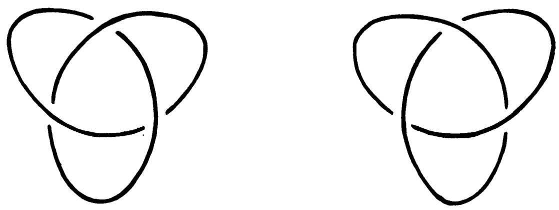
2

Узлы и зацепления

Важным объектом изучения в топологии являются узлы. *Узел* можно представить себе как веревку, концы которой соединены. Один из наиболее простых узлов изображен на рис. 2.1 (а). Он называется *трилистник*, а точнее, *правый трилистник*. Есть еще *левый трилистник*; он изображен на рис. 2.1 (б). Можно доказать, что левый трилистник и правый трилистник — разные узлы, т.е. их нельзя продеформировать друг в друга. Под деформацией узла мы подразумеваем деформацию его как эластичного тела.



(а) (б)

Рисунок 2.1

Проекции одного и того же узла на разные плоскости имеют разный вид.

▹ **Задача 2.1.** Нарисуйте проекции на плоскости Oxy и Oxz трилистника, изображенного на рис. 2.2.

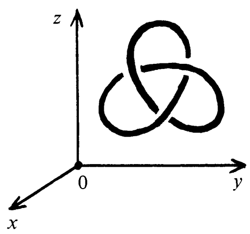


Рисунок 2.2

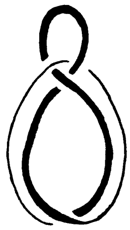


Рисунок 2.3

▹ **Задача 2.2.** Докажите, что кривая, заданная в координатах $Oxyz$ параметрическими уравнениями

$$x = \cos t(3\cos t + 2),\ \ y = 5\cos t \sin t,\ \ z = \sin t(25\cos^2 t - 1),$$

является трилистником.

Вслед за трилистником по сложности идет узел *восьмерка*, своей формой напоминающий цифру 8 (рис. 2.3).

Деформируя узел, его можно сильно запутать. А если даже такой простой узел, как трилистник или восьмерка, запутан не очень сильно, то распознать его бывает нелегко. Например, не сразу заметно, что на рис. 2.4 в верхнем ряду изображен один и тот же узел (трилистник) и в нижнем ряду тоже (восьмерка). Более того, некоторые изображения трилистника весьма похожи на изображения восьмерки. Мы разместили такие диаграммы близ друг друга.

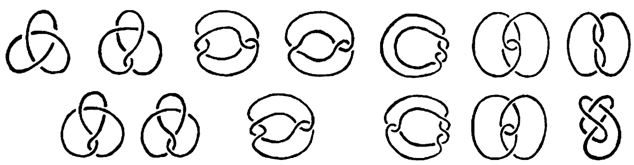


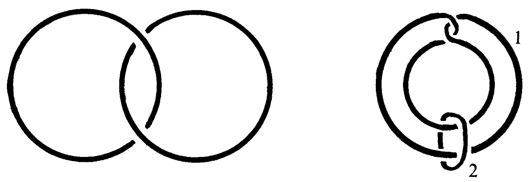
Рисунок 2.4

▹ **Задача 2.3.** а) Докажите, что все узлы, изображенные в верхнем ряду рис. 2.4, можно продеформировать друг в друга.

б) Докажите аналогичное утверждение для узлов нижнего ряда.

Левый трилистник получается из правого трилистника зеркальной симметрией (т.е. симметрией относительно плоскости). Как мы уже говорили, эти узлы нельзя продеформировать друг в друга. Узел восьмерка при зеркальной симметрии ведет себя иначе. Он переходит в узел, который можно продеформировать в исходный узел. В самом деле, на рис. 2.4 в нижнем ряду первые два узла слева зеркально симметричны.

