ЛЕКЦИЯ 28

Точки схода. — Лемма о непрерывности. — Локусы схода и максимальные нормальные окрестности. — Доказательство леммы 1. — Пространства строго положительной кривизны Риччи. — Теорема Майерса. — Пространства строго положительной секционной кривизны. — Пространства неположительной секционной кривизны.

Точки схода

Предложение 3 и формула (11) лекции 27 показывают, что сопряженные точки связаны через поля Якоби с тензором кривизны, который во многом определяет — через характеристические классы (см. лекцию IV.23) — топологию многообразия $\mathcal{X}$. Поэтому топология и сопряженные точки весьма тесно взаимодействуют друг с другом.

В первую очередь мы проиллюстрируем это общее замечание в связи с понятием нормальной окрестности.

Пусть $\mathcal{X}$ — связное полное риманово пространство, p_0 — его произвольная точка, н пусть γ — геодезнческая $t \mapsto \exp_{p_0} tA$, $A = \dot\gamma(0)$, проходящая при $t = 0$ через точку p_0 н отнесенная к натуральному параметру (т. е. такая, что $|A| = 1$). Рассмотрим множество T_γ всех чисел $t > 0$, для которых отрезок $\gamma|_{[0,t]}$ геодезической γ является кратчайшей.

Задача 1. Докажите, что *либо* $T_\gamma = (0, \infty)$, *либо* $T_\gamma = (0, \mu_0]$, *где* μ_0 — *некоторое положительное число.* [Указание. Если $t \in T_\gamma$ и $0 < s < t$, то $s \in T_\gamma$. Если $s \in T_\gamma$ для любого $s < t$, то $t \in T_\gamma$.]

***Определение* 1**. При $T_\gamma = (0, \mu_0]$ точка $\gamma(\mu_0)$ называется *точкой схода* геодезической γ.

Замечание 1. Точки схода называются также *точками среза.* Это неудачный перевод английского термина cut point.

***Предложение* 1**. *Точка схода $q = \gamma(\mu_0)$ геодезической γ является первой точкой на γ, для которой выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

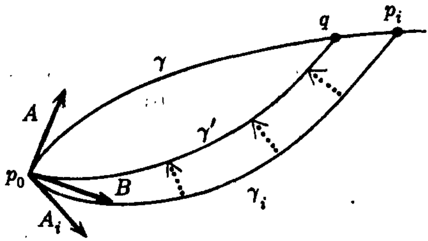
а *точка q сопряжена точке p_0 на геодезической γ; либо*

б *кроме кратчайшей $\gamma|_{[0,\mu_0]}$ в $\mathcal{X}$ существует по меньшей мере еще одна кратчайшая, соединяющая точку p_0 с точкой q.*

Доказательство. Выбрав монотонно убывающую последовательность $t_1 > t_2 > \ldots > t_i > \ldots$, сходящуюся к точке μ_0, и положив $\rho_i = \rho(p_0, p_i)$, $p_i = \gamma(t_i)$, рассмотрим отнесенную к натуральному параметру кратчайшую

$$\gamma_i\colon [0, \rho_i] \to \mathcal{X}, \qquad t \mapsto \exp_{p_0} tA_i, \quad |A_i| = 1,$$

соединяющую точку p_0 с точкой p_i. (Существование кратчайшей γ_i обеспечивается теоремой Хопфа — Ринова; см. лекцию 12.) Так как $t_i > \mu_0$, а $\gamma(\mu_0)$ — точка схода, то $A_i \neq A$ и $t_i > \rho_i$. С другой стороны, так как $\rho_i = \rho(p_0, p_i)$ и $p_i \to q$, то $\rho_i \to \mu_0$, и потому последовательность $\{\rho_i\}$ ограничена. Следовательно, согласно теореме Больцано — Вейерштрасса мы, не теряя общности, можем считать, что векторы $\rho_i A_i$ сходятся к некоторому вектору вида $\mu_0 B$, где $|B| = 1$. Так как



$$\exp_{p_0} \mu_0 B = \lim_{i\to\infty} \exp_{p_0} \rho_i A_i = \lim_{i\to\infty} p_i = q,$$

