# ЛЕКЦИЯ 27

Сопряженные точки. — Вторая вариация длины. — Формула для второй вариации. — Редукция задачи. — Минимальные поля и поля Якоби. — Вариация Якоби. — Поля Якоби и сопряженные точки. — Свойства полей Якоби. — Минимальность нормальных полей Якоби. — Доказательство теоремы Якоби.

В этой лекции, возвращаясь к общей теории римановых пространств, мы на примере геодезических рассмотрим вопрос о необходимых условиях того, что экстремаль является кривой минимума (геодезическая — кратчайшей). Этот вопрос непосредственно примыкает к материалу лекции 12, но лишь теперь у нас имеется все необходимое, чтобы его успешно рассмотреть. Оказывается, что ответ на него тесно связан с критическими точками (или, точнее, с критическими значениями) экспоненциального отображения.

**Сопряженные точки**

Пусть $\mathcal{X}$ — риманово пространство, $p_0$ — его произвольная точка и $\gamma\colon t \mapsto \exp_{p_0} tA$, $A = \dot\gamma(0)$, — произвольная геодезическая, проходящая при $t = 0$ через точку $p_0$.

***Определение* 1.** Говорят, что точка $q = \exp_{p_0} t_0 A$, $t_0 > 0$, геодезической $\gamma$ *сопряжена точке* $p_0$ (или *с точкой* $p_0$) *вдоль геодезической* $\gamma$, если она является критическим значением экспоненциального отображения, т. е. если вектор $t_0 A$ служит критической точкой этого отображения (линейное отображение

$$(d\exp_{p_0})_{t_0 A}\colon \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \to \mathsf{T}_q\mathcal{X}$$

имеет нетривиальное ядро; как всегда, мы отождествляем $\mathsf{T}_{t_0 A}(\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X})$ с $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$).

Заметим, что это определение имеет смысл в произвольном пространстве аффинной связности $\mathcal{X}$.

Так как множество всех критических точек экспоненциального отображения очевидным образом замкнуто (и не содержит вектора 0), то — в случае, когда множество сопряженных точек непусто — среди всех сопряженных точек на геодезической $\gamma$ существует точка с наименьшим $t_0 > 0$. Она называется *первой сопряженной точкой.*

Основной целью этой лекции является доказательство следующей теоремы, известной как теорема Якоби.

**Теорема 1.** *Если геодезическая $\gamma$: $I \to \mathcal{X}$, $\gamma(0) = p_0$, является кратчайшей, то ни одна ее точка — за возможным исключением концевой точки $p_1 = \gamma(1)$ — не сопряжена с точкой $p_0$.*

Для доказательства этой теоремы нам нужно связать сопряженные точки с вариациями геодезических.

**Вторая вариация длины** В соответствии с общими определениями лекции 11 *вариацией* кривой $\gamma$: $I \to \mathcal{X}$ называется такое гладкое отображение

$$\varphi\colon [0,1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{X}, \tag{1}$$

что $\varphi(t,0) = \gamma(t)$ для любого $t \in I$. Вариация $\varphi$ естественным образом отождествляется с семейством $\{\gamma_\tau\}$ кривых

$$\gamma_\tau\colon t \mapsto \varphi(t,\tau), \qquad -\varepsilon < \tau < \varepsilon, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{2}$$

Вариация $\varphi$ называется *вариацией с закрепленными концами,* если $\varphi(0,\tau) = \gamma(0)$ и $\varphi(1,\tau) = \gamma(1)$ для любого $\tau$, $|\tau| < \varepsilon$ (все кривые (2) начинаются и кончаются в одних и тех же точках).

Нам будет удобно несколько расширить понятие вариации и допускать к рассмотрению *кусочно гладкие вариации.* По определению каждая такая вариация является непрерывным отображением вида (1) (удовлетворяющим условию $\varphi(t,0) = \gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$), для которого

а существует такое разбиение

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1$$

отрезка $I = [0,1]$ (свое для каждой вариации $\varphi$), что на каждом прямоугольнике $[t_{i-1}, t_i] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, $i = 1, \ldots, r$, отображение $\varphi$ гладко;

б векторное поле $X$: $t \mapsto X(t)$, определенное формулой

$$X(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(t,0), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{3}$$

является кусочно гладким непрерывным векторным полем на кривой $\gamma$ (и, значит, во всех точках кривой $\gamma$ кроме точек

$\gamma(t_i)$, $i = 0,\ldots,r$, определена его ковариантная производная $\dfrac{\nabla X}{dt}$, являющаяся вне этих точек гладким векторным полем на $\gamma$).

Заметим, что для вариации с закрепленными концами поле $X$ равно нулю при $t = 0$ и $t = 1$.

