ЛЕКЦИЯ 29

Теорема Картана — Адамара. — Ее следствия. — Теорема Картана — Киллинга при $K = 0$. — Теорема Бохнера. — Операторы A_X. — Инфинитезимальный вариант теоремы Бохнера. — Группа изометрий компактного метрического пространства.

Теорема Картана — Адамара

Предложение 4 лекции 28 означает, что для каждой точки p_0 риманова пространства $\mathcal{X}$ неположительной секционной кривизны (предполагаемого полным) экспоненциальное отображение

$$\exp_{p_0}\colon \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \to \mathcal{X} \tag{1}$$

не имеет критических точек и, значит, является этальным отображением. На самом же деле, как мы сейчас покажем (в естественном дополнительном предположении связиости пространства $\mathcal{X}$), это отображение представляет собой даже накрытие.

***Теорема* 1** (теорема Картана — Адамара). *Для любого связного полного риманова пространства $\mathcal{X}$ неположительной секционной кривизны экспоненциальное отображение* (1) *является накрывающим отображением.*

Доказательство. Согласно следствию 1 теоремы 1 лекции 19 достаточио доказать, что в условиях теоремы 1 экспоненциальное отображение (1) является растягивающим отображением, т. е. что для любых векторов $A, B \in \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ имеет место неравенство

$$|B| \leqslant |(d\exp_{p_0})_A B| \tag{2}$$

(отображение $(d\exp_{p_0})_A$ мы считаем здесь — в силу стандартного отождествления $\mathsf{T}_A(\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}) = \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ — отображением $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X} \to \mathsf{T}_p\mathcal{X}$, $p = \exp_{p_0} A$). При этом можно, конечно, считать, что $A\ ne 0$.

Так как

$$|(d\exp_{p_0})_A A| = |\dot\gamma(1)| = |\dot\gamma(0)| = |A|, \tag{3}$$

где γ — геодезическая $t \mapsto \exp_{p_0} tA$, то неравенство (2) заведомо выполнено при $B = A$, а значит, и тогда, когда вектор B коллинеарен вектору A. Поэтому *неравенство* (2) *достаточно доказать лишь для векторов* B, *ортогональных вектору* A. [Действительно, если $B = B_1 + B_2$, где вектор B_1 коллинеарен вектору A, а вектор B_2 ему ортогонален (и, значит, ортогонален вектору B_1), то по лемме Гаусса (предложение 1 лекции 12) векторы $C_1 = (d\exp_{p_0})_A B_1$ и $C_2 = (d\exp_{p_0})_A B_2$ ортогональны, и потому $|(d\exp_{p_0})_A B|^2 = |C_1 + C_2|^2 = |C_1|^2 + |C_2|^2$. С другой стороны, если $|B_2| \leqslant |C_2|$, то $|B|^2 = |B_1|^2 + |B_2|^2 \leqslant |C_1|^2 + |C_2|^2$, так как по доказанному $|B_1| = |C_1|$.]

С этой целью мы рассмотрим на геодезической γ: $t \mapsto \exp_{p_0} tA$ нормальное поле Якоби

$$X(t) = (d\exp_{p_0})_{tA} tB \tag{4}$$

(см. формулу (14) лекции 27).

Пусть $|B| = 1$ (что, конечно, общности не ограничивает), и пусть

$$f(t) = |X(t)|^2.$$

Так как неравенство (3) (при $|B| = 1$) равносильно неравенству $1 \leqslant f(1)$, то теорема 1 будет доказана, если мы докажем, что для любого t имеет место оценка $t^2 \leqslant f(t)$, для чего, в свою очередь, достаточно доказать, что при $t > 0$ имеет место аналогичная оценка

$$\frac{2}{t} \leqslant \frac{f'(t)}{f(t)} \tag{5}$$

для логарифмических производных, и что

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^2} = 1 \tag{6}$$

[если функция $u(t) = \ln f(t) - \ln t^2$ непрерывна при $t \geqslant 0$, равна нулю при $t = 0$ и $u'(t) \geqslant 0$ при $t > 0$, то $f(t) \geqslant t^2$ для всех $t \geqslant 0$]. Но так как

$$f'(t) = 2\left(\frac{\nabla X}{dt}(t), X(t)\right),$$

$$f''(t) = 2\left(\frac{\nabla^2 X}{dt^2}(t), X(t)\right) + 2\left(\frac{\nabla X}{dt}(t), \frac{\nabla X}{dt}(t)\right)$$

