

# 5

## Гомеоморфизмы

В предыдущих параграфах мы часто рассматривали фигуры в пространстве с точностью до деформации, т.е. мы не различали фигуры, которые можно продеформировать друг в друга. Топологи называют такие фигуры *изотопными* (в пространстве). Например, узлы или зацепления, которые можно продеформировать друг в друга, называют изотопными.

Еще более важно в топологии понятие гомеоморфности фигур. Две фигуры  $X$  и  $Y$  называют *гомеоморфными*, если существует непрерывное взаимно однозначное отображение  $f : X \rightarrow Y$ , причем обратное отображение  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  тоже непрерывно. Гомеоморфность фигур, в отличие от изотопности, зависит лишь от самих фигур, а не от их расположения в пространстве. Например, любой узел гомеоморфен окружности.

Все фигуры, которые можно получить из прямоугольного листа бумаги склейкой изображенных на рис. 5.1 (а) стрелок, попарно гомеоморфны. Примерами таких фигур служат цилиндр и перекрученный цилиндр (рис. 5.1 (б)). Эти фигуры гомеоморфны, но они не изотопны. В самом деле, их границы представляют собой попарно не изотопные зацепления (рис. 5.1 (в)).

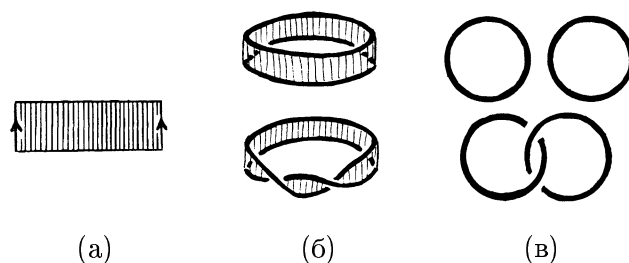


Рисунок 5.1

Если стороны прямоугольника склеивать по-другому (рис. 5.2 (а)), то полученные фигуры будут гомеоморфны листу Мёбиуса. Примеры таких фигур изображены на рис. 5.2 (б). Нижняя фигура изотопна уже знакомой нам поверхности, заклеивающей трилистник (рис. 5.2 (в)).

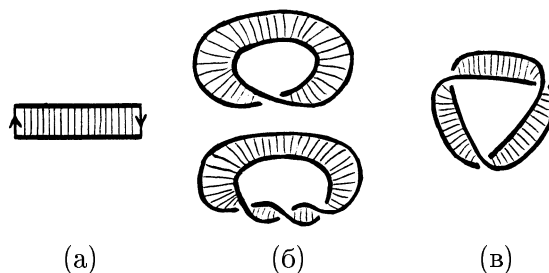


Рисунок 5.2

Обсудим еще некоторые примеры гомеоморфных и не-гомеоморфных фигур.

*Пример 1.* Интервал (отрезок с исключенными концами) и прямая гомеоморфны. В самом деле, легко построить гомеоморфизм интервала на полуокружность. Гомеоморфизм полуокружности на прямую изображен на рис. 5.3.

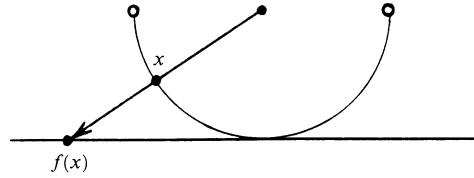


Рисунок 5.3

*Пример 2.* Круг с выколотой точкой гомеоморфен кольцу. Можно считать, что круг с выколотой точкой состоит из таких точек  $X$ , что  $0 < AX < 1$ , а кольцо состоит из таких точек  $Y$ , что  $1 < AY < 2$  ( $A$  — некоторая фиксированная точка). Гомеоморфизм круга на кольцо можно задать следующим образом. Отобразим точку  $X$  в точку  $Y$ , которая лежит на луче  $AX$ , причем  $AY = 1 + AX$ . Отметим, что если бы точка  $A$  не выкалывалась из круга, то задать отображение круга на кольцо таким образом не удалось бы.