Для кусочно гладкой вариации $\varphi$ каждая кривая $\gamma_\tau$ кусочна гладка, и потому определена ее длина

$$s_\varphi(\tau) = \int_0^1 |\dot\gamma_\tau(t)|\,dt, \qquad -\varepsilon < \tau < \varepsilon.$$

При этом ввиду условия б функция $s = s_\varphi(\tau)$ дифференцируема в точке $\tau = 0$ интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

С другой стороны, если $\varphi$ является вариацией с закрепленными концами, то в случае, когда кривая $\gamma$ является кратчайшей, функция $s = s_\varphi(\tau)$ имеет в точке $\tau = 0$ минимум, а в случае, когда кривая $\gamma$ является геодезической, в точке $\tau = 0$ имеет место равенство $s'_\varphi(0) = 0$ (штрихом мы обозначаем дифференцирование по $\tau$). Поскольку, как известно из элементарного курса анализа, при $s'_\varphi(0) = 0$ и $s''_\varphi(0) < 0$ точка $\tau = 0$ не может быть точкой минимума функции $s = s_\varphi(\tau)$ (она будет точкой локального максимума), мы видим, следовательно, что для доказательства теоремы 1 нам достаточно доказать следующее предложение (часто также называемое теоремой Якоби).

***Предложение* 1**. *Если для некоторого $t_0$, $0 < t_0 < 1$, точка $q = \gamma(t_0)$ сопряжена с точкой $p_0 = \gamma(0)$ вдоль геодезической $\gamma$: $I \to \mathcal{X}$, то существует такая кусочно гладкая вариация $\varphi$ кривой $\gamma$ с закрепленными концами, что $s''_\varphi(0) < 0$.*

Число $s''_\varphi(0)$ называется *второй вариацией длины*.

**Формула для второй вариации**

Чтобы доказать это предложение, мы найдем явную формулу для числа $s''_\varphi(0)$.

Так как по правилам дифференцирования интегралов по параметру

$$s''_\varphi(0) = \int_0^1 (|\dot\gamma_\tau(t)|'')|_{\tau=0}\,dt,$$

то для этого мы прежде всего должны вычислить при $\tau = 0$ вторую производную $|\dot\gamma_\tau(t)|'' = \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}|\dot\gamma_\tau(t)|$ (существующую вне конечного числа точек; в дальнейшем эти точки мы игнорируем).

По определению,

$$|\dot\gamma_\tau(t)|^2 = (\dot\gamma_\tau(t), \dot\gamma_\tau(t)) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

(для упрощения формул мы здесь и в дальнейшем, как правило, опускаем у функций аргументы), и, значит, по правилу дифференцирования скалярного произведения векторных полей (см. формулу (4) лекции 11)

$$|\dot\gamma_\tau(t)|' = \frac{1}{|\dot\gamma_\tau(t)|}\left(\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

и, далее,

$$|\dot\gamma_\tau(t)|'' = -\frac{1}{|\dot\gamma_\tau(t)|^3}\left(\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{|\dot\gamma_\tau(t)|}\left[\left(\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \left(\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right].$$

Так как (см. формулу (17) лекции 2)

$$\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau},$$

где $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}$ — поле касательных векторов кривой $\tau \mapsto \gamma_\tau(t)$, $t = \mathrm{const}$ (мы по-прежиему опускаем аргументы), и (см. задачу 5 лекции 2)

$$\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + R_{\varphi(t,\tau)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau},$$

то (см. формулу (3))

$$\left(\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\Bigg|_{\tau=0} = \frac{\nabla X}{dt}$$

и

$$\left(\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\Bigg|_{\tau=0} = \frac{\nabla}{dt}\left(\left(\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)\Bigg|_{\tau=0}\right) + R(X, \dot\gamma)X,$$

где для упрощения формул мы вместо $R_{\gamma(t)}$ пишем просто $R$. (Здесь $\dot\gamma = \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\tau=0}$ — поле $t \mapsto \dot\gamma(t)$ касательных векторов на кривой $\gamma$.)

Кроме того, так как (см. формулу (4) лекции 11) для любого поля $Y$ на кривой $\gamma$ имеет место равенство

$$\left(\frac{\nabla Y}{dt}, \dot\gamma\right) = \frac{d}{dt}(Y, \dot\gamma)$$

(напомним, что поле $\dot\gamma$ ковариантно постоянно), то

$$\left(\frac{\nabla}{dt}\left(\left.\left(\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)\right|_{\tau=0}\right), \dot\gamma\right) = \frac{d}{dt}\left(\left.\left(\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)\right|_{\tau=0}, \dot\gamma\right).$$

Предположив для упрощения формул, что геодезическая $\gamma$ отнесена к натуральному параметру, т. е. что $|\dot\gamma(t)| = 1$, мы для $(|\dot\gamma_\tau(t)|'')|_{\tau=0}$ немедленно получим отсюда формулу

$$(|\dot\gamma_\tau(t)|'')|_{\tau=0} = -\left(\frac{\nabla X}{dt}, \dot\gamma\right)^2 + \frac{d}{dt}\left(\left.\left(\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)\right|_{\tau=0}, \dot\gamma\right) - \\ - R(X, \dot\gamma, X, \dot\gamma) + \left(\frac{\nabla X}{dt}, \frac{\nabla X}{dt}\right)$$

(напомним — см. формулу (2) лекции 15, — что

$$(R(X, \dot\gamma)X, \dot\gamma) = R(\dot\gamma, X, X, \dot\gamma) = -R(X, \dot\gamma, X, \dot\gamma).$$

Поскольку

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\left.\left(\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)\right|_{\tau=0}, \dot\gamma\right) dt = \left.\left(\left.\left(\frac{\nabla}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)\right|_{\tau=0}, \dot\gamma\right)\right|_{t=0}^{t=1} = 0$$

(ибо ввиду закрепленности вариации $\varphi$ в концах $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|_{t=0} = 0$ и $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|_{t=1} = 0$ тождественно по $\tau$), этим доказано, что

$$s''_\varphi(0) = \int_0^1 \left[\left(\frac{\nabla X}{dt}, \frac{\nabla X}{dt}\right) - R(X, \dot\gamma, X, \dot\gamma) - \left(\frac{\nabla X}{dt}, \dot\gamma\right)^2\right] dt. \quad (4)$$

Таким образом, для доказательства предложения 1 (и вместе с ним теоремы 1) нам достаточно найти вариацию $\varphi$ геодезической $\gamma$, для которой правая часть формулы (4) отрицательна.

