4

Инвариант узла

Попытки развязать трилистник к успеху не приводят. Но это не дает доказательства, что развязать его нельзя действительно никаким способом.

Получить такое доказательство можно, например, следующим образом. Сопоставим каждой диаграмме узла некоторое число. Если при этом разным диаграммам одного и того же узла сопоставляется одно и то же число, то мы будем говорить, что задан *инвариант узла*. В таком случае для каждого узла однозначно определено значение этого инварианта. Если значения инварианта для двух диаграмм узлов разные, то эти диаграммы соответствуют разным узлам. Но инвариант не обязательно различает все узлы, т.е. для некоторых разных узлов значения инварианта могут совпадать.

Для узлов и зацеплений есть весьма простой инвариант. Он строится следующим образом. Рассмотрим все возможные раскраски узла в три цвета (каждая связная дуга диаграммы красится одним цветом). При этом на каждом перекрестке сходятся дуги одного, двух или трех цветов. Назовем раскраску *правильной*, если ни на каком перекрестке не сходятся ровно два цвета, т.е. на каждом перекрестке сходятся либо дуги одного цвета, либо сразу всех трех цветов.

Теорема 4.1. *Количество правильных раскрасок диаграммы узла в три цвета является инвариантом узла.*

Доказательство. Рассмотрим все возможные преобразования перекрестков диаграмм узлов при деформациях (рис. 4.1). Требуется доказать, что при этих преобразованиях правильные раскраски переходят в правильные раскраски, причем однозначным образом. Поясним, что мы имеем в виду. Пусть задана правильная раскраска диаграммы. Подвергнем эту диаграмму одному из преобразований, изображенных на рис. 4.1. Оставим без изменений раскраску диаграммы вне той части плоскости, где совершается преобразование. Тогда концы всех дуг на картинке, изображающей преобразование, будут окрашены. Требуется доказать, что эту раскраску можно продолжить до правильной раскраски той части диаграммы, где совершается преобразование, причем это продолжение раскраски определено однозначно. Для одноцветных раскрасок это легко проверить. Для всех существенно различных разноцветных раскрасок преобразования изображены на рис. 4.2.

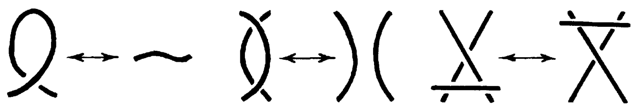


Рисунок 4.1

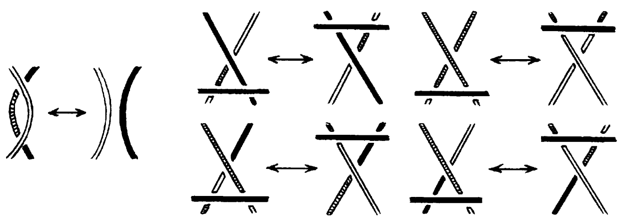


Рисунок 4.2

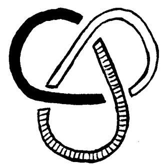


Рисунок 4.3

Теперь можно доказать, что трилистник не развязывается. На рис. 4.3 изображена правильная раскраска диаграммы трилистника, при которой используются все три цвета. Общее количество таких раскрасок этой диаграммы равно 6. В самом деле, одну дугу можно окрасить любым из трех цветов, другую дугу — одним из двух оставшихся цветов, а цвет третьей дуги после этого будет определен однозначно. Помимо шести разноцветных правильных раскрасок диаграммы трилистника есть еще три одноцветных правильных раскраски. Таким образом, для трилистника количество правильных раскрасок равно 9, а у незаузленной окружности есть только три одноцветные раскраски, никаких других раскрасок у нее нет. Следовательно, трилистник нельзя продеформировать в незаузленную окружность.

К сожалению, построенный инвариант не всемогущ. Он не позволяет даже доказать, что узел восьмерка не развязывается. В самом деле, легко проверить, что любая правильная раскраска диаграммы этого узла одноцветная. Но все же инвариант позволяет отличать друг от друга бесконечно много узлов. На рис. 4.4 изображены две различные правильные раскраски одной и той же диаграммы. Соединив n таких узелков в замкнутую цепочку, получим узел, количество правильных раскрасок которого равно $3 \cdot 2^n + 3$. Следовательно, при разных n количества правильных раскрасок разные.

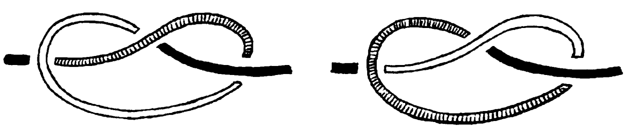


Рисунок 4.4

Для зацеплений количество правильных раскрасок диаграммы в три цвета тоже инвариант. Доказательство этого утверждения ничем не отличается от доказательства для узлов.

Незаузленные и попарно не зацепленные окружности можно красить независимо друг от друга. Поэтому количество правильных раскрасок для n таких окружностей равно 3^n. Это дает при использовании нашего инварианта для зацеплений новые возможности по сравнению с узлами. В самом деле, если зацепление допускает лишь одноцветные правильные раскраски, то у него количество правильных раскрасок меньше, чем у незаузленных и попарно не зацепленных окружностей. Легко проверить, что все зацепления, изображенные на рис. 4.5, допускают лишь одноцветные правильные раскраски.

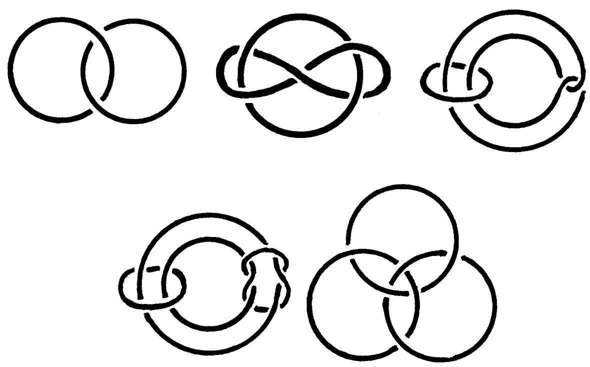
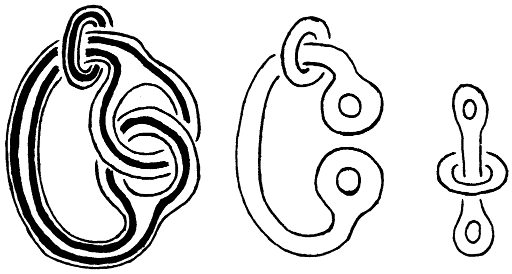


Рисунок 4.5

Доказанная нами невозможность расцепить зацепления, изображенные на рис. 4.5, позволяет продолжить обсуждение задачи 1.1 о расцеплении сцепленных пальцев. Рис. 4.6 показывает, что если на руку надеть жесткий браслет (рис. 4.6 (а)), то расцепить пальцы (рис. 4.6 (б)) уже не удастся. В самом деле, если бы их удалось расцепить, то браслет можно было бы снять (рис. 4.6 (в)).

Но тогда зацепление, изображенное на рис. 4.6 (а), можно было бы расцепить.



(а) (б) (в)

Рисунок 4.6