Один из простейших способов доказательства негомеоморфности фигур заключается в выкалывании точки.

*Пример 3.* Отрезок  $I = [0, 1]$  и интервал  $J = (0, 1)$  не гомеоморфны. Предположим, что  $f : I \rightarrow J$  — гомеоморфизм. Точка 1 не разбивает отрезок  $I$ , т.е. после ее выкалывания любые две оставшиеся точки можно будет соединить путем. При гомеоморфизме это свойство сохраняется. Следовательно, точка  $f(1)$  не разбивает интервал  $J$ . Но любая точка интервала разбивает его. Получено противоречие, поэтому не существует гомеоморфизма  $f : I \rightarrow J$ .

- ▷ **Задача 5.1.** Докажите, что окружность и интервал не гомеоморфны.
- ▷ **Задача 5.2.** Докажите, что прямая не гомеоморфна фигуре, состоящей из трех лучей, выходящих из одной точки.

Другой способ доказательства негомеоморфности фигур основан на том, что при гомеоморфизме сохраняется свойство стягиваемости всех петель.

*Пример 4.* Круг и кольцо не гомеоморфны. В самом деле, в круге любая петля стягиваема (рис. 5.4 (а)), а в кольце есть нестягиваемая петля (рис. 5.4 (б)).

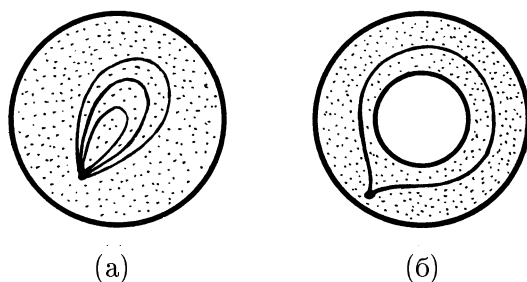


Рисунок 5.4

Обсудим теперь, нельзя ли заменить условие непрерывности отображения  $f^{-1}$  каким-либо более слабым условием. Например, нельзя ли в определении гомеоморфизма потребовать просто существования непрерывного взаимно однозначного отображения  $f : X \rightarrow Y$  или же ограничиться требованием существования непрерывных взаимно однозначных отображений  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow X$ . Задачи 5.3 и 5.4 показывают, что этих условий не достаточно.

- ▷ **Задача 5.3.** Пусть  $I$  — полуинтервал, т.е. отрезок, один из концов которого исключен. Докажите, что существует непрерывное взаимно однозначное отображение  $f : I \rightarrow S$ , где  $S$  — окружность.
- ▷ **Задача 5.4.** Пусть  $F_1$  — круг,  $F_2$  — кольцо, причем некоторые граничные точки этих фигур выколоты, а некоторые оставлены (для решения задачи нужно, в частности, придумать, какие точки выколоты, а какие оставлены).

Докажите, что существуют непрерывные взаимно однозначные отображения  $f : F_1 \rightarrow F_2$  и  $g : F_2 \rightarrow F_1$ .

Обсуждение поверхностей, заклеивающих узлы, мы начали с двух примеров заклеивания трилистника (рис. 3.1). Как мы уже выяснили, одна из поверхностей, заклеивающих трилистник, гомеоморфна листу Мёбиуса (рис. 5.2).

- ▷ **Задача 5.5.** Докажите, что другая поверхность, заклеивающая трилистник, гомеоморфна (но не изотопна) тору с вырезанным диском (рис. 5.5).

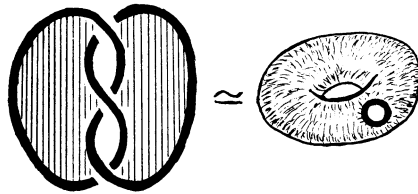


Рисунок 5.5

Теперь мы обсудим два важных способа построения гомеоморфизмов. У этих способов много общего. Гомеоморфизмы обоих типов будем называть *скручивающими*.