то геодезическая $\gamma'\colon t \mapsto \exp_{p_0} tB$, $0 \leqslant t \leqslant \mu_0$, соединяет точку p_0 с точкой q и, имея длину μ_0, является кратчайшей. Следовательно, при $\gamma' \neq \gamma$ имеет место свойство **б**, и, значит, для доказательства предложения 1 достаточно доказать, что при $\gamma = \gamma'$, т. е. при $B = A$, реализуется случай **а**. Мы проведем рассуждение от противного.

Пусть $B = A$, и пусть точка q не сопряжена с точкой p_0 вдоль геодезической γ. Тогда по определению отображение

$$\exp_{p_0}\colon \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

этально в точке $\mu_0 A$ и, значит, является диффеоморфизмом некоторой окрестности точки $\mu_0 A$ на некоторую окрестность точки q. Поэтому если i достаточно велико, то из равенства

$$\exp_{p_0} t_i A = p_i = \exp_{p_0} \rho_i A_i$$

следует равенство $t_i A = \rho_i A_i$, возможное только при $t_i = \rho_i$ и $A = A_i$. Так как по условию $t_i > \rho_i$, этим доказано, что при $B = A$ точка q сопряжена с точкой p_0. При этом поскольку геодезическая $\gamma|_{[0,\mu_0]}$ является кратчайшей, эта точка будет — в силу теоремы Якоби — первой сопряженной с p_0 точкой геодезической γ. Наконец, для любого положительного $\mu < \mu_0$ кратчайшая $\gamma|_{[0,\mu_0]}$ является единственной кратчайшей, соединяющей точку p с точкой $\gamma(\mu)$, поскольку любая другая кратчайшая, соединяющая точку p_0 с точкой $\gamma(\mu)$, образовывала бы вместе с отрезком $\gamma|_{[\mu,\mu']}$, $\mu < \mu' < \mu_0$, геодезической γ ломаную кратчайшую, соединяющую точку p_0 с точкой $\gamma(\mu')$, в то время как мы знаем (предложение 3 лекции 12), что каждая кратчайшая является гладкой кривой. $\square$

Лемма о непрерывности Пусть $\mathbb{S}_{p_0}$ — единичная сфера пространства $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ (множество всех векторов $A \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$, для которых $|A| = 1$). Определим на $\mathbb{S}_{p_0}$ функцию

$$\mu\colon \mathbb{S}_{p_0} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \tag{1}$$

полагая $\mu(A) = \mu_0$, если $\gamma(\mu_0)$ — точка схода геодезической $\gamma\colon t \mapsto \exp_{p_0} tA$ (т. е. если во введенных выше обозначениях $T_\gamma = (0, \mu_0]$), и $\mu(A) = \infty$, если $T_\gamma = (0, \infty)$.

Задача 2. Пусть $\mathcal{X}$ — хаусдорфово локально компактное, но не компактное пространство, и пусть ∞ — точка, не лежащая в $\mathcal{X}$. Будем считать множество $U \subset \mathcal{X} \cup \{\infty\}$ открытым, если либо $U \subset \mathcal{X}$ и U открыто в $\mathcal{X}$, либо $\infty \in U$, множество $U' = U \setminus \{\infty\}$ открыто в $\mathcal{X}$ и его дополнение $\mathcal{X} \setminus U'$ компактно. Докажите, что это вводит в $\mathcal{X} \cup \{\infty\}$ топологию, по отношению к которой $\mathcal{X} \cup \{\infty\}$ является компактным хаусдорфовым пространством, содержащим $\mathcal{X}$ в качестве всюду плотного подпространства (топология пространства $\mathcal{X}$ индуцируется топологией пространства $\mathcal{X} \cup \{\infty\}$ и $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \{\infty\}$).

