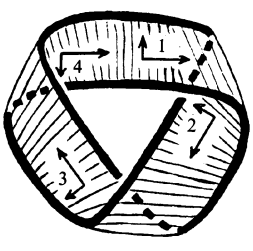
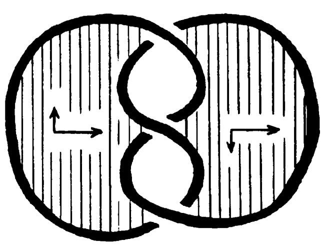
3

Заклеивание узлов и зацеплений

Мы будем говорить, что узел *заклеен* пленкой, если задана несамопересекающаяся поверхность, краем которой служит этот узел. Два примера заклеивания трилистника пленкой изображены на рис. 3.1. Между этими пленками есть существенная разница: пленка (а) неориентируема, а пленка (б) ориентируема. Объясним, что это означает. Будем считать пленку прозрачной. Пусть по ней перемещается пара перпендикулярных векторов, касающихся пленки, — длинный вектор и короткий. В результате обхода $1 \to 2 \to 3 \to 4$ вдоль пленки (а) мы получим пару векторов, которую нельзя совместить поворотом с исходной парой (если обход осуществлять не мысленно, а



(а)

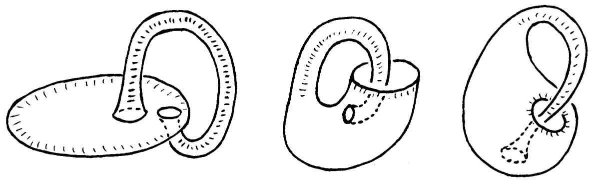


(б)

Рисунок 3.1

воспользоваться, например, пластмассовой фигуркой, то она перейдет на другую сторону пленки). Для пленки (б) такого обхода не существует, т.е. при любом обходе, не пересекающем край пленки, пара векторов переходит в пару векторов, которую можно поворотом совместить с исходной парой. Пленки типа (а) называют *неориентируемыми*, а пленки типа (б) — *ориентируемыми*.

Плоскую пленку, заклеивающую окружность (т.е. натянутую на нее), легко превратить в неориентируемую пленку (рис. 3.2 (а)). Отметим, что эта конструкция позволяет любую ориентируемую пленку с краем превратить в неориентируемую пленку с тем же самым краем. На рис. 3.2 (а)–(в) показано, как полученную пленку продеформировать в бутылку Клейна, из которой вырезан *диск*, т.е. круг. Здесь мы забегаем несколько вперед; о том, что такое бутылка Клейна, рассказывается в § 9.



(а) (б) (в)

Рисунок 3.2

▹ **Задача 3.1.** Докажите, что окружность можно заклеить также и *листом Мёбиуса* (рис. 3.3), т.е. лист Мёбиуса

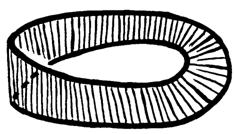


Рисунок 3.3

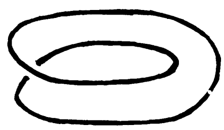
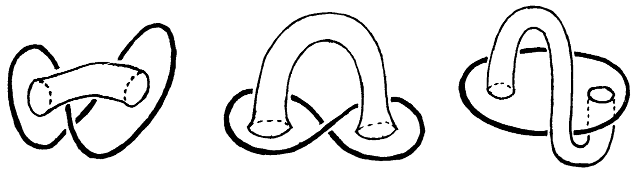


Рисунок 3.4

можно продеформировать так, что его граница станет окружностью, лежащей в некоторой плоскости.

Из рис. 3.3 видно, что кривую, изображенную на рис. 3.4, можно заклеить листом Мёбиуса. Ту же самую кривую можно заклеить бутылкой Клейна с вырезанным диском. Как это сделать, показано на рис. 3.5 (а)–(в); при этом на рис. 3.5 (а) кривая изображена слегка повернутой.



(а) (б) (в)

Рисунок 3.5

▹ **Задача 3.2.** а) Докажите, что кривую, изображенную на рис. 3.4, можно заклеить также и ориентируемой поверхностью, а именно, диском.

