Связная подгруппа группы Ли $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, отвечающая подалгебре (идеалу) $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ (см. теорему 2 лекции IV.14), обозначается символом $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$. Будучи связной, она содержится в компоненте единицы $(\operatorname{Aut}\mathfrak{g})_0$ группы $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, и совпадает с этой компонентой в том и только в том случае, когда $\operatorname{ad}\mathfrak{g}=\operatorname{Der}\mathfrak{g}$. В частности, мы видим, что *для любой полупростой алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *группа* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ *является компонентой единицы группы* $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ (*и потому замкнута*). □

Существуют алгебры Ли (заведомо не полупростые), для которых это не так.

Пример-задача 1 (по ван Эсту и Хохшильду). Зафиксировав некоторое иррациональное число $h$, определим в линеале $\mathfrak{g}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{R}$ операцию [ , ] формулой

$$[(z_1,z_2,r),(w_1,w_2,s)]=(2\pi i(rw_1-sz_1),2h\pi i(rw_2-sz_2),0),$$

где $z_1,z_2,w_1,w_2\in\mathbb{C}$, $r,s\in\mathbb{R}$.

Покажите, что

**а** *относительно этой операции линеал* $\mathfrak{g}$ *является алгеброй Ли;*

**б** *для любых* $s,t\in\mathbb{R}$ *формула*

$$\alpha_{s,t}(z_1,z_2,r)=(e^{2\pi is}z_1,e^{2\pi it}z_2,r)$$

*определяет автоморфизм алгебры Ли* $\mathfrak{g}$;

**в** *если* $t=(s+n)h$, *где* $n$ *— целое число, то* $\alpha_{s,t}=e^{\operatorname{ad}X}$, *где* $X=(0,0,s+n)$;

**г** *автоморфизм* $\alpha_{0,1/3}$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *не принадлежит группе* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$;

**д** *если* $s_n\to s$ *и* $t_n\to t$, *то* $\alpha_{s_n,t_n}\to\alpha_{s,t}$ *в группе* $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$.

Из **в**, **г** и **д** следует, что *группа* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ *незамкнута в группе* $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$.

**Присоединенная группа** Согласно общим результатам лекции 7 для любой группы Ли $\mathcal{G}$ функтор Ли определяет гомоморфное отображение

$$\mathfrak{l}\colon \operatorname{Aut}\mathcal{G} \to \operatorname{Aut}\mathfrak{g} \tag{10}$$

группы автоморфизмов $\operatorname{Aut}\mathcal{G}$ группы $\mathcal{G}$ в группу автоморфизмов $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для связной группы $\mathcal{G}$ являющееся мономорфизмом (а для связной и односвязной — даже изоморфизмом). [Поэтому в случае, когда группа $\mathcal{G}$ связна и односвязна, группа $\operatorname{Aut}\mathcal{G}$ автоматически оказывается группой Ли.] По определению (см. лекцию IV.14) композиция с этим отображением гомоморфизма

$$\operatorname{int}\colon \mathcal{G} \to \operatorname{Aut}\mathcal{G}, \quad a \mapsto \operatorname{int}_a, \qquad a \in \mathcal{G} \tag{11}$$

является не чем иным, как присоединенным представлением $\operatorname{Ad}$:

$$\mathfrak{l} \circ \operatorname{int} = \operatorname{Ad}\colon \mathcal{G} \to \operatorname{Aut}\mathfrak{g}. \tag{12}$$