Пространство $\mathcal{X} \cup \{\infty\}$ называется *одноточечной компактификацией* (или *компактификацией Александрова*) пространства $\mathcal{X}$.

В частности, эта конструкция применима к $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ и дает компактное хаусдорфово пространство $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Задача 3. Докажите, что *пространство* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *гомеоморфно сфере* $\mathbb{S}^1$.

Поскольку $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ является топологическим пространством, осмыслен вопрос, непрерывна ли функция (1). Ответ на этот вопрос оказывается утвердительным.

***Лемма 1**. Функция (1) непрерывна.*

Чтобы не прерывать изложения, мы докажем эту лемму позже.

Локусы схода и максимальные нормальные окрестности

Пусть $C_0(p_0)$ — множество всех векторов линеала $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ вида $\mu(A)A$, где $A\in\mathbb{S}_{p_0}$ и $\mu(A)<\infty$, а $C(p_0)$ — его образ в $\mathcal{X}$ при экспоненциальном отображении:

$$C(p_0)=\exp_{p_0}C_0(p_0).$$

Таким образом, $C(p_0)$ — это не что иное, как множество всех точек схода иа геодезических, исходящих из точки p_0.

***Определение 2**.* Множество $C(p_0)$ (множество $C_0(p_0)$) называется *локусом схода* точки p_0 в пространстве $\mathcal{X}$ (соответственно, в касательном пространстве $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$).

Прнмер 1. Локусом схода произвольной точки p_0 сферы $\mathbb{S}^n$ является в касательном пространстве $\mathsf{T}_{p_0}\mathbb{S}^n$ сфера радиуса π, а в самой сфере $\mathbb{S}^n$ — диаметрально противоположная точка (для северного полюса — южный полюс).

Пример 2. Локусом схода произвольной точки p_0 эллиптического пространства $\mathbb{R}P^n$ (см. пример 1 лекции 19) является в $\mathsf{T}_{p_0}(\mathbb{R}P^n)$ сфера радиуса $\pi/2$, а в $\mathbb{R}P^n$ — гиперплоскость $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Пусть $U_0(p_0)$ — множество всех векторов линеала $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ вида tA, где $A\in\mathbb{S}_{p_0}$ и $0\leqslant t<\mu(A)$, а $U(p_0)$ — его образ в $\mathcal{X}$ при экспоненциальном отображении:

$$U(p_0)=\exp_{p_0}U_0(p_0).$$

Согласно предложению 1 множество $U(p_0)$ состоит из всех точек $p\in\mathcal{X}$, которые

1) соединены с точкой p_0 единственной кратчайшей;
2) не сопряжены на этой кратчайшей с точкой p_0.

Ясно, что множество $U_0(p_0)$ обладает свойством звездности (если $A\in U_0(p_0)$, то $\lambda A\in U_0(p_0)$ для любого λ, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$).

Задача 4. Докажите, что

а *множество $U_0(p_0)$ открыто;*

б *локус схода $C_0(p_0)$ является его границей:*

$$C_0(p_0) = \overline{U_0(p_0)} \setminus U_0(p_0)$$

(*и, следовательно, представляет собой замкнутое множество*). [Указание. Воспользуйтесь леммой 1.]

Являясь открытым и звездным множеством, *множество $U_0(p_0)$ гомеоморфно открытому шару $\mathbb{B}^n$ радиуса 1 пространства $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$.* [В явном виде гомеоморфизм $U_0(p_0) \to \mathbb{B}^n$ можно задать, например, формулой

$$tA \mapsto \frac{\mu(A)+1}{\mu(A)}\frac{t}{1+t}A, \qquad A \in \mathbb{S}_{p_0}, \quad 0 \leqslant t < \mu(A)$$

(считается, что $\frac{\infty+1}{\infty} = 1$).]