и по правилу Лопиталя

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{f'(t)}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{f''(t)}{2},$$

то

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t^2} = \left|\frac{\nabla X}{dt}(0)\right|^2 = |B|^2 = 1$$

[в нормальных координатах с центром в p_0 вектор $X(t)$ имеет те же координаты, что и вектор tB, ковариантные производные совпадают с обычными (поскольку $(\Gamma^i_{kj})_{p_0} = 0$; см. предложение 1 лекции 2, и отображение $(d\exp_{p_0})_0$ действует по равенству координат)].

Таким образом, для доказательства теоремы 1 нам осталось доказать лишь неравенство (5) (что фактически только и является основной трудностью; идея излагаемого ниже доказательства принадлежит, по-видимому, Рауху).

Пусть $t_0 > 0$. Обозначив для любого t через $\Pi_t^{t_0}$ параллельный перенос $\mathsf{T}_{\gamma(t)}\mathcal{X} \to \mathsf{T}_{\gamma(t_0)}\mathcal{X}$ вдоль геодезической γ, мы положим

$$Y(t) = \frac{t_0}{\sqrt{f(t_0)}}\left(\varphi\circ\Pi_t^{t_0}\right)X(t),$$

где $\varphi\colon \mathsf{T}_{\gamma(t_0)}\mathcal{X} \to \mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ — некоторая фиксированная изометрия, переводящая единичный вектор $X(t_0)/|X(t_0)|$ в единичный вектор B. Функцию $Y\colon t \mapsto Y(t)$, подобно функции $Y_0\colon t \mapsto tB$, мы можем считать векторным полем на луче $t \mapsto tA$ евклидова линеала $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$. Оба этих поля равны нулю при $t = 0$ и принимают одно и то же значение t_0B при $t = t_0$. Кроме того, поле Y_0 является (в евклидовой метрике линеала $\mathsf{T}_{p_0}\mathcal{X}$) нормальным полем Якоби, и потому минимально (см. предложение 6 лекции 27; на луче $t \mapsto tA$ сопряженных точек, очевидно, нет). Значит, в частности,

$$I_0^{t_0}(Y_0) \leqslant I_0^{t_0}(Y),$$

где

$$I_0^{t_0}(Y_0) = \int_0^{t_0} \left| \frac{dY_0}{dt}(t) \right|^2 dt = \int_0^{t_0} |B|^2 dt = t_0$$

и

$$I_0^{t_0}(Y) = \int_0^{t_0} \left| \frac{dY}{dt}(t) \right|^2 dt = \frac{t_0^2}{f(t_0)} \int_0^{t_0} \left| \frac{d\Pi_t^{t_0} X}{dt}(t) \right|^2 dt$$

(изометрия φ перестановочна, очевидно, с операцией дифференцирования вектор-функций). С другой стороны,

$$\frac{d\Pi_t^{t_0} X}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\Pi_{t+h}^{t_0} X(t+h) - \Pi_t^{t_0} X(t)}{h} =$$

$$= \Pi_t^{t_0} \left(\lim_{h \to 0} \frac{\Pi_{t+h}^{t} X(t+h) - X(t)}{h} \right) = \Pi_t^{t_0} \frac{\nabla X}{dt}(t)$$

(см. задачу 1 лекции 1), и потому

$$\left| \frac{d\Pi_t^{t_0} X}{dt}(t) \right| = \left| \frac{\nabla X}{dt}(t) \right|.$$

(параллельный перенос является изометрией).

Следовательно,

$$I_0^{t_0}(Y) = \frac{t_0^2}{f(t_0)} \int_0^{t_0} \left| \frac{\nabla X}{dt} \right|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t_0^2}{f(t_0)} \int_0^{t_0} \left(\left| \frac{\nabla X}{dt} \right|^2 - R(X, \dot\gamma, X, \dot\gamma) \right) dt = \frac{t_0^2}{f(t_0)} I_0^{t_0}(X)$$

(так как $K(\pi) \leqslant 0$ для плоскости π с направляющим бивектором $X \wedge \dot\gamma$, то $-R(X, \dot\gamma, X, \dot\gamma) = -K(\pi)|X \wedge \dot\gamma|^2 \geqslant 0$), где $I_0^{t_0}(X) = \left(\frac{\nabla X}{dt}(t_0), X(t_0)\right) = \frac{1}{2}f'(t_0)$ (см. формулу (16) лекции 27; напомним, что $X(t)$ является нормальным полем Якоби, равным нулю при $t = 0$).

