ЛЕКЦИЯ 26

Формы Маурера — Картана. — Левоинвариантные дифференциальные формы. — Мера Хаара на группе Ли. — Унимодулярные группы Ли. — Инвариантные римановы метрики на компактной группе Ли. — Группы Ли с компактной алгеброй Ли. — Теорема Вейля.

Для более глубокого изучения полупростых групп и алгебр Ли нам понадобятся некоторые дополнительные сведения из теории групп Ли, имеющие, впрочем, и самостоятельный интерес.

Формы Маурера — Картана

Как непосредственно следует из утверждения задачи 4 лекции 6, каждая линейная дифференциальная форма ω на группе Ли $\mathcal{G}$ однозначно характеризуется ее значениями $\omega(X)$ на полях $X \in \mathfrak{g}$. В частности, для любого базиса

$$X_1, \ldots, X_n \tag{1}$$

алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на группе $\mathcal{G}$ существуют однозначно определенные формы

$$\omega^1, \ldots, \omega^n, \tag{2}$$

для которых $\omega^i(X_j) = \delta^i_j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Определение 1. Формы (2) называются *формами Маурера — Картана* на группе Ли $\mathcal{G}$, отвечающими базису (1) алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Внешний дифференциал $d\omega^i$ каждой из форм (14) однозначно характеризуется его значениями $d\omega^i(X_p, X_q)$, $p, q = 1, \ldots, n$, на элементах базиса (1). Но по формуле Картана (см. формулу (6) лекции III.19)

$$(d\omega^i)(X_p, X_q) = X_p\omega^i(X_q) - X_q\omega^i(X_p) - \omega^i([X_p, X_q]) = \\ = -\omega^i([X_p, X_q])$$

(так как функции $\omega^i(X_q) = \delta^i_q$ и $\omega^i(X_p) = \delta^i_p$ постоянны, то $X_p\omega^i(X_q) = 0$ и $X_q\omega^i(X_p) = 0$). Поэтому если

$$[X_p, X_q] = c^r_{pq}X_r, \qquad p, q, r = 1, \ldots, n,$$

то

$$(d\omega^i)(X_p, X_q) = -c^i_{pq} = -c^i_{jk}\delta^j_p\delta^k_q = -c^i_{jk}\omega^j(X_p)\omega^k(X_q) =$$
$$= -\frac{1}{2}c^i_{jk}(\omega^j(X_p)\omega^k(X_q) - \omega^k(X_p)\omega^j(X_q)) =$$
$$= -\frac{1}{2}c^i_{jk}(\omega^j \wedge \omega^k)(X_p, X_q)$$

и, значит,

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}\, c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Формулы (3) известны как *формулы Маурера — Картана.*

Эти формулы можно записать в элегантной безиндексной форме, если ввести в рассмотрение $\mathfrak{g}$-значные линейные дифференциальные формы на группе Ли $\mathcal{G}$. По определению (см. формулу (30) лекции IV.16) такие формы имеют вид $\omega = \omega^i \otimes X_i$ и естественным образом отождествляется с $\mathsf{F}\mathcal{G}$-морфизмами вида

$$\mathfrak{a}\mathcal{G} \to \mathsf{F}_{\mathfrak{g}}\mathcal{G},$$

где $\mathfrak{a}\mathcal{G}$ — как всегда, линеал (точнее, $\mathsf{F}\mathcal{G}$-модуль) гладких векторных полей на группе Ли $\mathcal{G}$, а $\mathsf{F}_{\mathfrak{g}}\mathcal{G}$ — линеал ($\mathsf{F}\mathcal{G}$-модуль) гладких $\mathfrak{g}$-значных функций на $\mathcal{G}$).

Задача 1. Покажите, что *$\mathsf{F}\mathcal{G}$-модуль $\mathsf{F}_{\mathfrak{g}}\mathcal{G}$ естественно изоморфен $\mathsf{F}\mathcal{G}$-модулю $\mathfrak{a}\mathcal{G}$.* [Указание. Полю $X \in \mathfrak{a}\mathcal{G}$ отвечает функция $p \mapsto X(p)$, $p \in \mathcal{G}$, где $X(p)$ — левоинвариантное поле на группе Ли $\mathcal{G}$, совпадающее в точке p с полем X.]