В силу свойств 1) и 2) точек $p \in U_0(p_0)$ отображение

$$\exp_{p_0}\colon U_0(p_0) \to U(p_0)$$

биективно и этально, т. е. является диффеоморфизмом. По определению (см. определение 4 лекции 1) это означает, что *открытые множества $U_0(p_0)$ и $U(p_0)$ являются нормальными окрестностями* (точек $0 \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ и $p_0 \in \mathcal{X}$ соответственно). Следующее предложение, в частности, показывает, что *эти окрестности максимальны*, т. е. не содержатся ни в каких бóльших нормальных окрестностях.

Предложение 2. *Каждое полное риманово пространство $\mathcal{X}$ является дизъюнктным объединением максимальной нормальной окрестности $U(p_0)$ его произвольной точки p_0 и соответствующего локуса схода $C(p_0)$:*

$$\mathcal{X} = U(p_0) \sqcup C(p_0).$$

Доказательство. Пусть $p \in \mathcal{X}$, и пусть

$$\gamma\colon t \mapsto \exp_{p_0} tA, \qquad |A| = 1,$$

— отнесенная к натуральному параметру геодезическая, обладающая тем свойством, что отрезок $\gamma|_{[0,t_0]}$ является кратчайшей, соединяющей точку p_0 с точкой p. Тогда $t_0 \in T_\gamma$

и, значит, $t_0 \leqslant \mu(A)$. Если $t_0 < \mu(A)$, то $p \in U(p_0)$, а если $t_0 = \mu(A)$, то $p \in C(p_0)$. □

Следствие 1. *Каждый локус схода $C(p_0)$ является замкнутым множеством.* □

Следствие 2. *Максимальная нормальная окрестность $U(p_0)$ всюду плотна в $\mathcal{X}$, т. е.*

$$\overline{U(p_0)} = \mathcal{X}. \qquad \square$$

Следствие 3. *Если хотя бы для одной точки $p_0 \in \mathcal{X}$ функция (1) конечна (не принимает значения ∞), то пространство $\mathcal{X}$ компактно.*

Доказательство. Будучи непрерывной числовой (принимающей значения в $\mathbb{R}$) функцией на компактном пространстве $\mathbb{S}_{p_0}$, функция (1) ограничена, т. е. существует такое число $d \geqslant 0$, что $\mu(A) \leqslant d$ для любого вектора $A \in \mathbb{S}_{p_0}$. Тогда замкнутый шар $\overline{\mathbb{B}}_d$ радиуса d пространства $\mathbf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ содержит замыкание $\overline{U_0(p_0)}$ окрестности $U_0(p_0)$ и, значит, при экспоненциальном отображении $\exp_{p_0}$ отображается на все пространство $\mathcal{X}$. Следовательно, являясь непрерывным образом компактного множества $\overline{\mathbb{B}}_d$, пространство $\mathcal{X}$ компактно. □

Заметим, что обратное утверждение справедливо в следующей усиленной формулировке. *Если риманово пространство $\mathcal{X}$ компактно, то для любой точки $p_0 \in \mathcal{X}$ функция* (1) *ограничена.* Действительно, так как компактное метрическое пространство имеет конечный диаметр d, то при $t_0 > d$ отрезок $\gamma|_{[0,t_0]}$ произвольной геодезической γ: $t \mapsto \exp_{p_0} tA$, $|A| = 1$, не может быть кратчайшей. Следовательно, $\mu(A) \leqslant d$. □

Обратим внимание на то, что, таким образом, *каждое гладкое связное компактное многообразие получается из евклидова шара некоторым отождествлением его граничных точек.*

Доказательство леммы 1

Докажем теперь лемму 1.