Таким образом,

$$t_0 \leqslant I_0^{t_0}(Y) \leqslant \frac{t_0^2}{2}\frac{f'(t_0)}{f(t_0)},$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Каждое n-мерное связное и односвязное полное риманово пространство неположительной секционной кривизны диффеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$. Любые две точки такого пространства соединяются единственной геодезической.* □

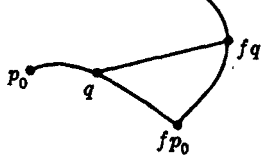
Следствия теоремы Картана — Адамара

Связное топологическое пространство $\mathcal{X}$ называется *пространством типа* $K(\pi, 1)$, если $\pi_m\mathcal{X} = 0$ при $m \geqslant 2$, а $\pi_1\mathcal{X} = \pi$. (О гомотопических группах $\pi_m\mathcal{X}$ см. лекцию IV.25.)

Следствие 2. *Каждое связное полное риманово пространство $\mathcal{X}$ неположительной секционной кривизны является пространством типа $K(\pi, 1)$.*

Доказательство. Как мы знаем (см. лекцию IV.27), каждое накрывающее отображение индуцирует в размерностях $m \geqslant 2$ изоморфизм гомотопических групп. С другой стороны, все гомотопические группы пространства $\mathbb{R}^n$ равны, очевидно, нулю. □

Задача 1. Докажите, что *фундаментальная группа $\pi_1\mathcal{X}$ связного полного риманова пространства $\mathcal{X}$ неположительной секционной кривизны не имеет элементов конечного порядка.* [Указание. Достаточно доказать, что *любая изометрия f: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ конечного порядка односвязного полного риманова пространства $\mathcal{X}$ неположительной секционной кривизны имеет неподвижную точку.* Пусть Γ — циклическая подгруппа группы $\operatorname{Iso}\mathcal{X}$, порожденная изометрией f, U — нормальная выпуклая окрестность с компактным замыканием, содержащая хотя бы одну орбиту группы Γ (такая окрестность, как легко видеть, существует),



и K — множество всех точек, Γ-орбиты которых содержатся в $\overline{U}$. Это множество выпукло, компактно и непусто. Поэтому оно содержит такую точку p_0, что

$$\rho(p_0, fp_0) \leqslant \rho(p, fp)$$

для любой точки $p \in K$. Если $fp_0 \neq p_0$, то точки p_0, fp_0 и f^2p_0 не лежат на одной геодезической (почему?) и, значит,

$$\rho(q, fq) < \rho(q, fp_0) + \rho(fp_0, fq) = \rho(q, fp_0) + \rho(p_0, q) = \rho(p_0, fp_0)$$

для любой точки q, принадлежащей кратчайшей, соединяющей точки p_0 и fp_0 (см. рис.), что противоречит выбору точки p_0.]

Из теоремы 1 вытекает также, что *каждое связное полное риманово пространство $\mathcal{X}$ неположительной секционной кривизны диффеоморфно пространству вида* $\mathbb{R}^n/\Gamma$, где Γ — некоторая дискретно действующая на $\mathbb{R}^n$ группа диффеоморфизмов (изоморфная фундаментальной группе $\pi_1\mathcal{X}$ пространства $\mathcal{X}$).

В частности, это верно для любого связного полного пространства постоянной кривизны $K \leqslant 0$.

Теорема Картана — Киллинга при $K = 0$

Для случая, когда пространство $\mathcal{X}$ плоско (является пространством постоянной кривизны $K = 0$), можно получить более точные результаты.

Действительно, для плоского пространства $\mathcal{X}$ функция $f(t) = (X(t), X(t))$, где, как и выше, X — поле (4) (построенное для некоторого вектора B), в силу уравнения Якоби (и равенства $R = 0$) обладает тем свойством, что

$$\frac{d^2f}{dt^2} = 2\left(\frac{\nabla X}{dt}, \frac{\nabla X}{dt}\right)$$

и $\dfrac{d^3f}{dt^3} = 0$.