В силу этого изоморфизма $\mathfrak{g}$-значные формы на $\mathcal{G}$ являются не чем иным, как $\mathsf{F}\mathcal{G}$-морфизмами вида

$$\mathfrak{a}\mathcal{G} \to \mathfrak{a}\mathcal{G}. \tag{4}$$

В частности, мы можем рассмотреть на $\mathcal{G}$ форму ω, которой отвечает тождественный морфизм (4). Коэффициенты ω^i этой формы характеризуются тем свойством, что

$$\omega^i(X) = f^i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

для любого поля $X = f^i X_i$ из $\mathfrak{a}\mathcal{G}$. Поэтому, в частности, для форм ω^i имеют место равенства $\omega^i(X_j) = \delta^i_j$. Поскольку эти равенства характеризуют формы (2), тем самым доказано, что *формы Маурера — Картана* (2) *являются не чем иным, как коэффициентами в базисе* (1) *$\mathfrak{g}$-значной формы на $\mathcal{G}$, отвечающей тождественному морфизму* (4).

С другой стороны, поскольку $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли, определена (см. лекцию IV.20, стр. 355) форма

$$[\omega, \omega] = (\omega^j \wedge \omega^k) \otimes [X_j, X_k] = c^i_{jk}(\omega^j \wedge \omega^k) \otimes X_i.$$

Следовательно, формулы (3) равносильны соотношению

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]. \tag{5}$$

В этом виде формулы Маурера — Картана обычно теперь и записываются.

Левоинвариантные дифференциальные формы Дифференциальная (не обязательно линейная) форма ω на группе Ли $\mathcal{G}$ называется *левоинвариантной*, если $L^*_a\omega = \omega$ для любого элемента $a \in \mathcal{G}$.

Предложение 1. *Линейная дифференциальная форма ω на группе Ли $\mathcal{G}$ тогда и только тогда левоинвариантна, когда $\omega(X) = \mathrm{const}$ для любого левоинвариантного векторного поля $X \in \mathfrak{g}$.*

Доказательство. Операция переноса тензорного поля посредством диффеоморфизма сохраняет все алгебраические операции над полями (см. указание к задаче 4 лекции III.17) и, в частности, свертку. Применительно к векторным полям X и линейным дифференциальным формам ω это означает, что для любого диффеоморфизма φ имеет место равенство

$$(\varphi^*\omega)(X) = \omega(\varphi_* X) \circ \varphi.$$

В частиости, при $\varphi = L_a$ и $X \in \mathfrak{g}$

$$(L^*_a\omega)(X) = \omega(X) \circ L_a,$$

т. е.

$$(L^*_a\omega)(X)(p) = \omega(X)(ap)$$

для любой точки $p \in \mathcal{G}$. Следовательно, если $L^*_a\omega = \omega$, то $\omega(X)(a^{-1}) = \omega(X)(e)$ для любого $a \in \mathcal{G}$ и, значит, $\omega(X) = \mathrm{const}$. Обратно, если $\omega(X) = \mathrm{const}$, то $(L^*_a\omega)(X)(p) = \omega(X)(p)$ и, значит, $L^*_a\omega = \omega$. □

Следствие 1. *Левоинвариантные линейные дифференциальные формы на группе Ли $\mathcal{G}$ образуют линейное пространство $\mathfrak{g}^*$ размерности $n = \dim \mathcal{G}$. Формы*

Маурера — Картана — это в точности формы, составляющие некоторый базис этого пространства.

Доказательство. Пусть $\omega^1,\dots,\omega^n$ — формы (2). Если $X = c^iX_i$, $c^i\in\mathbb{R}$, то $\omega^i(X) = c^i$. Поэтому формы (2) левоинвариантны. Если $\omega(X_i) = c_i$, $c_i\in\mathbb{R}$, то $(\omega - c_i\omega^i)(X_k) = 0$ для любого $k = 1,\dots,n$, и потому $\omega = c_i\omega^i$ (напомним, что любая форма на $\mathcal{G}$ однозначно характеризуется ее ограничением на $\mathfrak{g}$). Поэтому формы (2) составляют базис пространства левоинвариантных линейных дифференциальных форм. Следовательно, это пространство n-мерное и формы Маурера — Картана (2) составляют его базис.