Доказательство леммы 1. Если

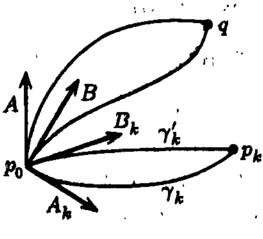
функция (1) не непрерывна, то существует такая сходящаяся последовательность $\{A_k, k \geqslant 1\}$ векторов $A_k \in \mathbb{S}_{p_0}$, что

$$\mu(\lim_{k\to\infty} A_k) \neq \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

(так как пространство $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ компактно, то без ограничения общности можно предполагать, что предел справа существует). Пусть

$$A = \lim_{k\to\infty} A_k, \quad \mu_k = \mu(A_k), \quad \mu_0 = \lim_{k\to\infty} \mu_k.$$

Случай 1. Пусть $\mu(A) > \mu_0$. Согласно предложению 1 точка $q = \exp_{p_0} \mu_0 A$ геодезической γ: $t \mapsto$ $\mapsto \exp_{p_0} tA$ не сопряжена с точкой p_0 и, значит, отображение $\exp_{p_0}$ этально в точке $\mu_0 A$. Поэтому точка $\mu_0 A$ обладает окрестностью V, на которой отображение $\exp_{p_0}$ является диффеоморфизмом. С другой стороны, так как $\mu_k A_k \to \mu_0 A$, то существует такое $k_0 \geqslant 1$, что $\mu_k A_k \in$ $\in V$ при $k \geqslant k_0$ и, значит, отображение $\exp_{p_0}$ этально в точке $\mu_k A_k$, т. е. точка $p_k = \exp_{p_0} \mu_k A_k$ геодезической γ_k: $t \mapsto \exp_{p_0} tA_k$ не сопряжена с точкой p_0 вдоль этой геодезической. Таким образом, для точки p_k и геодезической γ_k случай а предложения 1 места не имеет. Поэтому имеет место случай б, т. е. кроме кратчайшей $\gamma_k|_{[0,\mu_k]}$ существует другая кратчайшая



$$\gamma'_k\colon t \mapsto \exp_{p_0} tB_k, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \mu_k, \quad |B_k| = 1,$$

соединяющая точку p_0 с точкой p_k. При этом так как $A_k \neq$ $\neq B_k$ и

$$\exp_{p_0} \mu_k A_k = p_k = \exp_{p_0} \mu_k B_k,$$

то $\mu_k B_k \notin V$. Перейдя — если нужно — к подпоследовательности, мы без ограничения общности можем считать, что существует предел

$$B = \lim_{k\to\infty} B_k.$$

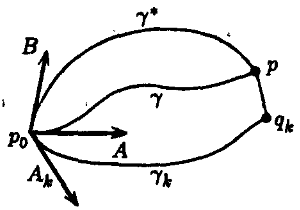
При этом так как $\mu_k B_k \to \mu_0 B$, то $\mu_0 B \notin V$ (и, значит, $B \neq A$). Вместе с тем

$$\exp_{p_0}\mu_0 B = \exp_{p_0}(\lim_{k\to\infty}\mu_k B_k) = \lim_{k\to\infty}(\exp_{p_0}\mu_k B_k) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}(\exp_{p_0}\mu_k A_k) = \exp_{p_0}(\lim_{k\to\infty}\mu_k A_k) = \exp_{p_0}\mu_0 A,$$

и, значит, точка $\exp_{p_0}\mu_0 A$ соединена с точкой p_0 двумя различными кратчайшими $t \mapsto \exp_{p_0} tA$ и $t \mapsto \exp_{p_0} tB$, $0 \leqslant t \leqslant \mu_0$.

Поскольку при $\mu_0 < \mu(A)$ это невозможно, тем самым доказано, что случай 1 места иметь не может.