Построение скручивающего гомеоморфизма проще всего описать для цилиндра, хотя для него эта конструкция не дает ничего интересного, т.е. полученный гомеоморфизм будет изотопией. Но, например, для тора аналогичная конструкция приводит уже к весьма интересным гомеоморфизмам.

Построение скручивающего гомоморфизма для цилиндра изображено на рис. 5.6 (а). Сначала мы жестко закрепляем основания цилиндра, а сам цилиндр разрезаем по середине. Затем один край разреза тоже закрепляем, а другой край начинаем поворачивать и поворачиваем его до тех пор, пока не совершим полный оборот на  $360^\circ$ . После этого цилиндр склеиваем снова. В результате получим взаимно однозначное отображение цилиндра в цилиндр.

Непрерывность могла бы нарушиться лишь в точках разреза. Но мы, сделав поворот на  $360^\circ$ , возможный разрыв устранили.

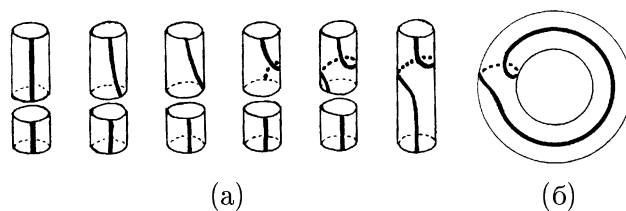


Рисунок 5.6

Для цилиндра полученный гомеоморфизм не очень интересен. Но аналогичным образом можно построить гомеоморфизм тора, рассмотрев часть тора как цилиндр. В результате получим весьма интересный гомеоморфизм тора (рис. 5.6 (б)). С помощью такого рода гомеоморфизмов тора можно перевести незаузленную окружность, расположенную на торе, в трилистник (рис. 5.7). Сначала тремя скручивающими гомеоморфизмами мы переводим эту окружность в окружность, изображенную на рис. 5.7 (в). Заштрихованная на этом рисунке часть тора представляет собой цилиндр. Если для этого цилиндра сделать скручивающий гомеоморфизм, то исходная окружность перейдет в кривую, изображенную на рис. 5.7 (г). Последняя кривая представляет собой трилистник (см. рис. 5.7 (д) и (е)). Таким образом, скручивающие гомеоморфизмы тора не сводятся к изотопиям.

- ▷ **Задача 5.6.** Постройте гомеоморфизм кренделя, переводящий незацепленные окружности (рис. 5.8 (а)) в зацепленные окружности (рис. 5.8 (б)).

На рис. 5.9 показано, как окружность, разделяющую крендель пополам, можно перевести в трилистник с помощью скручивающих гомеоморфизмов. Переход от рис. (б) к рис. (в) совершается посредством изотопии. Переход от