Обратно, пусть $\omega^1,\dots,\omega^n$ — произвольный базис пространства $\mathfrak{g}^*$. Выбрав базис $X_{1'},\dots,X_{n'}$ линеала $\mathfrak{g}$, рассмотрим соответствующие формы Маурера — Картана $\omega^{1'},\dots$ $\dots,\omega^{n'}$. По доказанному эти формы составляют базис пространства $\mathfrak{g}^*$, и потому имеют место формулы вида

$$\omega^{i'} = c^{i'}_i\omega^i, \qquad i,i' = 1,\dots,n.$$

Тогда поля $X_i = c^{i'}_iX_{i'}$ будут, очевидно, составлять базис пространства $\mathfrak{g}$ и данные формы $\omega^1,\dots,\omega^n$ будут отвечающими этому базису формами Маурера — Картана. □

На основании этого следствия семейство (2) называется также *базисом Маурера — Картана.*

Пример 1 (Левоинвариантные формы на матричных группах Ли). На полной линейной группе $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ локальными координатами являются элементы x^i_j произвольной матрицы $X = \|x^i_j\|\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, и, значит, каждая линейная дифференциальная форма ω на $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ имеет вид

$$\omega = f^j_i\,dx^i_j, \qquad i,j = 1,\dots,n,$$

где f^j_i — некоторые функции на $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$. Вводя матрицу дифференциалов $dX = \|dx^i_j\|$ и матрицу функций $F = \|f^j_i\|$, мы можем форму ω записать в виде следа

$$\omega = \mathrm{Tr}(F\,dX) \tag{6}$$

дифференциальной матрицы $F\,dX$. С другой стороны, как мы знаем (см. пример 5 лекции IV.13), алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$ группы Ли $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ является коммутаторная алгебра $[\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}]$.

Задача 2. Покажите, что для любой матрицы $A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ и любой формы (6) имеет место равенство

$$L_A^*\omega = \mathrm{Tr}(F_A\,dX),$$

где $F_A(X) = F(AX)A$, $X \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ (т. е. $F_A = R_A \circ F \circ L_A$). [Указание. Касательные векторы в каждой точке $X \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ естественным образом отождествляются с матрицами $C \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ и в силу этого отождествления каждое отображение $(dL_A)_X$ является левым сдвигом L_A: $C \mapsto AC$, а значение $\omega_X(C)$ формы (6) на векторе C равно $\mathrm{Tr}(F(X)C)$. Ср. пример 5 лекции IV.13.]

Поэтому форма (6) тогда и только тогда левоинвариантна, когда $F(AX)A = F(X)$ для любых матриц $A, X \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$. Поскольку общее решение этого уравнения имеет, очевидно, вид $F(X) = DX^{-1}$, где $D = F(E)$ — произвольная фиксированная матрица (достаточно положить $X = E$), мы получаем, следовательно, что *левоинвариантные линейные дифференциальные формы на группе Ли* $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ *— это в точности формы вида*

$$\omega = \mathrm{Tr}(DX^{-1}\,dX), \tag{7}$$

где D — произвольная матрица.

Введя в рассмотрение матрицу $X^{-1}dX$ дифференциальных форм, мы немедленно получим отсюда, что *элементы матрицы $X^{-1}dX$ составляют базис линеала* $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})^*$ (представляют собой формы Маурера — Картана).

Для произвольной матричной группы Ли $\mathcal{G}$ мы также можем составить матрицу $X^{-1}dX$; однако, ее элементы будут, вообще говоря, линейно зависимы.

Задача 3. Покажите, что *элементы матрицы $X^{-1}dX$ порождают линеал* $\mathfrak{g}^*$ (и, значит, из них можно выбрать базис Маурера — Картана).

В этом смысле матрица $X^{-1}dX$ доставляет нам все формы Маурера — Картана на матричной группе Ли $\mathcal{G}$.