Случай 2. Пусть $\mu(A) < \mu_0$. Выбрав на интервале $(\mu(A), \mu_0)$ число t_0, мы без ограничения общности можем считать, что $t_0 < \mu_k$ для всех $k \geqslant 1$. Так как $t_0 > \mu(A)$, то расстояние ρ_0 от точки p_0 до точки $p = \exp_{p_0} t_0 A$ меньше t_0 и кратчайшая γ^*, соединяющая точку p_0 с точкой p, имеет вид



$$\gamma^*\colon [0, \rho_0] \to \mathcal{X}, \qquad t \mapsto \exp_{p_0} tB,$$

где $|B| = 1$. С другой стороны, так как $\exp_{p_0} t_0 A_k \to \exp_{p_0} t_0 A = p$, то без ограничения общности мы можем считать, что

$$\rho(p, q_k) < \frac{t_0 - \rho_0}{2}, \qquad \text{где } q_k = \exp_{p_0} t_0 A_k.$$

Тогда длина кривой, составленной из кратчайшей γ^* и кратчайшей, соединяющей точку p с точкой q_k, равна

$$\rho_0 + \rho(p, q_k) < \frac{t_0 + \rho_0}{2} < t_0,$$

т. е. меньше длины t_0 геодезической

$$\gamma_k\colon t \mapsto \exp_{p_0} tA_k, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0,$$

являющейся — ввиду неравенства $t_0 < \mu_k$ — кратчайшей, соединяющей точку p_0 с точкой q_k. Значит, случай 2 также невозможен.

Следовательно, вопреки предположению, $\mu(A) = \mu_0$. Это противоречие доказывает лемму 1. □

Обсудим теперь более непосредственные связи между кривизной и топологией пространства $\mathcal{X}$.

Пространства строго положительной кривизны Риччи

Определение 3. Говорят, что риманово пространство $\mathcal{X}$ имеет *кривизну Риччи* $\geqslant k_0$, где $k_0 \in \mathbb{R}$, если тензор $\operatorname{Ric} - k_0 g$ неотрицательно определен, т. е. если для любого поля $X \in \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$

$$\operatorname{Ric}(X, X) \geqslant k_0(X, X) \quad \text{всюду на } \mathcal{X}.$$

Определение 4. Говорят, что риманово пространство $\mathcal{X}$ имеет *строго положительную кривизну Риччи*, если существует такое число $k_0 > 0$, что кривизна Риччи этого пространства $\geqslant k_0$.

Предложение 3. *В римановом пространстве $\mathcal{X}$, имеющем кривизну Риччи $\geqslant k_0$, где $k_0 > 0$, длина отрезка $\gamma|_{[a,b]}$ геодезической γ, не содержащего точек, сопряженных с точкой $\gamma(a)$, не превосходит $\pi\sqrt{n/k_0}$.*

Доказательство. Это предложение равносильно утверждению, что *если на геодезической γ: $t \mapsto \exp_{p_0} tA$ ни одна точка $\gamma(t)$, $0 < t < 1$, не сопряжена с точкой $p_0 = = \gamma(0)$, то*

$$|A| \leqslant \pi\sqrt{n/k_0}. \tag{2}$$

В этой форме мы и будем его доказывать.

Снова (см. лекцию 27) рассмотрим на кривой γ поля $X_1, \ldots, X_n$, получающиеся параллельным переносом ортонормированного базиса $A_1, \ldots, A_n$ линеала $\mathbf{T}_{p_0}\mathcal{X}$. Тогда для любых двух полей X и Y на γ значение $\operatorname{Ric}(X, Y)$ тензора Риччи будет выражаться формулой

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} R(X_i, X, X_i, Y)$$

(см. формулу (17) лекции 17) и, в частности,

$$\operatorname{Ric}(\dot\gamma, \dot\gamma) = \sum_{i=1}^{n} R(X_i, \dot\gamma, X_i, \dot\gamma).$$

Имея это в виду и выбрав произвольное число t_0, $0 < t_0 < 1$, рассмотрим функцию

$$f(t) = \sin \frac{\pi t}{t_0}.$$

Эта функция равна нулю при $t = 0$ и $t = t_0$, и, значит, для каждого i к полю fX_i на отрезке $\gamma|_{[0,t_0]}$ применимо следствие 1 предложения 6 лекции 27. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} I_0^{t_0}(fX_i) \geqslant 0$$

