ПРЕДИСЛОВИЕ

Хотя настоящая книга является непосредственным продолжением книги этой серии *) и, подобно ей, предназначена служить учебником по расширенному курсу геометрии для студентов-математиков университетов, но в основном она независима — все необходимые определения из Семестра IV заново изложены в лекции 1, — и потому доступна читателю, лишь приступающему к изучению римановой геометрии (но, конечно, мотивировки и общие перспективы будут при этом выявлены не сразу и, вообще говоря, лишь частично). Также заново изложены необходимые сведения из беззаконно вклинившегося в серию и давно ставшего библиографической редкостью Семестра V **), по существу мало связанного с другими Семестрами.

По известным причинам выход в свет этого Семестра был задержан почти на десять лет. Чтобы не откладывать публикацию еще более, было решено издать его в первоначальном виде без каких-либо изменений, хотя, безусловно, сейчас я бы многое изложил совсем по-другому.

Общие принципы архитектуры книги (см. предисловие к Семестру IV) сохранены прежними. В частности, имеется в виду, что на практике лишь часть материала — зависящая от вкусов и намерения лектора — будет излагаться в аудитории. Фактически, нынешний учебный план мехмата предполагает, что в одном учебном семестре должны быть изложены основные темы из обоих Семестров IV и V (и еще довольно много иного материала), так что название «Семестр VI» имеет довольно условный характер и выражает главным образом надежду автора на время, когда курс геометрии займет на мехмате подобающее ему место. (За истекшие годы здесь произошли определенные — но все еще недостаточные — сдвиги.)

---

*) Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1988.

**) Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1982.

Как и в Семестре IV, лекции несколько увеличены по сравнению с устными. По-прежнему имеется в виду, что лектор должен произвести определенный отбор и часть материала либо опускать, либо излагать в обзорном порядке.

Первые десять лекций посвящены геометрии пространств аффинной связности. В лекции 1 излагаются основные свойства геодезических в этих пространствах. Лекция 2 посвящена формализму ковариантных производных, тензору кручения и тензору кривизны. Бо́льшая часть лекции 3 посвящена геометрии подмногообразий пространства аффинной связности (формулы Гаусса — Вейнгартена и т. п.).

В лекции 4 выводятся структурные уравнения Картана в полярных координатах. Вторая половина этой лекции посвящена локально симметрическим пространствам аффинной связности.

Глобально симметрические пространства рассматриваются в лекции 5 (и в начале лекции 6). В частности, здесь доказывается их совпадение с симметрическими пространствами в смысле Лооса. В основной части лекции 6 общая теория иллюстрируется на примере групп Ли. В лекции 7 объясняется — этот материал приведен петитом — язык категорий и функторов, а также излагаются по-существу, без доказательств, основные теоремы о связи между группами и алгебрами Ли из семестра V. В лекциях 8, 9 эти теоремы обобщаются на случай симметрических пространств, а в лекции 10 — на случай конечномерных алгебр Ли векторных полей.

В сокращенном обязательном курсе из всего этого материала может быть изложен, и то лишь частично, материал только первых трех лекций (с добавлением отдельных примеров и замечаний из остальных лекций). Больше двух реальных устных лекций для этого, как правило, не требуется.

С лекции 11 начинается собственно риманова геометрия. Эта лекция, вместе со следующей лекцией 12, должна, по-видимому, входить в любой обязательный курс (можио лишь опустить конец лекции 11).

Лекции 13 и 14 посвящены, в основном, элементарной теории поверхностей. Основное внимание уделено здесь изотермическим координатам и минимальным поверхностям.

В лекции 15 — также обязательной для включения в курс, хотя, вообще говоря, с некоторыми сокращениями — доказываются основные свойства тензора кривизны.

Главная тема лекции 16 — формула Гаусса — Бонне. В следующей лекции 17 без доказательства — и с существенным использованием материала Семестра IV — излагаются ее обобщения на римановы пространства большей размерности.

В этой же лекции рассматривается тензор Риччи риманова пространства и вводятся пространства Эйнштейна.

Лекция 18 посвящена конформным преобразованиям метрики. Особое внимание уделено случаю $n = 2$. В первой половине лекции 19 рассматриваются изометрии и поля Киллинга, а ее остаток посвящен специализации на случай подмногообразий риманова пространства конструкций из лекции 3. В лекции 20 рассматриваются некоторые специальные классы подмногообразий (локально симметрические и компактные) и начинается теория гиперповерхностей, переходящая в лекцию 21, целиком посвященную этой теме.

Лекции 22 и 23 посвящены пространствам постоянной кривизны, лекция 24 — четырехмерным римановым пространствам, а лекции 25 и 26 — инвариантным метрикам на группах Ли.

Лекция 27 посвящена теории Якоби второй вариацин, а заключительные лекции 28 и 29 — ее приложениям (доказываются, в частности, теорема Майерса и теорема Картана — Адамара). Лекция 29 завершается доказательством теоремы Бохнера о конечности группы изометрий компактного риманова пространства с отрицательно определенным тензором Риччи (а также необходимой для этого общетопологической теоремы о компактности группы изометрий произвольного компактного метрического пространства).

При написании этого Семестра мною были использованы известные учебники и монографии (П. К. Рашевского, Ш. Кобаяси и К. Номидзу, Лооса и т. п.), а также разнообразные журнальные статьи, но в тексте на них ссылок нет (так как для специалистов они не инттересны, а для студентов не нужны).