Мера Хаара на группе Ли Так как формы (2) левоинвариантны, то их внешнее произведение

$$\omega_0 = \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n \tag{8}$$

(являющееся дифференциальной формой максимальной степени на группе Ли $\mathcal{G}$) также левоинвариантно. При этом, так как формы (2) составляют базис, то форма ω_0 ни в одной точке не обращается в нуль и, значит, любая другая форма ω максимальной степени на группе Ли $\mathcal{G}$ имеет вид $f\omega_0$, где f — некоторая функция на $\mathcal{G}$. Если форма ω левоинвариантна, то $f \circ L_a = f$ для любого элемента $a \in \mathcal{G}$, что возможно только при $f = \text{const}$. Таким образом, *все левоинвариантные формы максимальной степени на группе Ли $\mathcal{G}$ исчерпываются формами вида $c\omega_0$, где $c \in \mathbb{R}$, а ω_0 — форма* (8).

Как мы знаем (см. предложение 1 лекции III.25), формы максимальной степени на ориентированном многообразии находятся в естественном биективном соответствии с плотностями. С другой стороны, каждый базис (1) алгебры Ли $\mathfrak{g}$, являясь в каждой точке $p \in \mathcal{G}$ базисом пространства $\mathsf{T}_p\mathcal{G}$, задает некоторую ориентацию многообразия $\mathcal{G}$. Пусть ρ_0 — плотность на $\mathcal{G}$, отвечающая форме (8) в этой ориентации. Эта плотность зависит только от базиса (1).

Задача 4. Покажите, что:

а *плотность ρ_0 положительна* (является плотностью объема; см. лекцию III.24);

б *для любого другого базиса алгебры Ли $\mathfrak{g}$ отвечающая ему плотность имеет вид $c\rho_0$, где $c > 0$, $c \in \mathbb{R}$.*

Таким образом, мы видим, что *на любой группе Ли имеется единственная — с точностью до положительного числового множителя — левоинвариантная плотность объема.* $\square$

Эта плотность объема называется *мерой Хаара* на группе $\mathcal{G}$.

Зафиксировав некоторую меру Хаара ρ_0, мы можем для любой финитной, локально ограниченной и почти непрерывной функции f на группе $\mathcal{G}$ рассмотреть интеграл

$$\int f\rho_0$$

(см. лекцию III.24). Этот интеграл называется *интегралом Хаара* функции f и по традиции обозначается символом

$$\int f(p)\,dp \qquad \left(\text{или} \int\limits_{\mathcal{G}} f(p)\,dp\right). \tag{9}$$

Подчеркнем, что подынтегральное выражение $f(p)\,dp$ здесь никакого отдельного смысла не имеет. Впрочем, допуская определенную вольность, иногда удобно считать его обозначением для плотности $f\rho_0$ (и, в соответствии с этим, употреблять символ dp для обозначения меры Хаара ρ_0).

Задача 5. Докажите, что *для любого элемента* $a \in \mathcal{G}$ *интегралы Хаара функций* $f \circ L_a$ *и* f *совпадают*, т. е. в обозначении (9)

$$\int f(ap)\,dp = \int f(p)\,dp. \tag{10}$$

[Указание. $L_a^*(f\omega_0) = (f \circ L_a)L_a^*\omega_0$.]

Свойство (10) называется *левоинвариантностью* меры (интеграла) Хаара.

В каждой карте $(U,h) = (U,x^1,\ldots,x^n)$ мера Хаара ρ_0 задается некоторой функцией $\rho_0 = \rho_0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x^1,\ldots,x^n)$, на открытом множестве $h(U) \subset \mathbb{R}^n$. Эта функция называется *ядром Хаара*. Если $U = \mathcal{G}$ (или хотя бы $\overline{U} = \mathcal{G}$), то для любой функции f интеграл Хаара (9) равен интегралу Римана

$$\int\limits_{h(U)} f(\boldsymbol{x})\rho_0(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \qquad d\boldsymbol{x} = dx^1 \ldots dx^n. \tag{11}$$

В общем случае интеграл (9) является суммой интегралов вида (11).