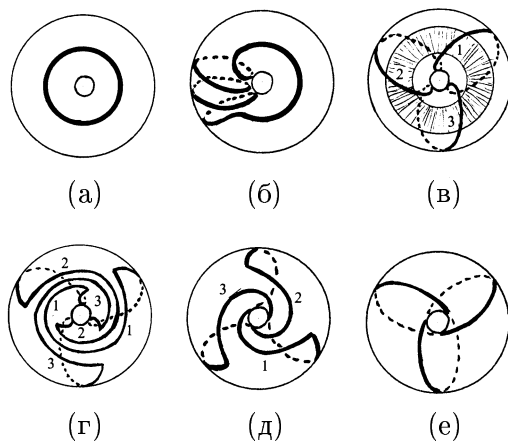


Рисунок 5.7

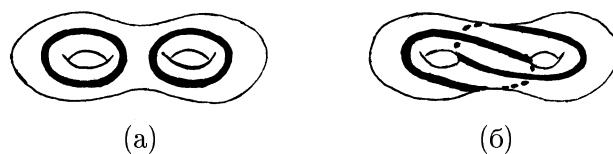


Рисунок 5.8

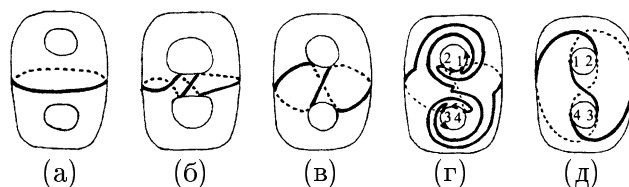


Рисунок 5.9

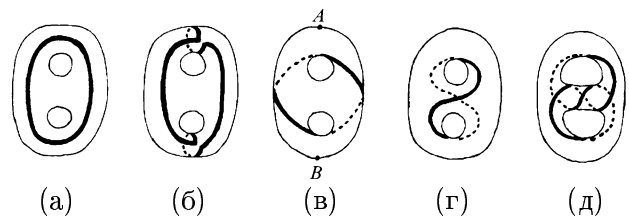


Рисунок 5.10

рис. (в) к рис. (г) аналогичен переходу от рис. 5.7 (б) к рис. 5.7 (в). Перемещая на рис. 5.9 (г) точки 1 и 2, 3 и 4 против часовой стрелки, легко перейти к рис. 5.9 (д). Если ограничиться одной половиной кренделя, то в результате получим гомеоморфизм между тором с вырезанным диском и ориентируемой поверхностью, заклеивающей трилистник.

Трилистник, расположенный на кренделе, можно также получить из кривой, не разбивающей крендель на части (рис. 5.10). Отметим, что при любом гомеоморфизме кривая, не разбивающая крендель, переходит в кривую, не разбивающую крендель. Поэтому трилистник, изображенные на рис. 5.10 (д), не разбивает крендель. Поясним процесс получения трилистника. Сначала делаем два скручивающих гомеоморфизма (рис. (б)). Переход от рис. (б) к рис. (в) делается с помощью изотопии. Чтобы перейти от рис. (в) к рис. (г), нужно взять крендель двумя руками в точках  $A$  и  $B$  и развернуть его верхнюю и нижнюю части на  $180^\circ$ . Для перехода от рис. (г) к рис. (д) делаем скручивающий гомеоморфизм.

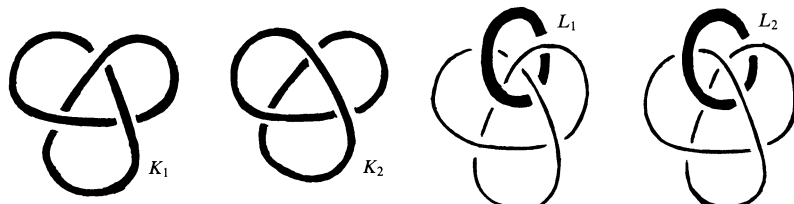


Рисунок 5.11

Рисунок 5.12

Обсудим теперь другой тип скручивающих гомеоморфизмов. На рис. 5.11 изображены диаграммы двух узлов, различающихся лишь одним перекрестком. Один из этих узлов — трилистник, а другой узел представляет собой незаузленную окружность. Предположим, что все пространство заполнено эластичным материалом. Удалим из этого пространства некоторый узел  $K$ . В результате



получим фигуру, которую обозначим  $\mathbb{R}^3 \setminus K$ . Если  $K_1$  и  $K_2$  — узлы, изображенные на рис. 5.11, то фигуры  $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus K_2$  не гомеоморфны. Доказывать это утверждение мы не будем. Нас будет интересовать другое. Оказывается, если помимо  $K_1$  и  $K_2$  вырезать еще по незаузленной окружности, то можно получить гомеоморфные фигуры. А именно, фигуры  $\mathbb{R}^3 \setminus L_1$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus L_2$  (рис. 5.12) гомеоморфны.