б) Докажите, что кривую, изображенную на рис. 3.6, тоже можно заклеить диском.

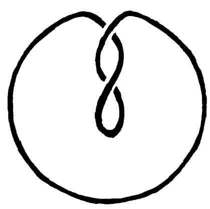


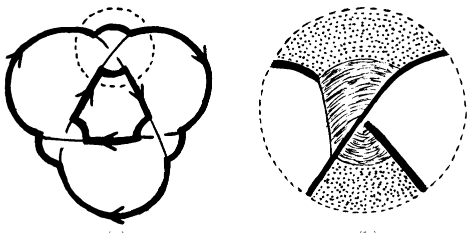
Рисунок 3.6

В 1930 г. была опубликована совместная статья Ф. Франкля и Л. С. Понтрягина, в которой было доказано, что любое зацепление можно заклеить ориентируемой пленкой. Четыре года спустя была опубликована статья Зейферта с другим доказательством этой теоремы. Поэтому ориентируемую поверхность, заклеивающую зацепление (или натянутую на зацепление), обычно называют *поверхностью Зейферта*.

Мы докажем эту теорему методом Зейферта. Но сначала остановимся еще на одной задаче, чтобы показать неочевидность теоремы.

▹ **Задача 3.3.** Докажите, что восьмерку можно заклеить ориентируемой поверхностью.

Перейдем к описанию *алгоритма Зейферта.* Будем считать, что узел расположен вблизи своей диаграммы, т.е. он почти весь лежит в плоскости диаграммы и лишь на перекрестках выходит из нее. Зададим направление обхода узла. Будем обходить узел в заданном направлении, перепрыгивая на каждом перекрестке с одной ветви на другую так, чтобы обход продолжался в заданном направлении. Путь может замкнуться до того, как будет обойден весь узел. Получив замкнутый путь, продолжаем обход оставшейся части узла. На рис. 3.7 (а) изображены такие замкнутые пути для трилистника.



(а) (б)

Рисунок 3.7

Заклеим эти пути дисками, расположенными, например, над плоскостью. Участок пути, соответствующий перепрыгиванию, можно при этом расположить как под плоскостью, так и над ней. Поэтому можно добиться того, чтобы на каждом перекрестке один такой участок был расположен под плоскостью, а другой над ней. Тогда на перекрестках полученные пленки можно соединить так, как показано на рис. 3.7 (б).

Аналогичным способом можно заклеить любой узел. В самом деле, заклеивание не двух, а нескольких замкнутых путей дисками особых трудностей не вызывает. Эту заклейку можно начать с любого из внутренних путей, т.е. с пути, не содержащего внутри себя незаклеенных путей. Затем на каждом шаге следует заклеивать путь, не содержащий внутри себя незаклеенных путей. При этом заклеивающий диск всегда можно расположить выше уже имеющихся дисков.

Остается лишь один вопрос, но он очень важен. Почему в результате получается ориентируемая поверхность? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно сначала дать другое определение ориентируемости. Исходя непосредственно из первоначального определения ориентируемости, трудно доказать ориентируемость какой-либо поверхности. В самом деле, для этого нужно рассмотреть все возможные ее обходы, а их слишком много.

Прежде всего докажем, что плоскость представляет собой ориентируемую поверхность. Предположим, что пара скрепленных векторов движется по плоскости, причем движение начинается и заканчивается в одной и той же точке. Нужно доказать, что направление вращения от первого вектора ко второму в исходном положении совпадает с направлением вращения в конечном положении. На плоскости любой замкнутый путь можно стянуть в точку, рассматривая гомотетичные ему пути. При этом в соответственных точках рассматриваемых путей можно приложить векторы, полученные друг из друга параллельным переносом (рис. 3.8). В результате движение векторов по пути, стянутому в точку, сводится к их вращению вокруг этой точки. Ясно, что направление вращения от первого вектора ко второму при этом не изменяется. Таким образом, плоскость ориентируема.