Если взять не одну веревку, а несколько, и у каждой из них соединить концы, то получим *зацепление.* Два примера зацеплений изображены на рис. 2.5. Первое из них (рис. 2.5 (а)) называют *зацеплением Хопфа*, а второе (рис. 2.5 (б)) — *зацеплением Уайтхеда.*



(а) (б)

Рисунок 2.5

Для зацепления Хопфа существует симметрия относительно прямой, меняющая местами веревки (или, как сказал бы тополог, меняющая местами *компоненты* зацепления). Симметрия относительно прямой в пространстве является поворотом на 180° относительно этой прямой. Поэтому существует деформация, меняющая местами компоненты зацепления Хопфа. Может показаться, что для зацепления Уайтхеда такой деформации не существует. В самом деле, веревку 1 можно перерезать (в верхней части на нашем рисунке), затем провести через этот разрез ту же самую веревку равно один раз и вновь соединить концы перерезанной веревки. После этого веревки, из которых состоит зацепление, можно будет расцепить. Как проделать эту операцию для веревки 1, очевидно. Но разве можно сделать то же самое для веревки 2? Оказывается, что да.

▹ **Задача 2.4.** а) Расположите зацепление Уайтхеда так, чтобы его компоненты были симметричны относительно некоторой прямой.

б) Проделайте для компоненты 2 зацепления Уайтхеда описанную выше операцию перерезания и соединения концов перерезанной веревки.

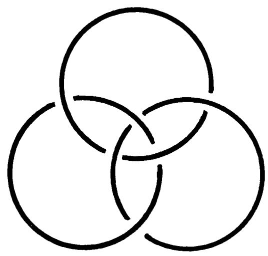
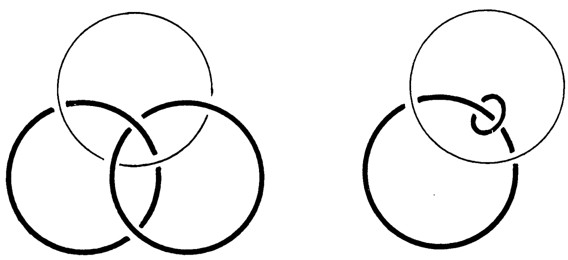


Рисунок 2.6

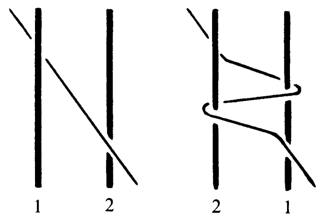
Сразу несколькими интересными свойствами обладает зацепление, изображенное на рис. 2.6. Его называют *кольца Борромео*, потому что такие кольца нарисованы на гербе знатного итальянского рода Борромео. Одно из свойств колец Борромео заключается в том, что эти кольца попарно не зацеплены, т.е. после удаления любого кольца остается пара незацепленных колец. Другое свойство колец Борромео еще более удивительно. Если любые два из колец Борромео зацепить простейшим образом (т.е. так, чтобы они образовали зацепление Хопфа), то после этого третье кольцо можно будет снять с этого зацепления (рис. 2.7).



(а) (б)

Рисунок 2.7

Это свойство колец Борромео можно сформулироват так, что оно будет выглядеть почти как фокус. Кольца Борромео попарно не зацеплены, поэтому два кольца можно развести в разные стороны. Третье кольцо при этом как-то обовьется вокруг них. Нарисуем, как именно оно будет расположено. Для этого выясним сначала, что происходит с веревкой, проходящей между двумя прутами (рис. 2.8 (а)), при перестановке этих прутов, в процессе которой прут 2 проходит над прутом 1. Результат изображен на рис. 2.8 (б). Теперь легко понять, что происходит с третьим кольцом Борромео при разведении двух колец в разные стороны (см. рис. 2.9). Будем считать, что те два кольца, которые мы раздвинули, представляют собой жесткие обручи с какими-либо устройствами, позволяющими при желании сцеплять и расцеплять их (например, с навинчивающимися цилиндрами), а третье кольцо представляет собой веревку (рис. 2.10 (а)). При этом веревку снять с обручей нельзя. Но если мы зацепим обручи (рис. 2.10 (б)), то веревку можно будет снять! В самом деле, на рис. 2.10 (б) изображено то же самое зацепление, что и на рис. 2.7.