Образ $\operatorname{Ad}\mathcal{G}$ группы $\mathcal{G}$ при гомоморфизме (12) называется *присоединенной группой*. Так как ядром гомоморфизма (11) (а потому — в случае, когда группа $\mathcal{G}$ связна — и гомоморфизма (12)) является центр $\mathcal{Z}$ группы $\mathcal{G}$, то (см. задачу 4 лекции 7) *для связной группы Ли $\mathcal{G}$ группа Ли $\operatorname{Ad}\mathcal{G}$ изоморфна факторгруппе $\mathcal{G}/\mathcal{Z}$*, а так как по определению $\mathfrak{l}(\operatorname{Ad}) = \operatorname{ad}$ (см. лекцию IV.14), то *алгеброй Ли группы $\operatorname{Ad}\mathcal{G}$ служит алгебра* $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$, и, значит, группа $\operatorname{Ad}\mathcal{G}$ является не чем иным, как введенной выше группой $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$:

$$\operatorname{Ad}\mathcal{G} = \operatorname{Int}\mathfrak{g}.$$

(Подчеркнем, что группа Ли $\mathcal{G}$ предполагается здесь связной.)

Задача 5. Покажите, что группа $\operatorname{Ad}\mathcal{G}$ (а также группа $\operatorname{Aut}\mathcal{G}$) обладает естественной структурой группы Ли и для любой группы Ли $\mathcal{G}$ (не обязательно связной и односвязной).

В этом случае $\operatorname{Int}\mathfrak{g} = (\operatorname{Ad}\mathcal{G})_e$.

**Группы и алгебры Ли без центра** Группа $\mathcal{G}$ называется *группой без центра*, если ее центр $\mathcal{Z}$ состоит только из единицы. Аналогично, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй* *без центра*, если ее центр $\mathfrak{z}$ состоит только из нуля. Конечно, любая полупростая алгебра Ли является алгеброй без центра.

Согласно сказанному выше, *связная группа Ли $\mathcal{G}$ без центра изоморфна присоединенной группе* $\operatorname{Ad}\mathcal{G}$. $\square$

Задача 6. Докажите, что *алгеброй Ли центра $\mathcal{Z}$ группы Ли $\mathcal{G}$ является центр $\mathfrak{z}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$*:

$$\mathfrak{l}\mathcal{Z} = \mathfrak{z}.$$

Поэтому *алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathcal{G}$ тогда и только тогда является алгеброй без центра, когда центр группы $\mathcal{G}$ дискретен* (и в этом случае гомоморфизм $\operatorname{Ad}\colon \mathcal{G} \to \operatorname{Ad}\mathcal{G}$ является — для связной группы $\mathcal{G}$ — групповым накрытием). В частности, *центр полупростой группы Ли $\mathcal{G}$ дискретен*.

**Предложение 1**. *Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ без центра группа Ли* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ *является группой без центра.*

Доказательство. Так как для любого автоморфизма $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ в группе $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ имеет место равенство

$$\operatorname{int}_\varphi(e^{\operatorname{ad} X}) = \varphi \circ e^{\operatorname{ad} X} \circ \varphi^{-1} = e^{\operatorname{ad} \varphi X}, \qquad X \in \mathfrak{g}$$

(см. формулу (5)), то

$$(d\operatorname{int}_\varphi)_e(\operatorname{ad} X) = \operatorname{ad}\varphi X,$$

т. е.

$$(d\operatorname{int}_\varphi)_e = \operatorname{ad}\circ\varphi\circ\operatorname{ad}^{-1}$$

(так как алгебра Ли $\mathfrak{g}$ центра, по условию, не имеет, то отображение $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ является изоморфизмом, и потому отображение $\operatorname{ad}^{-1}$ определено). Применительно к $\varphi \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ это означает, что присоединенное представление $\operatorname{Int}\mathfrak{g} \to \operatorname{Aut}(\operatorname{ad}\mathfrak{g})$ группы $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ действует по формуле

$$\varphi \mapsto \operatorname{ad}\circ\varphi\circ\operatorname{ad}^{-1}.$$

Следовательно, оно является мономорфизмом и, значит, группа $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ центра не имеет. $\square$

Для алгебры Ли с нетривиальным центром группа $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ также может иметь нетривиальный центр.

Пример-задача 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — трехмерная алгебра Ли с базисом $X_1, X_2, X_3$, для которого

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Покажите, что группа $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ абелева (и двумерна).