Прежде чем строить гомеоморфизм между  $\mathbb{R}^3 \setminus L_1$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus L_2$ , заметим, что вместо кривой можно вырезать ее некоторую окрестность, т.е. вместо окружности можно вырезать тор. Это связано с тем, что круг, из которого выколота точка, гомеоморфен кольцу, из которого удалена внутренняя граничная окружность.

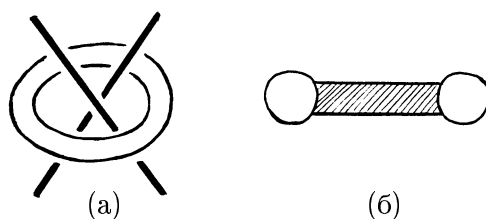


Рисунок 5.13

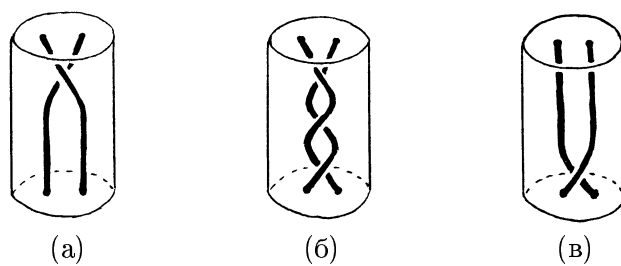


Рисунок 5.14

При построении гомеоморфизма нас будет интересовать лишь область, изображенная на рис. 5.13 (а). Точнее говоря, гомеоморфизм будет затрагивать лишь ци-

линдр, заключенный «внутри» тора; на сечении тора (рис. 5.13 (б)) область, соответствующая этому цилиндру, заштрихована. Нарисуем этот цилиндр отдельно, увеличив для наглядности его высоту (рис. 5.14 (а)).

К остальной части рассматриваемой фигуры  $\mathbb{R}^3 \setminus L_1$  примыкают лишь основания цилиндра; его боковая поверхность свободна, т.е. она не примыкает к остальной части фигуры. Разрежем рассматриваемую фигуру по нижнему основанию цилиндра. Жестко закрепим верхнее основание цилиндра, а затем повернем его нижнее основание на  $360^\circ$  (рис. 5.14 (б)) и склеим фигуру снова. После этого с помощью изотопии можно перейти от рис. 5.14 (б) к рис. 5.14 (в). В результате мы изменили тип перекрестка, т.е. перешли от фигуры  $\mathbb{R}^3 \setminus L_1$  к фигуре  $\mathbb{R}^3 \setminus L_2$ . Остается проверить, что полученное преобразование — гомеоморфизм. Боковая поверхность цилиндра не граничит с остальной частью фигуры, поэтому точками разрыва могут быть лишь точки нижнего основания. Но мы устранили разрыв, повернув нижнее основание на  $360^\circ$ . Значит, мы действительно построили гомеоморфизм, переводящий  $\mathbb{R}^3 \setminus L_1$  в  $\mathbb{R}^3 \setminus L_2$ .

Вернемся к узлам  $K_i$  и зацеплениям  $L_i$ , изображенным на рис. 5.11 и 5.12 соответственно. Пусть  $T_1$  и  $T_2$  — окружности, охватывающие перекрестки узлов  $K_1$  и  $K_2$ . Иными словами, зацепление  $L_i$  представляет собой объединение  $K_i$  и  $T_i$ . Фактически мы построили не только гомеоморфизм  $f : \mathbb{R}^3 \setminus L_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus L_2$ , но и гомеоморфизм  $g : \mathbb{R}^3 \setminus T_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus T_2$ , при котором  $K_1$  отображается в  $K_2$ . Таким образом, гомеоморфизм  $f$  допускает продолжение на  $K_1$ . Возникает желание попытаться продолжить  $f$  и на окружность  $T_1$ , т.е. построить гомеоморфизм  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , переводящий  $L_1$  в  $L_2$  (символом  $\mathbb{R}^3$  мы обозначили пространство, из которого ничего не вырезано). Проследим, как ведет себя при гомеоморфизме  $f$  окружность  $S$ , надетая на  $T_1$  (рис. 5.15 (а)). Ее образ при гомеоморфизме  $f$  изображен на рис. 5.15 (б). Этот рисунок показы-