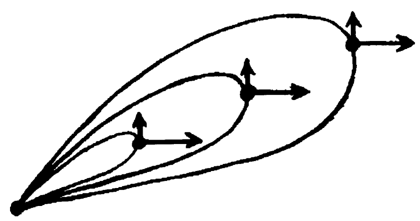
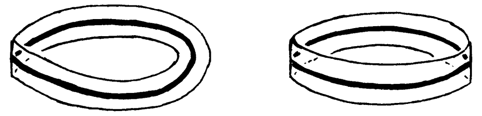


Рисунок 3.8

Нетрудно показать, что на любой поверхности при обходе вдоль пути, который можно стянуть в точку, направление вращения от первого вектора ко второму не изменяется. Дело в том, что если у двух пар векторов их первые векторы мало отличаются друг от друга, и вторые векторы тоже, то эти пары задают одно и то же направление вращения. Поэтому если один обход совершается лишь чуть-чуть иначе, чем другой, то полученное в результате направление вращения будет одно и то же для обоих обходов. Следовательно, в процессе стягивания пути итоговое направление вращения изменяться не будет. Отметим также, что итоговое направление вращения зависит лишь от траектории, по которой движутся векторы; оно не зависит от того, как именно они при этом движутся.



(а) (б)

Рисунок 3.9

Направление вращения может измениться лишь при обходе вдоль пути, который нельзя стянуть в точку. При обходе листа Мёбиуса вдоль пути, изображенного на рис. 3.9 (а), направление вращения изменяется. Следовательно, этот путь нельзя стянуть в точку.

Отметим, что если путь нельзя стянуть в точку, то обход вдоль него не обязательно изменяет направление вращения. Например, обход цилиндра вдоль пути, изображенного на рис. 3.9 (б), сохраняет направление вращения, хотя и этот путь нестягиваем.

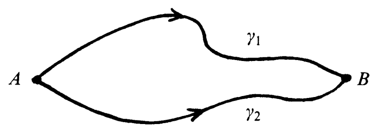


Рисунок 3.10

Два пути γ_1 и γ_2, идущих из точки A в точку B, можно рассматривать как один путь γ с началом и концом в точке A (рис. 3.10). Для этого нужно один из этих путей рассматривать не как путь из A в B, а как путь из B в A. Легко проверить, что следующие два условия эквивалентны:

1. Обход вдоль пути γ сохраняет направление вращения.

2. Направление вращения, перенесенное из A в B вдоль пути γ_1, совпадает с направлением вращения, перенесенным из A в B вдоль пути γ_2.

Теперь определение ориентируемости можно сформулировать в более удобном для применения виде. Будем говорить, что на поверхности задана *ориентация*, если в каждой ее точке задано направление вращения, причем переносы вдоль любого пути переводят эти направления вращения друг в друга. При этом, конечно, можно ограничиться переносами вдоль сколь угодно коротких путей (потому что длинный путь состоит из нескольких коротких). Поверхность, на которой можно задать ориентацию, называют *ориентируемой*. Это определение эквивалентно нашему первоначальному определению ориентируемости.

Еще более удобное определение ориентируемости можно получить, указав явный способ задания ориентации. Разрежем поверхность на криволинейные многоугольники. Чтобы задать ориентацию на многоугольнике, достаточно задать направление обхода его границы. На соседних многоугольниках направления обхода должны быть согласованы так, как показано на рис. 3.11. Поверхность будет ориентируемой, если на всех многоугольниках можно задать согласованные направления обхода.

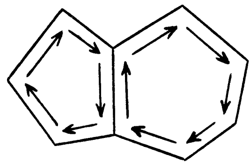


Рисунок 3.11

Используя такое определение ориентируемости, легко доказать ориентируемость поверхности, которая получается с помощью алгоритма Зейферта. В самом деле, полученная поверхность естественным образом разрезана на криволинейные многоугольники, а задать направление их обхода можно в соответствии с направлением обхода узла (рис. 3.12). Легко убедиться, что направления обхода многоугольников согласованы друг с другом.