Задача 6. Покажите, что на группе $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ ядро Хаара выражается (в координатах x_j^i) формулой

$$\rho_0(X) = \frac{\mathrm{const}}{|\det X|^n}, \qquad X = \|x_j^i\|.$$

Ядро Хаара, записанное в канонических координатах, может рассматриваться как функция на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Оказывается, что *для этой функции имеет место формула*

$$\rho_0(X) = \mathrm{const}\cdot\det[f_0(-\operatorname{ad}X)], \qquad X \in \mathfrak{g}, \tag{12}$$

где

$$f_0(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}. \tag{13}$$

Доказательство основывается на формуле

$$\exp(X+tY)\exp(-X) = \exp(tf_0(\operatorname{ad}X)Y) + o(t), \quad X,Y \in \mathfrak{g}. \tag{14}$$

Задача 7. Выведите из формулы (14) формулу (12).

Задача 8. Докажите формулу (14) для матричных групп Ли (когда $\exp X = e^X$).

Так как правые и левые сдвиги перестановочны, то для любого элемента $a \in \mathcal{G}$ форма $R_a^*\omega_0$ также левоинвариантна и, значит, имеет вид $\Delta(a)\,\omega_0$, где $\Delta(a)$ — некоторая отличная от нуля константа, зависящая только от элемента a (но не от выбора формы ω_0).

Задача 9. Покажите, что *константа* $\Delta(a)$ *гладко зависит от* a, т. е. что соответствие $a \mapsto \Delta(a)$ является гладкой функцией на группе Ли $\mathcal{G}$.

Будучи гладкой, функция Δ непрерывна и, значит, не обращаясь нигде в нуль, сохраняет на каждой компоненте группы $\mathcal{G}$ постоянный знак. Поскольку $\Delta(e) = 1$, этим доказано, что *на связной группе Ли* $\mathcal{G}$ *функция* Δ *положительна.* □

Функция Δ называется *модулем* группы Ли $\mathcal{G}$. Так как $R_bR_a = R_{ab}$, то ввиду коммутативности умножения вещественных чисел

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\,\Delta(b) \tag{15}$$

для любых элементов $a, b \in \mathcal{G}$ (*модуль является гомоморфизмом группы* $\mathcal{G}$ *в мультипликативную группу отличных от нуля вещественных чисел*).

Задача 10. Докажите, что

$$\Delta(\exp X) = e^{\operatorname{Tr}\operatorname{ad}X}$$

для любого $X \in \mathfrak{g}$. [Указание. Воспользуйтесь формулой (12).]

Унимодулярные группы Ли Группа Ли $\mathcal{G}$ называется *унимодулярной*, если каждая левоинвариантная форма ω максимальной степени на группе $\mathcal{G}$ правоинвариантна ($R_a^*\omega = \omega$ для любого $a \in \mathcal{G}$), т. е. если модуль Δ этой группы тождественно равен единице.

Из утверждения задачи 10 следует, что *связная группа Ли* $\mathcal{G}$ *тогда и только тогда унимодулярна, когда*

$$\operatorname{Tr}\operatorname{ad}X = 0 \tag{16}$$

для любого $X \in \mathfrak{g}$. [Гомоморфизм Δ, тождественно равный единице на окрестности точки $e \in \mathcal{G}$, равен единице всюду.]

Задача 11. Покажите, что *на унимодулярной группе* $\mathcal{G}$ *мера Хаара правоинвариантна*, т. е.

$$\int f(pa)\,dp = \int f(p)\,dp \tag{17}$$

для любого элемента $a \in \mathcal{G}$ и любой функции f.

Задача 12. Покажите, что *группа* $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ *унимодулярна*. [Указание. См. задачу 6.]

Задача 13. Выведите унимодулярность группы $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ (или, точнее, ее компоненты единицы) из критерия (16). [Указание. Для любой матрицы $X = \|x^i_j\| = x^i_j E^j_i$ из $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$(\mathrm{ad}\, X)E^j_i = x^p_i E^j_p - x^j_p E^p_i, \qquad i,j = 1,\dots,n, \tag{18}$$

где E^j_i — матричные единицы (с элементами $(E^j_i)^q_p = \delta^j_p \delta^q_i$).]