и, значит,

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} I_0^{t_0}(fX_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{t_0} [(\dot{f}X_i, \dot{f}X_i) - f^2 R(X_i, \dot\gamma, X_i, \dot\gamma)]\,dt =$$

$$= \int_0^{t_0} [n\dot{f}^2 - f^2 \operatorname{Ric}(\dot\gamma, \dot\gamma)]dt \leqslant \int_0^{t_0} [n\dot{f}^2 - f^2 k_0(\dot\gamma, \dot\gamma)]\,dt$$

(напомним, что $\dfrac{\nabla X_i}{dt} = 0$). Поскольку $(\dot\gamma, \dot\gamma) = |A|^2$, этим доказано, что

$$\int_0^{t_0} [n\dot{f}^2 - k_0|A|^2 f^2]\,dt \geqslant 0,$$

т. е. что

$$k_0|A|^2 \leqslant n\left(\int_0^{t_0} \dot{f}^2\,dt\right) \Big/ \left(\int_0^{t_0} f^2\,dt\right).$$

Но

$$\int_0^{t_0} f^2\,dt = \frac{t_0}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{t_0}{2}$$

и

$$\int_0^{t_0} \dot{f}^2 dt = \frac{\pi}{t_0}\int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi^2}{2t_0}.$$

Следовательно, $k_0|A|^2 \leqslant \dfrac{n\pi^2}{t_0^2}$. Для завершения доказательства осталось перейти к пределу при $t_0 \to 1$ и извлечь квадратный корень. □

Задача 5. Покажите, что *в оценке* (2) *множитель n можно заменить на $n-1$*. [Указание. Можно считать, что поле X_n касается в каждой точке кривой γ.]

Теорема Майерса

***Теорема* 1.** *Каждое связное полное риманово пространство $\mathcal{X}$ строго положительной кривизны Риччи*

а *является по отношению к римановой метрике метрическим пространством конечного диаметра;*

б *компактно;*

в *имеет конечную фундаментальную группу.*

Доказательство. Пусть кривизна Риччи $\geqslant k_0$, где $k_0 > 0$. Согласно теореме Хопфа — Ринова (теорема 1 лекции 12) любые две точки $p, q \in \mathcal{X}$ можно соединить кратчайшей γ. Согласно теореме Якоби (теорема 1 лекции 27) ни одна точка этой кратчайшей не сопряжена с точкой p. Поэтому согласно предложению 3 длина кривой γ, т. е. расстояние $\rho(p, q)$ между точками p и q, не больше $\pi\sqrt{n/k_0}$. Это доказывает утверждение **а**.

Поскольку метрическое пространство $\mathcal{X}$ больцаново (см. доказательство теоремы Хопфа — Ринова), утверждение **б** является непосредственным следствием утверждения **а**.

Для доказательства утверждения **в** рассмотрим универсальное накрывающее пространство $\widetilde{\mathcal{X}}$ пространства $\mathcal{X}$. Так как условие строгой положительности кривизны Риччи имеет локальный характер, то относительно индуцированной римановой метрики пространство $\widetilde{\mathcal{X}}$ также будет пространством строго положительной кривизны Риччи. Следовательно, согласно утверждению **б** это пространство компактно, и, значит, оно конечнолистно накрывает пространство $\mathcal{X}$. Поэтому фундаментальная группа пространства $\mathcal{X}$ — находящаяся (см. предложение 2 лекции IV.4) в биективном соответствии с прообразом в $\widetilde{\mathcal{X}}$ произвольной точки пространства $\mathcal{X}$ — состоит из конечного числа элементов. □

Теорема 1 известна как теорема Майерса.

***Следствие* 1.** *Каждое связное и полное пространство Эйнштейна, скалярная кривизна которого ограничен снизу положительной константой, обладает свойствами* **а**, **б** *и* **в**.