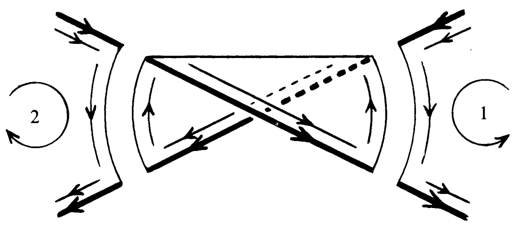


Рисунок 3.12

Если мы отразим относительно плоскости диаграммы диски, заклеивающие замкнутые пути, то новые диски тоже можно будет заклеить пленками, незначительно видоизменив рис. 3.7 (б). В самом деле, заклеивающую пленку можно представить как часть боковой поверхности цилиндра. Новые диски можно заклеить оставшейся частью этой поверхности (рис. 3.13). В результате узел будет расположен на некоторой ориентируемой поверхности без края, причем узел разбивает ее на две части.

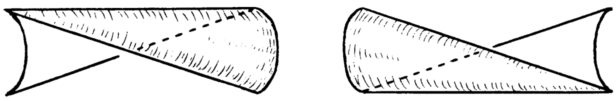


Рисунок 3.13

▷ **Задача 3.4.** Докажите, что любой узел можно расположить на некоторой ориентируемой поверхности без края так, что он не будет разбивать ее на части.

Алгоритм Зейферта можно использовать не только для заклеивания узла, но и для заклеивания любого зацепления. При этом на каждой компоненте зацепления ориентация задается независимо от ориентаций остальных компонент. На рис. 3.14 показаны два различных выбора ориентаций одного и того же зацепления. Склеив пары соответствующих им поверхностей Зейферта, получим две разных ориентируемых поверхности без края (рис. 3.15).

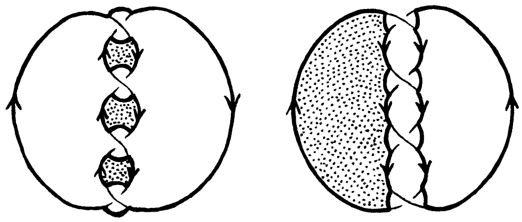


Рисунок 3.14

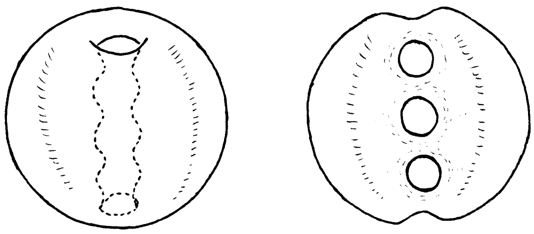


Рисунок 3.15

Применение алгоритма Зейферта для заклеивания зацепления не всегда приводит к связной поверхности. Например, если диаграмма зацепления состоит из двух непересекающихся окружностей, то заклеивающая поверхность состоит из двух непересекающихся дисков. Но из нескольких ориентируемых поверхностных, заклеивающих компоненты зацепления, легко получить одну ориентируемую поверхность, соединив исходные поверхности трубками. *Поверхностью Зейферта* будем называть связную ориентируемую поверхность, краем которой служат все компоненты зацепления.

Для построения поверхности Зейферта достаточно было бы заклеить каждую компоненту зацепления своей ориентируемой поверхностью так, чтобы эти поверхности попарно не пересекались. Но такая заклейка не всегда существует. Например, зацепление Хопфа так заклеить нельзя. Более того, нельзя даже заклеить одну из его компонент ориентируемой поверхностью, не пересекающей вторую компоненту. Доказывать это мы не будем.

▹ **Задача 3.5.** Докажите, что кривую 1, изображенную на рис. 3.16, можно заклеить ориентируемой поверхностью, не пересекающей кривую 2.

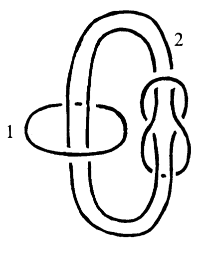


Рисунок 3.16

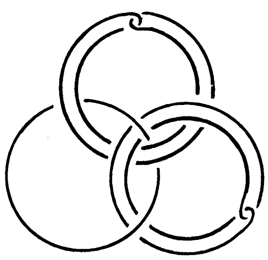


Рисунок 3.17

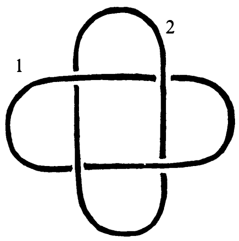


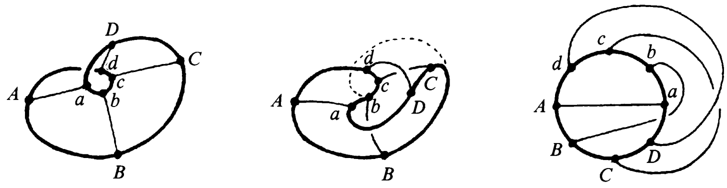
Рисунок 3.18

▹ **Задача 3.6.** Докажите, что три кривые, изображенные на рис. 3.17, можно заклеить тремя попарно не пересекающимися ориентируемыми поверхностями.