Если группа Ли $\mathcal{G}$ компактна, то имеет смысл интеграл

$$\int \Delta(p)\,dp = \int \Delta(ap)\,dp = \Delta(a)\int \Delta(p)\,dp. \tag{19}$$

С другой стороны, если группа $\mathcal{G}$ связна, то

$$\int \Delta(p)\,dp \neq 0$$

(ибо $\Delta(p) > 0$). Поэтому в этом случае равенство (19) возможно только при $\Delta(a) = 1$. Это доказывает, что каждая *компактная связная группа Ли $\mathcal{G}$ унимодулярна.* □

Для любой меры Хаара dp на компактной группе $\mathcal{G}$ имеет смысл также интеграл

$$\int_{\mathcal{G}} dp. \tag{20}$$

Мера Хаара dp называется *нормированной*, если этот интеграл равен единице. Чтобы получить нормированную меру, достаточно произвольную меру dp разделить на интеграл (20).

Нормированная мера Хаара, конечно, единственна.

Инвариантные римановы метрики

Предложение 2. *На любой компактной группе Ли $\mathcal{G}$ существует инвариантная риманова метрика.*

Доказательство. Пусть $g^{(0)}$ — произвольная левоинвариантная риманова метрика на $\mathcal{G}$ (евклидова метрика на $\mathfrak{g}$). Для каждой точки $b \in \mathcal{G}$ мы определим на пространстве $\mathsf{T}_b\mathcal{G}$ положительно определенный симметрический билинейный тензор g_b типа $(2,0)$ (скалярное произведение), положив для любых векторов $A, B \in \mathsf{T}_b\mathcal{G}$

$$g_b(A, B) = \int g^{(0)}_{bp}((dR_p)_b A, (dR_p)_b B)\, dp,$$

где dp — произвольная мера Хаара на $\mathcal{G}$. Ясно, что тензор g_b гладко зависит от b и, значит, тензорное поле $b \mapsto g_b$ является римановой метрикой на $\mathcal{G}$.

Для любых элементов $a, b \in \mathcal{G}$ и любых векторов $A, B \in \in \mathsf{T}_b\mathcal{G}$ мы имеем

$$\begin{aligned}
(L^*_a g)_b(A, B) &= g_{ab}((dL_a)_b A, (dL_a)_b B) = \\
&= \int g^{(0)}_{(ab)p}((dR_p)_{ab}(dL_a)_b A, (dR_p)_{ab}(dL_a)_b B)\, dp = \\
&= \int g^{(0)}_{a(bp)}((dL_a)_{bp}(dR_p)_b A, (dL_a)_{bp}(dR_p)_b B)\, dp = \\
&= \int (L^*_a g^{(0)})_{bp}((dR_p)_b A, (dR_p)_b B)\, dp = \\
&= \int g^{(0)}_{bp}((dR_p)_b A, (dR_p)_b B)\, dp = g_b(A, B).
\end{aligned}$$

(Напомним, что по условию $L^*_a g^{(0)} = g^{(0)}$.) Это означает, что $L^*_a g = g$, т. е. что метрика g левоинвариантна.

С другой стороны, так как мера dp левоинвариантна, то

$$\begin{aligned}
(R^*_a g)_b(A, B) &= g_{ba}((dR_a)_b A, (dR_a)_b B) = \\
&= \int g^{(0)}_{(ba)p}((dR_p)_{ba}(dR_a)_b A, (dR_p)_{ba}(dR_a)_b B)\, dp = \\
&= \int g^{(0)}_{b(ap)}((dR_{ap})_b A, (dR_{ap})_b B)\, dp = \\
&= \int g^{(0)}_{bp}((dR_p)_b A, (dR_p)_b B)\, dp = g_b(A, B),
\end{aligned}$$

и, значит, метрика g правоинвариантна. □

[Контрольный вопрос: Где в этом доказательстве использована компактность группы $\mathcal{G}$?]

Использованный в доказательстве предложения 2 прием называется *усреднением по группе*. Впервые он был предложен А. Гурвицем.