(а) (б)

Рисунок 2.8

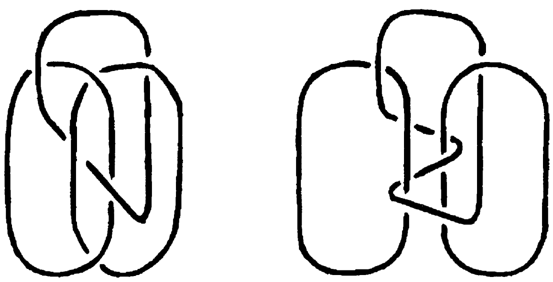
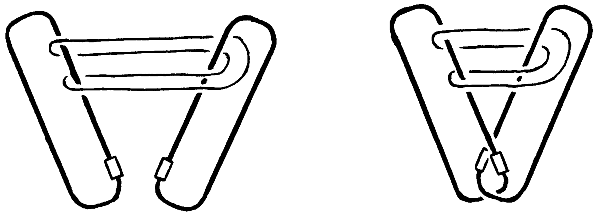


Рисунок 2.9



(а) (б)

Рисунок 2.10

Этот пример должен предостеречь альпинистов. Им часто приходится пользоваться специальными крючками, которые позволяют сцепливать веревки. Эти крючки называют карабинами, потому что аналогичными крючками снабжались ремни карабинов (огнестрельного оружия), чтобы эти ремни было удобно пристегивать и отстегивать. Альпинистские крючки-карабины устроены так, что расцепиться сами они не могут. А для того, чтобы они не могли сами зацепиться, их нужно устанавливать на предохранитель. Многие альпинисты считают, что опасна лишь ситуация, когда карабины расцепляются, а при зацеплении карабинов ничего страшного случиться не может. Поэтому к установке на предохранитель они иногда относятся небрежно. Это, как мы видели, может привести к трагическим последствиям.

Решения

▸ **2.1.** Эта задача, конечно, не вполне определенная. Проекция узла на одну координатную плоскость не задает его проекции на другие координатные плоскости. Однако на эти проекции накладываются весьма жесткие ограничения; проекции не могут быть произвольными. Одно из возможных решений изображено на рис. 2.11.

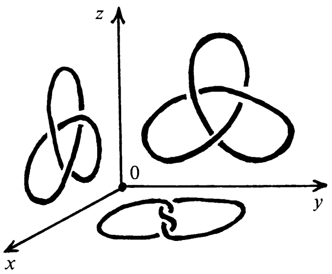


Рисунок 2.11

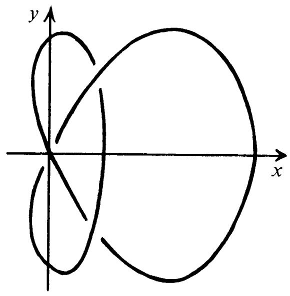


Рисунок 2.12

▸ **2.2.** Для доказательства удобнее всего рассмотреть проекцию на плоскость Oxy (рис. 2.12). При этом координата z используется для выяснения того, какая часть кривой расположена сверху, а какая снизу.

▸ **2.3.** Проще всего изготовить трилистник и восьмерку из веревки или шнурка, а затем попытаться получить из этих узлов все узлы, изображенные на рис. 2.4. Выполнить некоторые преобразования узла восьмерка вам поможет рис. 2.13.

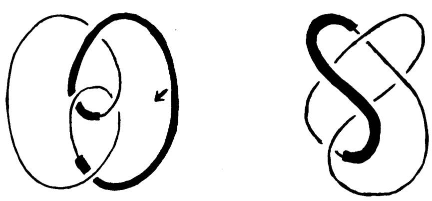
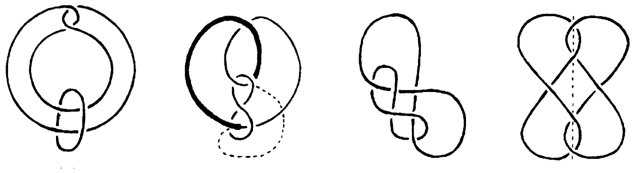


Рисунок 2.13

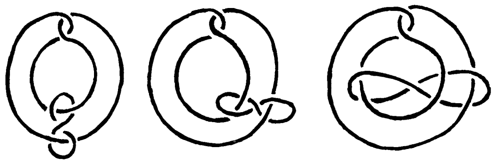
▸ **2.4.** а) См. рис. 2.14.

б) Проведем веревку через разрез, как показано на рис. 2.15 (а). Процесс расцепления веревок изображен на рис. (б)–(е).



(а) (б) (в) (г)

Рисунок 2.14



(а) (б) (в)

(г) (д) (е)

Рисунок 2.15