**Редукция задачи** Здесь в первую очередь обращает на себя внимание то обстоятельство, что число $s''_\varphi(0)$ зависит только от векторного поля $X$ (и кривой $\gamma$). При этом легко видеть, что для любого кусочно гладкого векторного поля $X$ на кривой $\gamma$, равного нулю при $t = 0$ и $t = 1$, существует вариация $\varphi$ с закрепленными концами, индуцирующая по формуле (3) это поле. (На каждом отрезке кривой $\gamma$, содержащемся в одной карте и не содержащем точек излома поля $X$, вариация $\varphi$ строится очевидным образом; эти частичные вариации без труда склеиваются в единую кусочно гладкую вариацию всей кривой.) Поэтому предложение 1 будет доказано, если мы построим на геодезической $\gamma$ кусочно гладкое поле $X$, равное нулю при $t = 0$ и $t = 1$, для которого интеграл в правой части формулы (4) отрицателен.

Поле $X$ называется *полем нормальных векторов* (или, короче, *нормальным полем*), если

$$(X(t), \dot\gamma(t)) = 0 \qquad \text{для любого } t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Так как $\left(\frac{\nabla X}{dt}, \dot\gamma\right) = \frac{d}{dt}(X, \dot\gamma)$, то для такого поля интеграл из формулы (4) упрощается и принимает вид

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{\nabla X}{dt}, \frac{\nabla X}{dt}\right) - R(X, \dot\gamma, X, \dot\gamma)\right] dt. \tag{5}$$

Положив для любых $a$ и $b$, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$,

$$I_a^b(X) = \int_a^b \left[\left(\frac{\nabla X}{dt}, \frac{\nabla X}{dt}\right) - R(X, \dot\gamma, X, \dot\gamma)\right] dt, \tag{6}$$

мы видим, что нами доказано следующее предложение.

***Предложение 2.*** *Пусть на геодезической $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ существует такое кусочно гладкое векторное поле $X$, что*

**а** *поле $X$ равно нулю при $t=0$ и $t=1$:*

$$X(0)=0, \quad X(1)=0;$$

**б** *поле $X$ нормально;*

**в** *имеет место неравенство*

$$I_0^1(X)<0.$$

*Тогда существует такая вариация $\varphi$ геодезической $\gamma$, что $s''_\varphi(0)<0$ (и, значит, геодезическая $\gamma$ не является кратчайшей).* □

**Минимальные поля и поля Якоби**

***Определение 2.*** Поле $X^{(0)}$ на отрезке $\gamma|_{[a,b]}$ геодезической $\gamma$, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, называется *минимальным полем*, если оно доставляет строгий минимум интегралу (6) в классе всех кусочно гладких полей $X$ на кривой $\gamma|_{[a,b]}$, для которых

$$X(a)=X^{(0)}(a), \quad X(b)=X^{(0)}(b),$$

т. е. если $I_a^b(X) \geqslant I_a^b(X^{(0)})$ для любого такого поля $X$, причем равенство имеет место только при $X = X^{(0)}$.

Выбрав в пространстве $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ ортонормированный базис

$$A_1, \quad \ldots, \quad A_n \tag{7}$$

и параллельно перенеся его во все точки геодезической $\gamma$, мы получим на $\gamma$ векторные поля

$$X_1, \quad \ldots, \quad X_n, \tag{8}$$

обладающие тем свойством, что любое поле $X$ на $\gamma$ единственным образом представляется в виде их линейной комбинации:

$$X = q^1X_1 + \ldots + q^nX_n = q^iX_i,$$

где $q^1 = q^1(t), \ldots, q^n = q^n(t)$ — функции на $I$ (гладкие, если поле $X$ гладко, и кусочно гладкие, если поле $X$ кусочно гладко). При этом

$$\frac{\nabla X}{dt} = \dot{q}^i X_i, \tag{9}$$

где $\dot{q}^i(t) = \dfrac{dq^i(t)}{dt}$, $i = 1, \ldots, n$, так что поле параллельных векторов характеризуется условием $q^i = \mathrm{const}$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$. Кроме того, так как поля (8) в каждой точке кривой $\gamma$ ортонормированы, то

$$\left(\frac{\nabla X}{dt}, \frac{\nabla X}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}^i(t))^2.$$

Наконец,

$$R(X, \dot{\gamma}, X, \dot{\gamma}) = R_{ij,kl} q^i(t) a^j q^k(t) a^l,$$

где $R_{ij,kl} = R^i_{j,kl}$ и $a^j$ — компоненты тензора $R_{p_0}$ и вектора $A = \dot{\gamma}(0)$ в базисе (7). [Заметим, что $R_{ij,kl} =$ $= (R(X_k, X_l)X_j, X_i)$, $a^i = (\dot{\gamma}, X_i)$ и $\dot{\gamma} = a^i X_i$.]