Группы Ли с компактной алгеброй Ли

Предложение 2 мотивирует следующее определение.

***Определение* 2.** Алгебра Ли, на которой существует инвариантная евклидова метрика, называется *компактной алгеброй Ли.*

Иначе говоря, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ компактна, если на $\mathfrak{g}$ существует положительно определенное скалярное произведение, по отношению к которому все операторы

$$\operatorname{ad} X\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad Y \mapsto [X, Y], \qquad Y \in \mathfrak{g},$$

кососимметричны.

Согласно предложению 2 *алгебра Ли компактной группы Ли компактна.*

Обратное утверждение имеет следующий вид.

Предложение 3. *Для любой компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует компактная группа Ли $\mathcal{G}$, алгебра Ли которой изоморфна алгебре $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру Ли $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$. Относительно инвариантной евклидовой метрики на $\mathfrak{g}$ каждый элемент $\operatorname{ad} X$ этой алгебры является кососимметрическим оператором на евклидовом пространстве $\mathfrak{g}$, и потому в произвольном ортонормированном базисе имеет кососимметрическую матрицу $a_{ij}(X)$. Но тогда

$$\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} X)^2 = \sum_{i,j} a_{ij}(X) a_{ji}(X) = -\sum_{i,j} a_{ij}(X)^2$$

и, значит, $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} X)^2 \leqslant 0$, причем равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{ad} X = 0$, т. е. когда X принадлежит центру $\mathfrak{z}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Поэтому если $\mathfrak{z} = 0$, то $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} X)^2 < 0$ при $X \neq 0$, т. е. *форма Киллинга* Kil *компактной алгебры Ли без центра отрицательно определена.*

В частности, эта форма невырождена, и, значит, *компактная алгебра Ли без центра полупроста.*

Кроме того, мы видим, что при $\mathfrak{z} = 0$ форма $-\mathrm{Kil}$ задает на $\mathfrak{g}$ инвариантную евклидову метрику. Таким образом, без ограничения общности мы можем в этом случае считать, что метрикой g на $\mathfrak{g}$ является метрика $-\mathrm{Kil}$ и, следовательно, что все автоморфизмы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ являются ее ортогональными преобразованиями, т. е. что группа $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ представляет собой подгруппу группы всех ортогональных преобразований $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ евклидова линейного пространства $\mathfrak{g}$. Так как последняя группа компактна, а группа $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ замкнута в ней (докажите!), то, следовательно, *при $\mathfrak{z} = 0$ группа $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ компактна.*

С другой стороны, так как в рассматриваемом случае алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то группа $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ замкнута в группе $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ (является ее компонентой единицы). Поэтому эта группа также компактна. Поскольку при $\mathfrak{z} = 0$ алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна алгебре Ли $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ группы $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$, это доказывает предложение 3 при $\mathfrak{z} = 0$.

Пусть теперь центр $\mathfrak{z}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ произволен. Рассмотрим его ортогональное дополнение $\mathfrak{z}^{\perp}$. Так как линеал $\mathfrak{g}$ евклидов, то

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{z}^{\perp}.$$

Кроме того, $\mathfrak{z}^{\perp}$ является идеалом, не имеющим центра и являющимся компактной алгеброй Ли относительно ограничения на $\mathfrak{z}^{\perp}$ инвариантной метрики на $\mathfrak{g}$. Следовательно, по доказанному, идеал $\mathfrak{z}^{\perp}$ является алгеброй Ли некоторой компактной группы Ли $\mathcal{H} = \operatorname{Int}\mathfrak{z}^{\perp}$.

Что же касается центра $\mathfrak{z}$, то он, очевидно, является алгеброй Ли тора

$$\mathbb{T}^k = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1}_{k},$$

где $k = \dim\mathfrak{z}$.

Задача 14. Покажите, что *алгебра Ли $\mathfrak{g}$, являющаяся прямой суммой идеалов, изоморфна алгебре Ли прямого произведения группы Ли, алгебрами Ли которых служат эти идеалы:*

$$\textit{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \textit{ где } \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{l}\mathcal{G}_1, \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{l}\mathcal{G}_2, \textit{ то } \mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2).$$

Следовательно, в частности, рассматриваемая нами алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна алгебре Ли прямого произведения $\mathbb{T}^k \times \mathcal{H}$.