Теорема Вейля (теорема 1 лекции 26) непосредственно вытекает из сопоставления этого следствия с предложением 5 лекции 26.

Пространства строго положительной секционной кривизны

Теорема Майерса имеет и другие интересные следствия.

***Определение* 5.** Говорят, что риманово пространство $\mathcal{X}$ является пространством *строго положительной секционной кривизны*, если существует такое число $k_0 > 0$, что $K_p(\pi) \geqslant k_0$ для любой точки $p \in \mathcal{X}$ и любого двумерного подпространства $\pi \subset \mathsf{T}_p\mathcal{X}$.

Каждое векторное поле X на любой координатной окрестности U, состоящее из векторов длины 1, мы можем, очевидно, дополнить до ортонормированного базиса

$$X = X_1, X_2, \ldots, X_n$$

модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ над U. Пусть $p \in U$, и пусть π_{ij} — двумерное направление в точке p, задаваемое бивектором $(X_i \wedge X_j)_p$. По определению (см. формулу (20) лекции 15) секционная кривизна $K_p(\pi_{ij})$ пространства $\mathcal{X}$ в точке p по направлению π_{ij} равна значению в точке p функции

$$R(X_i \wedge X_j) = R(X_i, X_j, X_i, X_j).$$

Следовательно, если $K_p(\pi) \geqslant k_0$ для всех p и всех π, то для любого $j = 1, \ldots, n$

$$\operatorname{Ric}(X_j, X_j) = \sum_i R(X_i, X_j, X_i, X_j) =$$

$$= \sum_{j \neq i} R(X_i, X_j, X_i, X_j) \geqslant (n-1)k_0$$

на U (напомним, что $R(X_i, X_i, X_i, X_i) = 0$), и потому (напомним, что $X = X_1$)

$$\operatorname{Ric}(X, X) \geqslant (n-1)k_0.$$

Это означает, что на U, а, значит, — в силу произвольности окрестности U — и на всем $\mathcal{X}$ кривизна Риччи пространства $\mathcal{X}$ не меньше, чем $(n-1)k_0$.

Таким образом, *каждое риманово пространство строго положительной секционной кривизны имеет строго положительную кривизну Риччи, и потому обладает свойствами* **а**, **б** *и* **в** *из теоремы* 1.

Пространства неположительной секционной кривизны

Противоположные свойства имеют *пространства неположительной секционной кривизны*, в которых

$$K_p(\pi) \leqslant 0$$

для любой точки $p \in \mathcal{X}$ и любого двумерного подпространства $\pi \in \mathsf{T}_p\mathcal{X}$.

Предложение 4. *В пространстве неположительной секционной кривизны никакие две точки никакой геодезической не сопряжены.*

Доказательство. Пусть X — поле Якоби на геодезической γ, равное нулю при $t = 0$. Нужно показать, что либо $X = 0$ тождественно, либо $X(t) \neq 0$ для каждого $t > 0$.

С этой целью мы заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\nabla X}{dt}, X\right) = \left(\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}X, X\right) + \left(\frac{\nabla X}{dt}, \frac{\nabla X}{dt}\right) =$$
$$= -(R(X,\dot\gamma)\dot\gamma, X) + \left|\frac{\nabla X}{dt}\right|^2 = -R(X \wedge \dot\gamma) + \left|\frac{\nabla X}{dt}\right|^2 =$$
$$= -K_p(\pi) + \left|\frac{\nabla X}{dt}\right|^2 \geqslant 0,$$

где π — двумерная плоскость с направляющим бивектором $(X \wedge \dot\gamma)_p$, причем знак равенства имеет место только при $X = 0$. Поэтому при $X \neq 0$ функция $\left(\frac{\nabla X}{dt}, X\right)$ монотонно возрастает и, значит, при $t > 0$ не обращается в нуль. Значит, $X(t) \neq 0$ при $t > 0$. □