Это показывает, что интеграл (6) принадлежит к классу интегралов, рассмотренных в лекции 11. Конфигурационным пространством этого интеграла является пространство $\mathbb{R}^n$, а лагранжиан задается формулой

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}^i)^2 - R_{ij,kl} q^i a^j q^k a^l.$$

Поскольку $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 2\dot{q}^i$ и

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = -R_{ij,kl} a^j q^k a^l - R_{kj,il} a^j q^k a^l = -(R_{ij,kl} + R_{kj,il}) a^j a^l q^k,$$

уравнения Эйлера — Лагранжа для интеграла (6) имеют вид

$$2\ddot{q}^i(t) + (R_{ij,kl} + R_{kj,il}) a^j a^l q^k(t) = 0.$$

Но согласно тождеству Бианки (формула (3) лекции 15)

$$R_{ij,kl} + R_{jk,il} + R_{ki,jl} = 0,$$

и потому

$$R_{ij,kl} + R_{kj,il} = 2R_{ij,kl} + R_{ki,jl}.$$

При этом, так как тензор $R_{ki,jl}$ кососимметричен по индексам $j$ и $l$, то

$$R_{ki,jl} a^j a^l = 0.$$

Следовательно, уравнения Эйлера — Лагранжа для интеграла (6) мы можем (после сокращения на 2) записать в следующем виде:

$$\ddot{q}^i(t) + R_{ij,kl}a^j a^l q^k(t) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Умножив эти уравнения на $X_i$ и просуммировав, мы получим уравнение

$$\ddot{q}^i(t)X_i + \sum_{i=1}^{n} R_{ij,kl}a^j a^l q^k(t)X_i = 0,$$

где

$$\ddot{q}^i(t)X_i = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}X$$

(ср. формулу (9)), а

$$\sum_{i=1}^{n} R_{ij,kl}a^j a^l q^k(t)X_i = \sum_{i=1}^{n}(R(X_k, X_l)X_j, X_i)a^j a^l q^k(t)X_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(R(X,\dot{\gamma})\dot{\gamma}, X_i)X_i = R(X,\dot{\gamma})\dot{\gamma}.$$

(Напомним, что базис (8) ортонормирован, и потому $\sum\limits_{i=1}^{n}(Y, X_i)X_i = Y$ для любого поля $Y$ на $\gamma$.)

Это доказывает, что в инварнантной бескоординатной форме уравнения Эйлера — Лагранжа для интеграла (6) имеют вид

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}X + R(X,\dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0. \tag{11}$$

***Определение 3.*** Уравнение (11) называется *уравнением Якоби*, а его гладкие решения — *полями Якоби* (на геодезической $\gamma$).

Таким образом, поля Якоби — это в точности экстремали интеграла $I_0^1$, а их ограничения на $[a, b]$ — экстремали интеграла $I_a^b$ (относительно вариаций постоянных на концах отрезка).

В частности, мы видим, что *любое гладкое минимальное поле является полем Якоби.*

Так как в координатах $q^1, \ldots, q^n$ уравнение (11) записывается в виде системы (10) линейных дифференциальных уравнений второго порядка, то согласно стандартным теоремам теории дифференциальных уравнеиий *все поля Якоби на геодезической $\gamma$ составляют $2n$-мерное линейное пространство $J_\gamma$ и каждое поле Якоби $X$ однозначно определяется его начальным значением $X(0)$ и начальным значением $\frac{\nabla X}{dt}(0)$ его ковариантной производной (являющимися векторами пространства $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$).*

Нас в первую очередь будут интересовать поля Якоби с $X(0) = 0$. Онн составляют $n$-мерное линейное пространство $J_\gamma^{(0)}$, и каждое поле $X \in J_\gamma^{(0)}$ однозначно определяется вектором $\frac{\nabla X}{dt}(0) \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$.

**Вариация Якоби** Гладкая вариация $\varphi = \{\gamma_\tau\}$ геодезической $\gamma$ называется *вариацией Якоби*, если она состоит из геодезических и закреплена в точке $p_0$, т. е. если

$$\gamma_\tau(t) = \exp_{p_0} tA(\tau), \qquad -\varepsilon < \tau < \varepsilon, \tag{12}$$

где $\tau \mapsto A(\tau)$ — некоторая гладкая кривая пространства $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$, проходящая при $\tau = 0$ через точку $A = \dot\gamma(0)$.

Так как для поля $(t, \tau) \mapsto \dot\gamma_\tau(t)$ на поверхности $\varphi$ имеет место равенство

$$\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial \tau}\dot\gamma_\tau(t) - \frac{\nabla}{\partial \tau}\frac{\nabla}{\partial t}\dot\gamma_\tau(t) = R_{\gamma_\tau(t)}\left(\dot\gamma_\tau(t), \frac{\partial\gamma_\tau(t)}{\partial\tau}\right)\dot\gamma_\tau(t)$$

(см. задачу 5 лекцин 2), а

$$\frac{\nabla}{\partial t}\dot\gamma_\tau(t) = 0,$$

то

$$\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial \tau}\dot\gamma_\tau(t) + R_{\gamma_\tau(t)}\left(\frac{\partial\gamma_\tau(t)}{\partial\tau}, \dot\gamma_\tau(t)\right)\dot\gamma_\tau(t) = 0.$$

Полагая $\tau = 0$ (и опуская, как всегда, аргументы), мы немедленно получим отсюда, что индуцированное вариацией (12) поле (3) удовлетворяет уравнению (11), т. е. является полем Якоби.