Для завершения доказательства остается заметить, что в силу предложения 3 лекции III.8 группа $\mathbb{T}^k \times \mathcal{H}$ компактна. □

По ходу дела мы также доказали, что для полупростой и компактной алгебры Ли форма Киллинга отрицательно определена. Поскольку обратное утверждение очевидным образом верно, мы видим, что справедливо следующее предложение.

Предложение 4. *Алгебра Ли тогда и только тогда полупроста и компактна, когда ее форма Киллинга отрицательно определена.* $\square$

Согласно этому предложению на любой группе Ли $\mathcal{G}$ с полупростой и компактной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ формула $g = -\mathrm{Kil}$ определяет на этой группе инвариантную риманову метрику. Так как эта метрика индуцирует на $\mathcal{G}$ симметрическую связность Картана, то (см. формулу (11) лекции 6) для ее тензора кривизны R имеет место тождество

$$R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z], \qquad X,Y,Z \in \mathfrak{g}.$$

Но тогда

$$\mathrm{Tr}\,(Z \mapsto R(Z,X)Y) = \mathrm{Tr}\,(Z \mapsto -\frac{1}{4}[[Z,X],Y]) =$$
$$= \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}\,\mathrm{ad}\,Y \circ \mathrm{ad}\,X\right) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}\,X \circ \mathrm{ad}\,Y\right) = \frac{1}{4}\,g(X,Y)$$

для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ и, значит, $\mathrm{Ric} = g/4$ (на $\mathfrak{g}$, а потому и на $a\mathcal{G}$), т. е. группа $\mathcal{G}$ является римановым пространством Эйнштейна положительной скалярной кривизны $n/4$, где $n = \dim \mathcal{G}$.

Для удобства ссылок сформулируем этот результат в виде отдельного предложения.

Предложение 5. *Относительно метрики* $-\mathrm{Kil}$ *каждая группа Ли с полупростой и компактной алгеброй Ли является пространством Эйнштейна постоянной положительной скалярной кривизны.* $\square$

Теорема Вейля

Конечно, группа Ли с компактной алгеброй Ли может и не быть компактной — примером является группа по сложению $\mathbb{R}^n$ с абелевой алгеброй Ли. Однако, в определенном отношении этот пример являет нам единственное исключение.

Теорема 1 (теорема Вейля). *Каждая группа Ли с полупростой и компактной алгеброй Ли компактна. Ее фундаментальная группа $\pi_1 \mathcal{G}$ конечна.*

Следствие 1. *Каждая полупростая компактная группа Ли является факторгруппой $\mathcal{G}/\Gamma$ компактной односвязной группы Ли $\mathcal{G}$ по некоторой конечной абелевой инвариантной подгруппе Γ ее центра.* □

Следствие 2. *Каждая односвязная группа Ли с компактной алгеброй Ли является произведением $\mathbb{R}^n \times \mathcal{G}$ группы по сложению $\mathbb{R}^n$ и компактной односвязной полупростой группы Ли $\mathcal{G}$.* □

Произвольная же группа Ли с компактной алгеброй Ли локально изоморфна группе $\mathbb{R}^n \times \mathcal{G}$, т. е. является факторгруппой $(\mathbb{R}^n \times \mathcal{G})/\Gamma$ произведения $\mathbb{R}^n \times \mathcal{G}$ по некоторой дискретной абелевой инвариантной подгруппе Γ его центра.

См. задачи 9 и 10 лекции IV.15.

Таким образом, подобно тому как описание — с точностью до локального изоморфизма — всех связных полупростых групп Ли сводится к описанию всех полупростых алгебр Ли и, значит, — см. разложение (7) лекции 25 — к описанию всех простых алгебр Ли, описание всех связных групп Ли с компактной алгеброй Ли сводится к описанию компактных простых алгебр Ли.

Теорему Вейля мы докажем в лекции 28, после того как изложим необходимые для этого сведения из общей теории римановых пространств.