Следовательно, $\dfrac{d^2f}{dt^2} = \mathrm{const}$, и, значит, $\left(\dfrac{\nabla X}{dt}, \dfrac{\nabla X}{dt}\right) = |B|^2$. Кроме того, так как $X(0) = 0$, то $f(0) = (X(0), X(0)) = 0$ и $\dot f(0) = 2(B, X(0)) = 0$. Следовательно, $f(t) = |B|^2t^2$, и потому $f(1) = |B|^2$, т. е. $|X(1)| = |B|$. Таким образом, в этом случае отображение $\exp_{p_0}$ локально изометрично. В частности, если пространство односвязно, то это отображение является изометрией.

Этим доказано следующее предложение.

Предложение 1. *Каждое связное и односвязное полное плоское пространство изометрично евклидову пространству* $\mathbb{R}^n$.

Это в точности теорема Картана — Киллинга (теорема 2 лекции 23) при $K = 0$.

Как мы знаем, из нее следует, что каждое связное полное пространство постоянной кривизны $K = 0$ не только диффеоморфно, но и изометрично пространству вида $\mathbb{R}^n/\Gamma$, где Γ — дискретно действующая группа изометрий.

Теорема Бохнера Интересные свойства имеют и римановы пространства $\mathcal{X}$, тензор Риччи которых отрицательно определен. Ограничиваясь случаем, когда пространство $\mathcal{X}$ компактно, мы докажем в качестве иллюстрации следующее предложение, известное как теорема Бохнера.

Предложение 2. *Группа изометрий* $\operatorname{Iso}\mathcal{X}$ *произвольного компактного риманова пространства* $\mathcal{X}$ *с отрицательно определенным тензором Риччи является конечной группой.*

Доказательству этого предложения мы предпошлем вывод нескольких иеобходимых формул.

Операторы A_X Для любого векторного поля $X \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ мы положим

$$A_X = \pounds_X - \nabla_X, \tag{7}$$

где $\pounds_X$ — производная Ли по полю X (см. определение 4 лекции III.17).

Так как (см. лекции 2 и III.17) оба оператора $\pounds_X$ и ∇_X являются перестановочными со свертками дифференцированиями алгебры тензорных полей на многообразии $\mathcal{X}$, то перестановочным со свертками дифференцированием является и оператор A_X.

При этом так как $\pounds_X f = Xf = \nabla_X f$ для любой функции $f \in \mathsf{F}\mathcal{X}$, то *на функциях оператор* A_X *равен нулю* и, значит, на векторных полях является $\mathsf{F}\mathcal{X}$-линейным отображением $\mathfrak{a}\mathcal{X} \to \mathfrak{a}\mathcal{X}$. В явном виде это отображение задается формулой

$$A_X Y = -\nabla_Y X, \qquad Y \in \mathfrak{a}\mathcal{X}. \tag{8}$$

[Действительно, согласно формуле (18) лекции III.17

$$A_X Y = [X, Y] - \nabla_X Y,$$

а в силу симметричности связности ∇ правая часть этой формулы равна (см. формулу (14) лекции 2) правой части формулы (8).]

По определению для любого дифференцирования A, любого тензорного поля S типа $(2,0)$ и любых векторных полей $X_1, X_2 \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ имеет место равенство

$$A(S\otimes X_1\otimes X_2) = AS\otimes X_1\otimes X_2+S\otimes AX_1\otimes X_2+S\otimes X_1\otimes AX_2,$$

и, значит, если дифференцирование A перестановочно со свертками, и равенство

$$A(S(X_1, X_2)) = (AS)(X_1, X_2) + S(AX_1, X_2) + S(X_1, AX_2)$$

(напомним, что значение $S(X_1, X_2)$ поля S на векторных полях X_1 и X_2 является не чем иным, как результатом полного свертывания тензора $S\otimes X_1\otimes X_2$ типа $(2,2)$). Поэтому если, кроме того, дифференцирование A на функциях равно нулю, то

$$(AS)(X_1, X_2) = -S(AX_1, X_2) - S(X_1, AX_2). \qquad (9)$$

В частности, *формула* (9) *имеет место для каждого дифференцирования вида* A_X.