Так как вариация (12) закреплена при $t = 0$, то $X(0) = 0$, т. е. $X \in J_\gamma^{(0)}$. Кроме того, согласно формуле (17) лекции 2 имеем

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) = \frac{\nabla}{dt}\left(\left.\frac{\partial \gamma_\tau(t)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}\right) = \left.\left(\frac{\nabla}{\partial \tau}\dot{\gamma}_\tau(t)\right)\right|_{\tau=0},$$

где справа $\tau \mapsto \dot{\gamma}_\tau(t)$ рассматривается как векторное поле на кривой $\tau \mapsto \gamma_\tau(t)$, $t = \text{const}$. Поскольку при $t = 0$ последняя кривая постоянна и, значит, ковариантные производные полей на этой кривой совпадают с их обыкновенными производными по $\tau$, а каждый вектор $\dot{\gamma}_\tau(0)$ является не чем иным, как вектором $A(\tau)$, этим доказано, что

$$\frac{\nabla X}{dt}(0) = A'(0). \tag{13}$$

Таким образом, *для любой вариации Якоби* (12) *индуцированное векторное поле* (3) *является полем Якоби из* $J_\gamma^{(0)}$, *для которого имеет место* (13).

В явном виде это поле задается формулой

$$X(t) = (d\exp_{p_0})_{tA}(tA'(0)) \tag{14}$$

(см. формулу (3) лекции IV.14).

Пусть теперь $X'$ — произвольное поле Якоби из $J_\gamma^{(0)}$, и пусть $B = \dfrac{\nabla X'}{dt}(0)$. Рассмотрим вариацию (12) с

$$A(\tau) = A + \tau B$$

и индуцированное этой вариацией поле Якоби $X$. Так как $A'(0) = B$, то $\dfrac{\nabla X}{dt}(0) = \dfrac{\nabla X'}{dt}(0)$ и, значит, $X = X'$. Следовательно, *любое поле Якоби из* $J_\gamma^{(0)}$ *индуцируется некоторой вариацией Якоби* (12).

Итак, поля Якоби из $J_\gamma^{(0)}$ — это в точности векторные поля, индуцированные вариациями Якоби.

**Поля Якоби и сопряженные точки**

Теперь мы уже можем вернуться к сопряженным точкам.

***Предложение 3.*** *Точка* $q = \gamma(t_0)$, $0 < t_0 \leqslant 1$, *геодезической* $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ *тогда и только тогда сопряжена с точкой* $p_0 = \gamma(0)$, *когда на* $\gamma$ *существует такое поле Якоби* $X \neq 0$, *что* $X(0) = 0$ *и* $X(t_0) = 0$.

Доказательство. Достаточно заметить, что для поля (14) равенство $X(t_0) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $A'(0) \in \operatorname{Ker}(d\exp_{p_0})_{t_0 A}$, и что $X \neq 0$ тогда и только тогда, когда $A'(0) \neq 0$. □

**Следствие 1**. *Отношение сопряженности симметрично, т. е. если точка $q$ сопряжена с точкой $p_0$, то точка $p_0$ сопряжена с точкой $q$ (на геодезической $\gamma$, пробегаемой в обратном направлении).*

Доказательство. Уравнение Якоби (11) инвариантно относительно замены $t \mapsto -t$. □

**Следствие 2**. *Пусть $0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant 1$. Если точка $\gamma(t_1)$ не сопряжена с точкой $\gamma(t_0)$ вдоль геодезической $\gamma|_{[t_0,t_1]}$, то для любых векторов $A_0 \in \mathsf{T}_{\gamma(t_0)}\mathcal{X}$, $A_1 \in \mathsf{T}_{\gamma(t_1)}\mathcal{X}$ на геодезической $\gamma|_{[t_0,t_1]}$ существует единственное поле Якоби $X$, для которого*

$$X(t_0) = A_0, \quad X(t_1) = A_1.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $t_0 = 0$ и $t_1 = 1$.

Рассмотрим отображение $\alpha$: $X \mapsto (X(0), X(1))$ линеала $J_\gamma$ в прямую сумму $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \oplus \mathsf{T}_{p_1}\mathcal{X}$, $p_0 = \gamma(t_0)$, $p_1 = \gamma(t_1)$. Согласно предложению 3 это (очевидно, линейное) отображение инъективно. Но линейные пространства $J_\gamma$ и $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \oplus \mathsf{T}_{p_1}\mathcal{X}$ имеют одну и ту же размерность $2n$. Поэтому отображение $\alpha$ биективно. □

**Свойства полей Якоби**

Интересно, что предусмотренное предложением 3 поле Якоби $X$, во-первых, нормально, а во-вторых, интеграл $I_0^{t_0}(X)$ для него равен нулю. Это вытекает из следующего общего предложения.