вает, что продолжить  $j$  на  $T_1$  не удастся. Отметим, что если бы существовал гомеоморфизм  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , переводящий  $L_1$  в  $L_2$ , то, в частности, существовал бы гомеоморфизм  $s : \mathbb{R}^3 \setminus K_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus K_2$ . В самом деле, в качестве  $s$  можно было бы взять ограничение  $h$  на множество  $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$ .

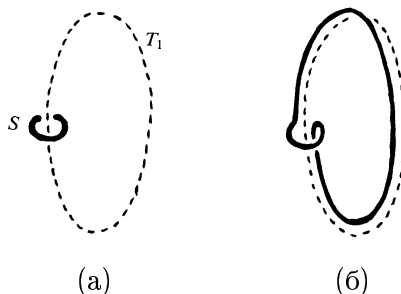


Рисунок 5.15

▷ **Задача 5.7.** а) Докажите, что фигуры, полученные из пространства  $\mathbb{R}^3$  удалением зацеплений, изображенных на рис. 5.16, гомеоморфны.

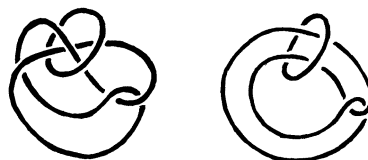


Рисунок 5.16

б) Докажите аналогичное утверждение для зацеплений, изображенных на рис. 5.17.

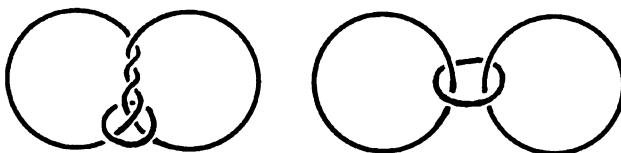


Рисунок 5.17

▷ **Задача 5.8.** Докажите, что любой узел можно развязать, изменяя типы его перекрестков.

## Решения

- ▶ 5.1. Любая точка разбивает интервал на две части, а окружность никакая точка не разбивает на части.
- ▶ 5.2. Точка, из которой выходят лучи, разбивает образованную ими фигуру на три части.
- ▶ 5.3. Из полуинтервала можно склеить окружность (рис. 5.18).

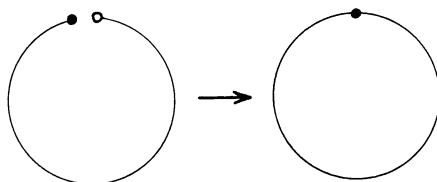


Рисунок 5.18

- ▶ 5.4. Решение изображено на рис. 5.19. Пунктирная часть границ фигур исключена. Непрерывное отображение кольца (с одной точкой на внутреннем крае) в круг, изображенное в нижней части рисунка, строится точно так же, как мы строили в примере 2 гомеоморфизм кольца в круг с выколотой точкой.

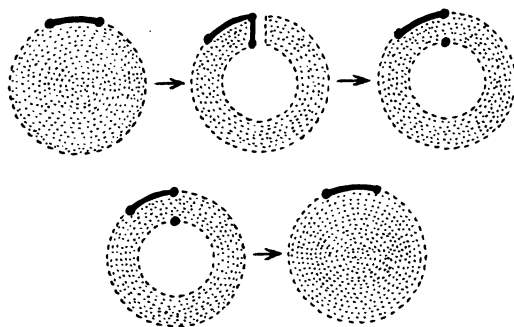


Рисунок 5.19

- 5.5. Рассматриваемую поверхность можно получить, склеив стрелки на границе двух фигур, изображенных на рис. 5.20 (а). Сделаем изотопию одной из них, а другую отразим в плоскости относительно прямой (рис. 5.20 (б)). Пары стрелок  $a$  и  $c$  теперь можно склеить, а одну из стрелок  $b$  можно подвести поближе к другой стрелке с помощью изотопии (рис. 5.20 (в)). Склеив стрелки  $b$ , получим фигуру, которую можно продеформировать в тор с вырезанным диском. (Напомним, что эта деформация изображена на рис. 1.8).