Конечно, аналог формулы (9) справедлив и для любых тензорных полей S типа $(r,0)$ и, в частности, для дифференциальных форм. Например, если многообразие $\mathcal{X}$ ориентировано и ω — его риманов элемент объема, то для любых полей $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$

$$(A\omega)(X_1, \ldots, X_n) = -\sum_{i=1}^{n} \omega(X_1, \ldots, AX_i, \ldots, X_n).$$

Если поля $X_1, \ldots, X_n$ образуют базис модуля $\mathfrak{a}\mathcal{X}$ (над некоторой координатной окрестностью U или, более общо, над окрестностью U, тривиализирующей касательное расслоение $\tau\mathcal{X}$) и если $\|A^i_j\|$,— матрица оператора A в этом базисе, то в силу кососимметричности формы ω

$$\omega(X_1, \ldots, AX_i, \ldots, X_n) = A^i_i\omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$$

(суммирование по i не производится!) и, значит,

$$(A\omega)(X_1, \ldots, X_n) = -\left(\sum_{i=1}^{n} A^i_i\right) \omega(X_1, \ldots, X_n),$$

т. е.

$$A\omega = -(\operatorname{Tr} A)\omega \tag{10}$$

(на U, а потому и на всем $\mathcal{X}$).

Так как $\nabla_X \omega = 0$ (см. следствие 1 предложения 1 лекции 13), то при $A = A_X$ формула (10) приобретает вид

$$\mathcal{L}_X \omega = -(\operatorname{Tr} A_X)\omega.$$

По определению (см. формулу (15) лекции 13) это означает, что

$$\operatorname{div} X = -\operatorname{Tr} A_X. \tag{11}$$

Поскольку $A_X Y = -\nabla_Y X$ (см. формулу (8)), эту формулу можно переписать в следующем виде:

$$\operatorname{div} X = \operatorname{Tr} [Y \mapsto \nabla_Y X]. \tag{12}$$

Пусть теперь поле X аффинно, и потому (см. предложение 1 лекции 8) для любых полей $Y, Z \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$ имеет место равенство

$$[X, \nabla_Y Z] = \nabla_Y [X, Z] + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

т. е. равенство (напомним, что $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$; см. формулу (18) лекции III.17)

$$\mathcal{L}_X \nabla_Y Z = \nabla_Y \mathcal{L}_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z \tag{13}$$

(в операторной форме $[\mathcal{L}_X, \nabla_Y] = \nabla_{[X,Y]}$).

Тогда

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \mathcal{L}_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \mathcal{L}_X Z = \\ &\qquad = -A_X \nabla_Y Z + \nabla_Y A_X Z = A_X A_Z Y + \nabla_Y A_X Z \end{aligned}$$

(см. формулу (8)). Меняя обозначения и переходя к следам, мы получаем отсюда, что

$$\operatorname{Tr} [Z \mapsto R(Y, Z)X] = \operatorname{Tr} A_X A_Y + \operatorname{Tr} [Z \mapsto \nabla_Z A_Y X].$$

Левая часть этой формулы равна $-\operatorname{Ric}(X, Y)$ (см. формулу (26) лекции 2), а второе слагаемое справа равно $\operatorname{div}(A_Y X)$. Таким образом,

$$\operatorname{div}(A_Y X) = -\operatorname{Ric}(X, Y) - \operatorname{Tr} A_X A_Y.$$

При $Y = X$ мы получаем, что

$$\operatorname{div}(A_X X) = -\operatorname{Ric}(X, X) - \operatorname{Tr} A_X^2.$$

В случае, когда многообразие $\mathcal{X}$ компактно и ориентируемо, отсюда в силу формулы Грина (см. формулу (18) лекции 13) следует, что

$$\int_{\mathcal{X}} (\operatorname{Ric}(X, X) + \operatorname{Tr} A_X^2)\, dV = 0 \tag{14}$$

для любого аффинного поля X.