**Предложение 4**. *Если для поля Якоби $X$ существуют такие точки $t_0, t_1$, $0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant 1$, что*

$$(X(t_0), \dot\gamma(t_0)) = 0, \quad (X(t_1), \dot\gamma(t_1)) = 0,$$

*то* $(X(t),\dot\gamma(t)) = 0$ *тождественно по* $t$ *(поле* $X$ *нормально).*

*Если же* $X(t_0)=0$ *и* $X(t_1)=0$, *то*

$$I_{t_0}^{t_1}(X)=0.$$

Доказательство. Так как для любого поля $X$ на $\gamma$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}(X,\dot\gamma) = \left(\frac{\nabla X}{dt},\dot\gamma\right),$$

(напомним, что $\dfrac{\nabla\dot\gamma}{dt}=0$), то

$$\frac{d^2}{dt^2}(X,\dot\gamma) = \left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}X,\dot\gamma\right).$$

Поэтому если $X$ является полем Якоби, то

$$\frac{d^2}{dt^2}(X,\dot\gamma) = -(R(X,\dot\gamma)\dot\gamma,\dot\gamma) = -R(\dot\gamma,\dot\gamma,X,\dot\gamma)$$

и, в силу кососимметричности тензора $R$ по первым двум индексам, полученное выражение равно нулю. Это доказывает, что для любого поля Якоби $X\in J_\gamma$

$$(X(t),\dot\gamma(t)) = at+b, \qquad \text{где} \quad a,b\in\mathbb{R}. \tag{15}$$

Если теперь $(X(t_0),\dot\gamma(t_0))=0$ и $(X(t_1),\dot\gamma(t_1))=0$, то

$$at_0+b=0, \quad at_1+b=0,$$

что для $t_0<t_1$ возможно только при $a=b=0$. Следовательно, $(X,\dot\gamma)=0$.

Далее, так как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\nabla X}{dt},X\right) = \left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla X}{dt},X\right)+\left(\frac{\nabla X}{dt},\frac{\nabla X}{dt}\right)$$

и $(R(X,\dot\gamma)\dot\gamma,X)=R(X,\dot\gamma,X,\dot\gamma)$, то для любого поля Якоби $X$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\nabla X}{dt},X\right) = \left(\frac{\nabla X}{dt},\frac{\nabla X}{dt}\right) - R(X,\dot\gamma,X,\dot\gamma)$$

и, значит,

$$I_{t_0}^{t_1}(X) = \left(\frac{\nabla X}{dt}, X\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}. \tag{16}$$

Поэтому если $X(t_0) = 0$ и $X(t_1) = 0$, то $I_{t_0}^{t_1}(X) = 0$. □

Так как $\frac{\nabla}{dt}\dot\gamma = 0$ и $R(\dot\gamma, \dot\gamma) = 0$, то *поле* $\dot\gamma$*:* $t \mapsto \dot\gamma(t)$ *является полем Якоби.* По аналогичным соображениям *полем Якоби является и поле* $X_0$*:* $t \mapsto t\dot\gamma(t)$.

Поле $\dot\gamma$ нигде не обращается в нуль, а поле $X_0$ обращается в нуль только в точке $p_0$ (при $t = 0$).

**Предложение 5.** *Любое поле Якоби* $X \in J_\gamma$ *единственным образом представляется в виде*

$$X = aX_0 + b\dot\gamma + X^{(0)},$$

*где* $X^{(0)}$ *— нормальное поле Якоби.*

*При этом* $X \in J_\gamma^{(0)}$ *тогда и только тогда, когда* $b = 0$ *и* $X^{(0)} \in J_\gamma^{(0)}$.

Доказательство. Без ограничения общности мы можем предполагать, что параметр на геодезической $\gamma$ натурален ($|\dot\gamma| = 1$). Тогда для каждого поля Якоби $X$ имеет место равенство

$$(X - aX_0 - b\dot\gamma, \dot\gamma) = 0,$$

где $a$ и $b$ — числа из формулы (15), означающее, что поле $X^{(0)} = X - aX_0 - b\dot\gamma$ нормально. □

**Следствие 1.** *Подпространство* $J_\gamma^{(00)}$ *пространства* $J_\gamma^{(0)}$*, состоящее из нормальных полей Якоби, имеет размерность* $n - 1$. □

**Минимальность нормальных полей Якоби**

Подобно тому как геодезические локально являются кратчайшими, поля Якоби — по крайней мере, нормальные — локально (на достаточно малых отрезках кривой $\gamma$) минимальны. Точное утверждение имеет следующий вид.

**Предложение 6.** *Если на геодезической* $\gamma|_{[a,b]}$*,* $0 \leqslant a < b \leqslant 1$*, нет точек, сопряженных с точкой* $\gamma(a)$*, то каждое нормальное поле Якоби* $X^{(0)}$ *на* $\gamma$*, равное* *нулю при $t = a$, минимально на $\gamma|_{[a,b]}$ (его ограничение на $[a,b]$ является минимальным полем на $\gamma|_{[a,b]}$).*

Доказательству этого предложения мы предпошлем некоторые вспомогательные рассмотрения.