▹ **Задача 3.7.** Докажите, что кривую 1, изображенную на рис. 3.18, можно заклеить листом Мёбиуса, не пересекающим кривую 2.

Решения

▸ **3.1.** С одной стороны, эта задача очевидна: границу листа Мёбиуса можно продеформировать так, что она станет окружностью. При этом лист Мёбиуса тоже как-то деформируется. Соответствующая деформация каркаса листа Мёбиуса изображена на рис. 3.19. К сожалению, этот рисунок не очень нагляден.



(а) (б) (в)

Рисунок 3.19

Лист Мёбиуса с плоской границей можно представить себе более наглядно. Его можно, например, склеить из выкройки, изображенной на рисунке 3.20. Для этого нужно

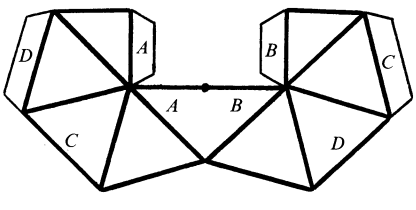
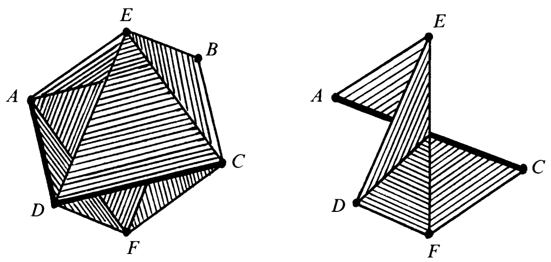


Рисунок 3.20

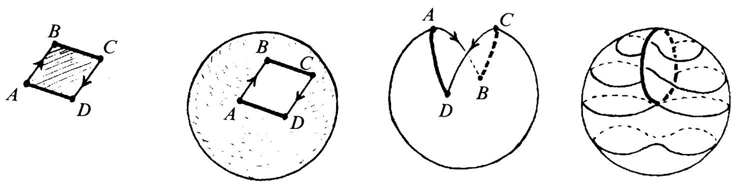
склеить из нее фигуру в форме октаэдра. В результате получится поверхность октаэдра, из которой вырезаны треугольники ADE и DCF (рис. 3.21 (а)). Кроме того, внутри октаэдра будет расположена фигура, изображенная на рис. 3.21 (б). Границей всей полученной фигуры будет треугольник ACD.



(а) (б)

Рисунок 3.21

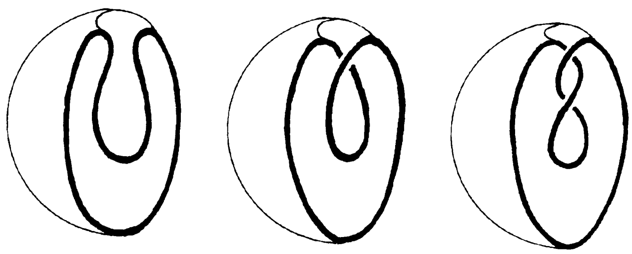
Другое наглядное представление листа Мёбиуса с плоской границей можно получить следующим образом. Возьмем резиновую пленку $ABCD$. Чтобы получить из нее лист Мёбиуса, нужно склеить стрелки AB и CD (рис. 3.22 (а)). Не будем спешить это делать. Сначала надуем пленку как резиновый шарик. В результате получим сферу с отверстием $ABCD$ (рис. 3.22 (б)). Продеформируем сферу, сблизив отрезки AB и BC, а также отрезки AD и DC (рис. 3.22 (в)). Теперь уже нетрудно представить, что произойдет при склейке стрелок AB и CD (рис. 3.22 (г)).