Инфинитезимальный вариант теоремы Бохнера В частности, эта формула имеет место для любого поля Киллинга $X \in \mathfrak{iso}\,\mathcal{X}$, т. е. (см. задачу 7 лекции 19) такого векторного поля X на $\mathcal{X}$, что $\mathcal{L}_X g = 0$. Но если $\mathcal{L}_X g = 0$, то и $A_X g = 0$ (поскольку $\nabla_X g = 0$) и, значит, (см. формулу (9) при $S = g$)

$$(A_X X_1, X_2) + (X_1, A_X X_2) = 0 \tag{15}$$

для любых полей $X_1, X_2 \in \mathfrak{a}\mathcal{X}$, т. е. оператор A_X кососимметричен. (Заметим, что этот вывод полностью обратим, и потому *оператор A_X тогда и только тогда кососимметричен, когда X является полем Киллинга.*)

Из (15) следует, что в ортонормированном базисе $X_1, \ldots, X_n$ матрица $\|A^i_j\|$ оператора A_X кососимметрична, и поэтому след $\operatorname{Tr} A_X^2$ оператора A_X^2 выражается формулой

$$\operatorname{Tr} A_X^2 = A^i_j A^j_i = -\sum_{i,j=1}^{n} (A^i_j)^2$$

и, значит, неположителен:

$$\operatorname{Tr} A_X^2 \leqslant 0$$

(причем $\operatorname{Tr} A_X^2 = 0$ только при $A_X = 0$).

Следовательно, если тензор Риччи отрицательно определен ($\operatorname{Ric}(X, X) \leqslant 0$, причем равенство имеет место только при $X = 0$), то равенство (14) возможно только при $\operatorname{Ric}(X, X) = 0$ (и $\operatorname{Tr} A_X^2 = 0$), т. е. только при $X = 0$.

Этим доказано следующее предложение.

Предложение 3 (инфинитезимальный вариант теоремы Бохнера). *На компактном ориентированном римановом пространстве $\mathcal{X}$ с отрицательно определенным тензором Риччи не существует отличных от нуля полей Киллинга:*

$$\operatorname{iso} \mathcal{X} = 0. \qquad \square$$

Задача 2. Покажите, что это верно и для неориентируемого пространства $\mathcal{X}$. [Указание. Перейдите к ориентированному двулистному накрывающему; см. лекцию IV.7.]

Поскольку алгебра Ли $\operatorname{iso} \mathcal{X}$ всех полей Киллинга является алгеброй Ли группы изометрий $\operatorname{Iso} \mathcal{X}$ (см. лекцию 19), предложение 3 означает, что *группа изометрий* $\operatorname{Iso} \mathcal{X}$ *пространства* $\mathcal{X}$ *дискретна*. Поэтому для доказательства теоремы Бохнера достаточно доказать, что *для любого компактного риманова пространства* $\mathcal{X}$ *группа* $\operatorname{Iso} \mathcal{X}$ *компактна.*

Группа изометрий компактного пространства

Оказывается, что последнее утверждение имеет чисто топологический характер.

Предложение 4. *Группа изометрий* $\operatorname{Iso} \mathcal{X}$ *произвольного компактного метрического пространства* $\mathcal{X}$ *является — относительно топологии поточечной сходимости — компактным топологическим пространством.*

Доказательство. Нам понадобятся три элементарные общетопологические теоремы, которые мы сформулируем в качестве задач.

Задача 3. Докажите, что *каждое компактное метрическое пространство* $\mathcal{X}$ *содержит счетное всюду плотное множество, т. е. такое счетное множество C, что $\overline{C} = \mathcal{X}$.* [Указание. Для любого $n \geqslant 1$ существует конечное покрытие пространства $\mathcal{X}$, состоящее из шаровых $(1/n)$-окрестностей. Обозначив множество всех центров этих окрестностей через C_n, положите $C = \bigcup C_n$.]

Задача 4. Докажите, что

1) *для любого компактного метрического пространства* $\mathcal{X}$ *формула*

$$\check{\rho}(\varphi, \psi) = \sup_{p \in \mathcal{X}} \rho(\varphi(p), \psi(p)), \qquad \varphi, \psi \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

определяет метрику в множестве всех непрерывных отображений $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$;

2) *отвечающая этой метрике топология совпадает с топологией поточечной сходимости.* [Указание. Это означает, что последовательность отображений φ_n: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ тогда и только тогда равномерно сходится, когда она сходится в каждой точке $p \in \mathcal{X}$.]

Задача 5. Докажите, что *метрическое пространство тогда и только тогда компактно, когда каждая последовательность его точек содержит сходящуюся подпоследовательность.* [Указание. См. теорему Гейне — Бореля из курса анализа.]

Из утверждений задач 4 и 5 следует, что для доказательства предложения 4 нам достаточно доказать следующие два утверждения.