Пусть

$$X_1, \quad \ldots, \quad X_{n-1} \tag{17}$$

— произвольный базис $(n-1)$-мерного линейного пространства $J_\gamma^{(00)}$. Так как на геодезической нет сопряженных точек и, значит, ни одно поле из $J_\gamma^{(00)}$ при $t > 0$ не обращается в нуль, то при любом $t > 0$ все поля (1) линейно независимы. Поэтому каждое нормальное кусочно гладкое поле $X$ на $\gamma$, равное нулю при $t = 0$, единственным образом представляется в виде

$$X = f^i X_i, \tag{18}$$

где $f^i$, $i = 1, \ldots, n-1$, — некоторые кусочно гладкие функции на отрезке $I = [0, 1]$.

**Лемма 1**. *Имеет место формула*

$$I_0^1(X) = \int_0^1 |\dot f^i X_i|^2 dt + b^i b^j \left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right)\bigg|_{t=1}, \tag{19}$$

*где $b^i = f^i(1)$.*

Доказательство. Имеем

$$\left(\frac{\nabla X}{dt}, \frac{\nabla X}{dt}\right) = \left(\dot f^i X_i + f^i \frac{\nabla X_i}{dt}, \dot f^i X_i + f^i \frac{\nabla X_i}{dt}\right) =$$

$$= |\dot f^i X_i|^2 + 2\dot f^i f^j \left(X_i, \frac{\nabla X_j}{dt}\right) + f^i f^j \left(\frac{\nabla X_i}{dt}, \frac{\nabla X_j}{dt}\right),$$

где $|\dot f^i X_i|^2 = (\dot f^i X_i, \dot f^i X_i)$, и аналогично

$$R(X, \dot\gamma, X, \dot\gamma) = (R(X, \dot\gamma)\dot\gamma, X) =$$

$$= f^i f^j (R(X_i, \dot\gamma)\dot\gamma, X_j) = -f^i f^j \left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt} X_i, X_j\right).$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right) = \left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt} X_i, X_j\right) + \left(\frac{\nabla X_i}{dt}, \frac{\nabla X_j}{dt}\right),$$

отсюда следует, что

$$\left(\frac{\nabla X}{dt}, \frac{\nabla X}{dt}\right) - R(X, \dot\gamma, X, \dot\gamma) =$$
$$= |\dot f^i X_i|^2 + 2\dot f^i f^j \left(X_i, \frac{\nabla X_j}{dt}\right) + f^i f^j \frac{d}{dt}\left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right).$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\left(f^i \frac{\nabla X_i}{dt}, f^j X_j\right) = \frac{d(f^i f^j)}{dt}\left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right) + f^i f^j \frac{d}{dt}\left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right)$$

и

$$\frac{d(f^i f^j)}{dt}\left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right) = (\dot f^i f^j + f^i \dot f^j)\left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right) =$$
$$= \dot f^i f^j \left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right) + \dot f^j f^i \left(\frac{\nabla X_j}{dt}, X_i\right).$$

Поэтому

$$\left(\frac{\nabla X}{dt}, \frac{\nabla X}{dt}\right) - R(X, \dot\gamma, X, \dot\gamma) =$$
$$= |\dot f^i X_i|^2 + \dot f^i f^j \left[\left(X_i, \frac{\nabla X_j}{dt}\right) - \left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right)\right] +$$
$$+ \frac{d}{dt}\left(f^i \frac{\nabla X_i}{dt}, f^j X_j\right).$$

Заметим теперь, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right) = \left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt} X_i, X_j\right) + \left(\frac{\nabla X_i}{dt}, \frac{\nabla X_j}{dt}\right) =$$

$$= \left(\frac{\nabla X_i}{dt}, \frac{\nabla X_j}{dt}\right) - (R(X_i, \dot\gamma)\dot\gamma, X_j) =$$
$$= \left(\frac{\nabla X_i}{dt}, \frac{\nabla X_j}{dt}\right) - R(X_j, \dot\gamma, X_i, \dot\gamma),$$

и аналогично

$$\frac{d}{dt}\left(X_i, \frac{\nabla X_j}{dt}\right) = \left(\frac{\nabla X_i}{dt}, \frac{\nabla X_j}{dt}\right) - R(X_i, \dot\gamma, X_j, \dot\gamma).$$

Поскольку правые части этих тождеств совпадают (см. предложение 2 лекции 15), отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}\left[\left(X_i, \frac{\nabla X_j}{dt}\right) - \left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right)\right] = 0,$$

т. е. что

$$\left(X_i, \frac{\nabla X_j}{dt}\right) - \left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right) = \text{const}.$$

Но так как $X_i(0) = 0$, $X_j(0) = 0$, то эта константа равна нулю:

$$\left(X_i, \frac{\nabla X_j}{dt}\right) - \left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right) = 0.$$

Этим доказано, что

$$\left(\frac{\nabla X}{dt}, \frac{\nabla X}{dt}\right) - R(X, \dot\gamma, X, \dot\gamma) = |\dot f^i X_i|^2 + \frac{d}{dt}\left(f^i \frac{\nabla X_i}{dt}, f^j X_j\right)$$

Интегрируя (и учитывая, что $X_i(0) = 0$), мы немедленно получаем отсюда формулу (19).

Доказательство предложения 6. Без потери общности можно считать, что $a = 0$, $b = 1$, т. е. что ни одна точка геодезической $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ не сопряжена с точкой $p_0 = \gamma(0)$ (и, значит, что $X^{(0)} \in J_\gamma^{(00)}$).