(а) (б) (в) (г)

Рисунок 3.22

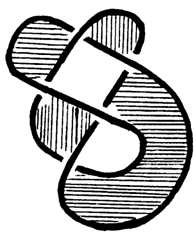
▸ **3.2.** Разрежем сферу по меридиану и вдавим внутрь верхнюю часть поверхности одной из полусфер (рис. 3.23 (а)). Вдавленную часть границы полусферы повернем сначала на 180° (рис. 3.23 (б)), а затем еще на 180° (рис. 3.23 (в)).

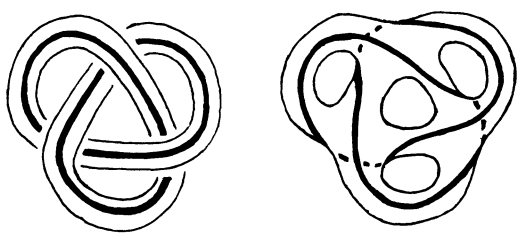


(а) (б) (в)

Рисунок 3.23

▸ **3.3.** Проще всего воспользоваться диаграммой узла восьмерка, расположенной на рис. 2.4 справа. Заклеивающая поверхность изображена на рис. 3.24.





(а) (б)

Рисунок 3.24 **Рисунок 3.25**

Для остальных диаграмм узла восьмерка, изображенных на рис. 2.4, построенные аналогичным образом заклеивающие поверхности будут неориентируемыми. Ориентируемые поверхности, построенные для этих диаграмм с помощью алгоритма Зейферта будут на изображениях многослойными. Рисовать их неудобно.

▸ **3.4.** Рассмотрим окрестность данного узла. Узел можно разместить на границе этой окрестности (рис. 3.25 (а)). При этом получается заузленная поверхность. «Сплющив» ее, можно получить незаузленную поверхность.

▸ **3.5.** Требуемая поверхность изображена на рис. 3.26.

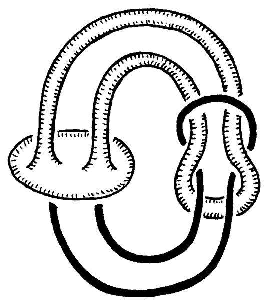
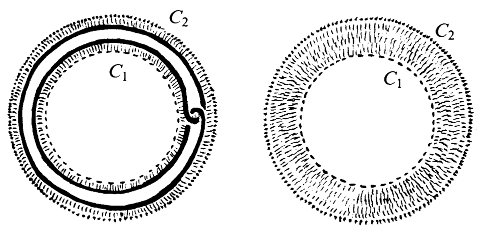


Рисунок 3.26

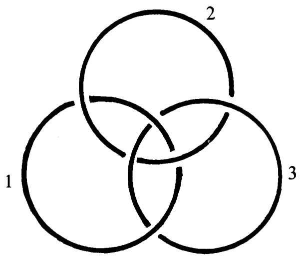
▸ **3.6.** Заклеим сначала обе перекрученные окружности. Для каждой из них рассмотрим пленку, изображенную на рис. 3.27 (а), и приклеим к ее граничным окружностям C_1 и C_2 кольцо (рис. 3.27 (б)). Можно считать, что полученные таким образом пленки целиком лежат



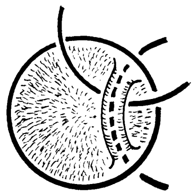
(а) (б)

Рисунок 3.27

вблизи окружностей 2 и 3 (рис. 3.28 (а)). Остается заклеить окружность 1 ориентируемой пленкой, не задевающей окружностей 2 и 3. Как это сделать, показано на рис. 3.28 (б).



(а)



(б)

Рисунок 3.28

► **3.7.** Обратимся к листу Мёбиуса с плоской границей, изображенному на рис. 3.21. Легко проверить, что окружность 2, изображенная на рис. 3.29, не пересекает его.

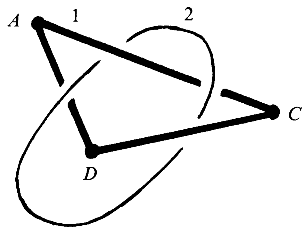


Рисунок 3.29