А. *Любая последовательность $\{\varphi_n\}$ изометрий компактного метрического пространства $\mathcal{X}$ содержит сходящуюся (в пространстве непрерывных отображений $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$) подпоследовательность.*

Б. *Предел φ любой сходящейся последовательности $\{\varphi_n\}$ изометрий пространства $\mathcal{X}$ является изометрией.*

Доказательство утверждения А. Пусть $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ — счетное всюду плотное подмножество пространства $\mathcal{X}$. Так как пространство $\mathcal{X}$ компактно, то последовательность $\{\varphi_n\}$ содержит такую подпоследовательность $\{\varphi_{n_i}\}$, что последовательность точек $\{\varphi_{n_i}(c_1)\}$ сходится. Положив $\varphi_{n_i} = \varphi_{1,i}$, мы аналогично получим, что последовательность $\{\varphi_n\}$ содержит подпоследовательность $\{\varphi_{2,i}\}$, для которой сходится последовательность точек $\{\varphi_{2,i}(c_2)\}$, и т. д. Продолжая процесс, мы для любого $k \geqslant 1$ получим такую подпоследовательность $\{\varphi_{k,i}\}$ последовательности $\{\varphi_n\}$, что последовательность точек $\{\varphi_{k,i}(c_k)\}$ сходится. Тогда подпоследовательность $\{\psi_n\}$, где $\psi_n = \varphi_{n,n}$, будет обладать тем свойством, что $\{\psi_n(c_k)\}$ сходится для любой точки c_k, $k \geqslant 1$. (Это известный диагональный процесс Кантора.)

Если теперь $\varepsilon > 0$, $p \in \mathcal{X}$, c — такая точка из C, что $\rho(p, c) < \varepsilon$ и N — такой номер, что $\rho(\psi_n(c), \psi_m(c)) < \varepsilon$ при $n, m > N$, то

$$\rho(\psi_n(p), \psi_m(p)) \leqslant \rho(\psi_n(p), \psi_n(c)) + \\ + \rho(\psi_n(c), \psi_m(c)) + \rho(\psi_m(c), \psi_m(p)) \leqslant 3\varepsilon$$

при $n, m > N$ (так как ψ_n и ψ_m — изометрии, то

$\rho(\psi_n(p), \psi_n(c)) = \rho(p, c) < \varepsilon$ и аналогично $\rho(\psi_m(c), \psi_m(p)) < < \varepsilon$). Это означает, что последовательность $\{\psi_n(p)\}$ фундаментальна. Следовательно, эта последовательность сходится (каждое компактное метрическое пространство полно). Таким образом, последовательность $\{\psi_n\}$ сходится всюду на $\mathcal{X}$. □

Доказательство утверждения Б. Согласно утверждению А последовательность изометрий $\{\varphi_n^{-1}\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{\varphi_{n_i}^{-1}\}$. Пусть φ' — ее предел.

Ясно — по непрерывности, — что

$$\rho(\varphi(p), \varphi(q)) = \rho(p, q) = \rho(\varphi'(p), \varphi'(q)) \tag{16}$$

для любых точек $p, q \in \mathcal{X}$. В частности, для любой точки $p \in \mathcal{X}$

$$\rho(\varphi'(\varphi(p)), p) = \lim_{i\to\infty} \rho(\varphi_{n_i}^{-1}(\varphi(p)), p) =$$
$$= \lim_{i\to\infty} \rho(\varphi(p), \varphi_{n_i}(p)) = \rho(\varphi(p), \varphi(p)) = 0$$

(напомним, что по условию последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится), и потому $\varphi'(\varphi(p)) = p$, т. е. $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}$. Аналогично доказывается, что $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}$. Следовательно, отображение φ биективно. Удовлетворяя соотношению (16), оно является изометрией. □

[Заметим, что в случае, когда $\mathcal{X}$ является римановым пространством, утверждение Б — составляющее предмет задачи 6 лекции 19 — тривиальным образом верно, поскольку предел изометрий является в этом случае аффиннитетом (принадлежит группе Ли $\mathrm{Aff}\,\mathcal{X}$), и потому заведомо биективен.]

Задача 6. Докажите, что $\mathrm{Iso}\,\mathcal{X}$ *является топологической группой.* [Указание. В доказательстве нуждается не только непрерывность умножения, но и непрерывность отображения обращения $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$.]