Применим формулу (19) к нормальному полю Якоби $X^{(0)}$. Это поле имеет вид (18) с $f^i = \text{const}$. Следовательно

$$I_0^1(X^{(0)}) = b^i b^j \left(\frac{\nabla X_i}{dt}, X_j\right)\Big|_{t=1},$$

и, значит, для любого нормального кусочно гладкого поля $X$, совпадающего с полем $X^{(0)}$ при $t = 0$ и $t = 1$, имеет место неравенство

$$I_0^1(X) - I_0^1(X^{(0)}) = \int_0^1 |\dot f^i X_i|^2\, dt \geqslant 0.$$

Таким образом,

$$I_0^1(X^{(0)}) \leqslant I_0^1(X) \tag{20}$$

для любого нормального поля $X$, причем равенство имеет место только при $X = X^{(0)}$.

Задача 1. Покажите, что для любого кусочно гладкого поля $X$ на геодезической $\gamma$ имеет место неравенство

$$I_0^1(X^\perp) \leqslant I_0^1(X),$$

где $X^\perp$ — *нормальная составляющая* поля $X$ (т. е. такое поле на $\gamma$, что для каждого $t$ вектор $X(t) - X^\perp(t)$ коллинеарен вектору $\dot\gamma(t)$).

Вместе с неравенством (20) это, очевидно, доказывает предложение 6. □

**Следствие 1**. *Если на отрезке $\gamma|_{[0,t_0]}$ геодезической $\gamma$ нет точек, сопряженных с точкой $p_0 = \gamma(0)$, то $I_0^{t_0}(X) \geqslant 0$ для каждого кусочно гладкого поля $X$ на $\gamma$, равного нулю при $t = 0$ и $t = t_0$.* □

**Доказательство теоремы Якоби**

Теперь мы уже можем доказать предложение 1 (и вместе с ним теорему 1).

Доказательство предложения 1. Согласно предложению 3 на $\gamma|_{[0,t_0]}$ существует такое поле Якоби $X^{(0)} \neq 0$ (согласно предложению 4 нормальное), что $X^{(0)}(0) = 0$ и $X^{(0)}(t_0) = 0$, а согласно предложению 1 лекции 1 существует окрестность $U$ точки $q = \gamma(t_0)$, содержащаяся в нормальной окрестности каждой своей точки и, следовательно, такая, что для любой точки $p \in U$ отображение $\exp_p$ не имеет в $U$ критических значений. Поэтому существует такое $\delta > 0$, $\delta \leqslant t_0$, $t_0 + \delta \leqslant 1$ (напомним, что по условию $0 < t_0 < 1$), что ни одна точка отрезка $\gamma|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ геодезической $\gamma$ не сопряжена с точкой $\gamma(t_0 - \delta)$. В частности, точка $\gamma(t_0+\delta)$ не сопряжена с точкой $\gamma(t_0-\delta)$ и, значит (см. следствие 1 предложения 3), на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ существует такое поле Якоби $X^{(1)}$ (согласно предложению 4 нормальное), что

$$X^{(1)}(t_0 - \delta) = X^{(0)}(t_0 - \delta), \quad X^{(1)}(t_0 + \delta) = 0.$$

Мы определим векторное поле $X$ на $\gamma$ формулами

$$X(t) = \begin{cases} X^{(0)}(t), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant t_0 - \delta, \\ X^{(1)}(t), & \text{если } t_0 - \delta \leqslant t \leqslant t_0 + \delta, \\ 0, & \text{если } t_0 + \delta \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Поле $X$ кусочно гладко и $X(0) = 0$, $X(1) = 0$. Кроме того, так как оба поля $X^{(0)}$ и $X^{(1)}$ нормальны, то поле $X$ также нормально. Поэтому (см. предложение 2) для доказательства предложения 1 достаточно показать, что $I_0^1(X) < 0$.

Так как $X^{(0)}(0) = 0$ и $X^{(0)}(t_0) = 0$, то $I_0^{t_0}(X^{(0)}) = 0$ (см. предложение 4). С другой стороны,

$$I_0^1(X) = I_0^{t_0+\delta}(X) = I_0^{t_0-\delta}(X^{(0)}) + I_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}(X^{(1)}) =$$
$$= I_0^{t_0}(X^{(0)}) - I_{t_0-\delta}^{t_0}(X^{(0)}) + I_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}(X^{(1)}),$$

и потому

$$I_0^1(X) = I_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}(X^{(1)}) - I_{t_0-\delta}^{t_0}(X^{(0)}).$$

Но так как согласно предложению 6 поле $X^{(1)}$ на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ минимально, то

$$I_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}(X^{(1)}) < I_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}(Y)$$

для любого кусочно гладкого поля $Y$ на $\gamma|_{[t_0-\delta,t_0+\delta]}$, отличного от поля $X^{(1)}$ и такого, что

$$Y(t_0 - \delta) = X^{(0)}(t_0 - \delta), \quad Y(t_0 + \delta) = 0.$$

В частности, это верно для поля $Y$, определенного формулой

$$Y(t) = \begin{cases} X^{(0)}, & \text{если } t_0 - \delta \leqslant t \leqslant t_0, \\ 0, & \text{если } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta. \end{cases}$$

Поскольку $I_{t_0-\delta}^{t_0}(X^{(0)}) = I_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}(Y)$, это доказывает, что $I_0^1(X) < 0$. $\square$