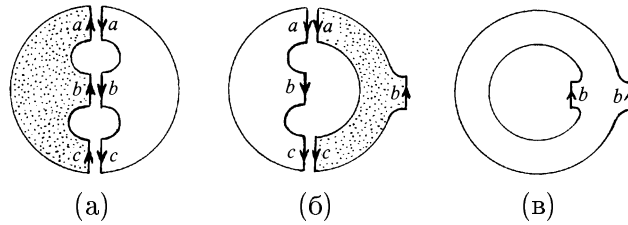


Рисунок 5.20

- 5.6. Требуемый гомеоморфизм получается из скручивающего гомеоморфизма (рис. 5.21) с помощью изотопии.

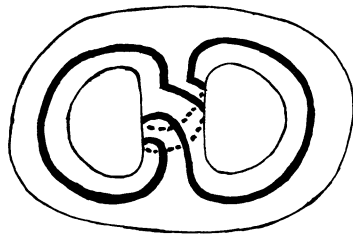


Рисунок 5.21

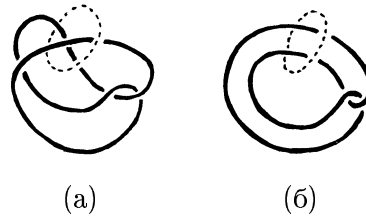


Рисунок 5.22

- 5.7. Будем использовать одну из удаленных кривых для того, чтобы делать скручивающие гомеоморфизмы.

а) С помощью скручивающего гомеоморфизма переходим к рис. 5.22 (а); скручивание при этом делается относительно окружности, изображенной пунктиром.

б) Скручивающий гомеоморфизм нужно применить дважды. Сначала получим зацепление, изображенное на рис. 5.23 (а). Оно изотопно зацеплению, изображенному на рис. 5.23 (б). Сделав еще один скручивающий гомеоморфизм относительно той же самой окружности, получим две незацепленные окружности (рис. 5.23 (в)).

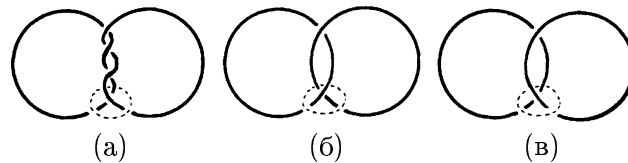


Рисунок 5.23

► **5.8.** Рассмотрим диаграмму данного узла  $K_1$ . Пусть  $l$  — прямая, лежащая в плоскости диаграммы и не пересекающая диаграмму. Будем двигать прямую  $l$  по направлению к диаграмме до тех пор, пока она не коснется диаграммы в некоторой точке  $P$  (рис. 5.24). Возьмем в пространстве отрезок  $AB$ , проецирующийся в точку  $P$ .

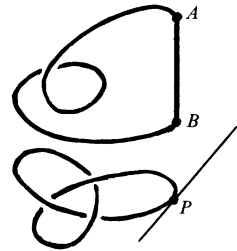


Рисунок 5.24

Можно считать, что точка  $A$  лежит выше точки  $B$ . Рассмотрим траекторию точки, равномерно опускающейся из точки  $A$  в точку  $B$ , но не вертикально, а так, чтобы двигаться над точками диаграммы, отличными от точки  $P$ . Эта траектория вместе с отрезком  $AB$  составляет некоторый узел  $K_2$ , причем его можно получить из исходного узла  $K_1$  заменой типов перекрестков. Легко проверить, что кривая  $K_2$  незаузлена. В самом деле, ее проекция на плоскость, перпендикулярную прямой  $l$ , не имеет точек самопересечения.