

## 6

### Векторные поля на плоскости

Пусть в каждой точке плоскости (или части плоскости) задан вектор, причем координаты вектора непрерывно зависят от точки (рис. 6.1). Тогда говорят, что на плоскости задано *непрерывное векторное поле*. Точку, в которой задан нулевой вектор, называют *особой* точкой векторного поля. Мы будем рассматривать лишь векторные поля с конечным числом особых точек.

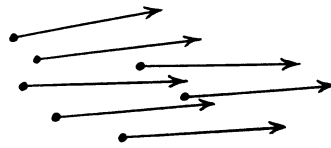


Рисунок 6.1

Совершим обход вокруг особой точки по некоторому несамопересекающемуся пути, не содержащему внутри себя других особых точек. Для каждой точки, через которую мы проходим, рассмотрим соответствующий ей вектор и перенесем его в некоторую фиксированную точку. В процессе обхода он будет вращаться вокруг фиксированной точки, возможно, меняя при этом длину. Посмотрим, сколько оборотов совершает этот вектор при полном обходе вокруг особой точки. Каждому обороту вектора припишем знак плюс, если направление вращения вектора совпадает с направлением обхода, и знак минус, если направление вращения вектора противоположно направлению обхода. Общее количество оборотов вектора с

учетом знака (т.е. разность между количеством положительных и отрицательных оборотов) называют *индексом* особой точки.

Индекс не зависит от направления обхода. Но пока непонятно, зависит ли он от пути обхода. Чуть позже мы докажем, что от пути обхода индекс не зависит. А пока разберем несколько примеров.

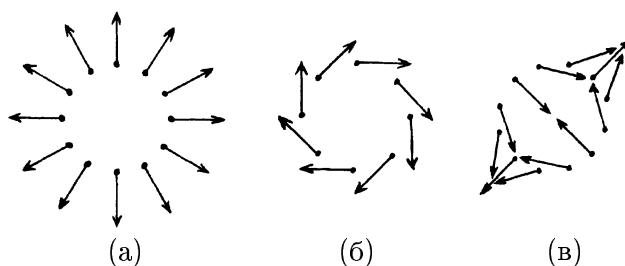


Рисунок 6.2

Рассмотрим на плоскости векторные поля  $a$ ,  $b$  и  $c$ , где  $a(x, y) = (x, y)$ ,  $b(x, y) = (y, -x)$ ,  $c(x, y) = (y, x)$  (рис. 6.2). Каждое из этих векторных полей имеет лишь одну особую точку, а именно, начало координат. Пусть  $\varphi$  — угол поворота от оси  $Ox$  до вектора  $(x, y)$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы поворотов от оси  $Ox$  до векторов  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно. Углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  зависят лишь от  $\varphi$ . При этом  $\alpha(\varphi) = \varphi$ ,  $\beta(\varphi) = \varphi - 90^\circ$ ,  $\gamma(\varphi) = 90^\circ - \varphi$ . При обходе вокруг начала координат по окружности  $x^2 + y^2 = 1$  углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  изменяются на  $360^\circ$ . Направление изменения углов  $\alpha$  и  $\beta$  совпадают с направлением изменения угла  $\varphi$ , а направление изменения угла  $\gamma$  противоположно ему. Следовательно, для векторных полей  $a$  и  $b$  индекс начала координат равен 1, а для векторного поля  $c$  индекс начала координат равен  $-1$ .

Векторное поле удобно представлять себе как поле скоростей, описывающее движение всех точек плоскости. Иными словами, каждая точка плоскости движется по некоторой траектории, а векторное поле состоит из векто-

ров скоростей движения этих точек. При этом скорость движения точки полностью определяется ее местоположением, т.е. поле скоростей не зависит от времени.

- ▷ **Задача 6.1.** Докажите, что в случае векторных полей  $a$ ,  $b$  и  $c$  траекториями движения точек, отличных от начала координат, будут соответственно лучи, окружности и ветви гипербол.
- ▷ **Задача 6.2.** Найдите индексы векторных полей, траектории которых изображены на рис. 6.3.

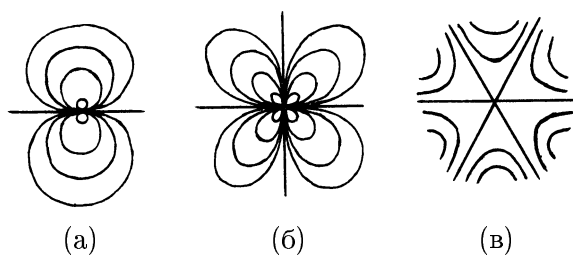


Рисунок 6.3

- ▷ **Задача 6.3.** Существует ли векторное поле с траекториями, изображенными на рис. 6.4?

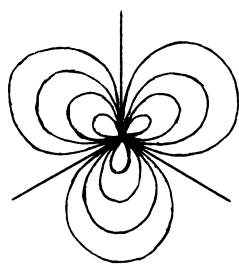


Рисунок 6.4

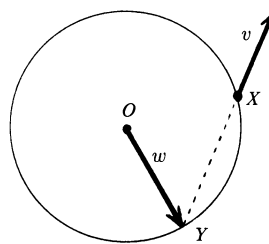


Рисунок 6.5

Напомним, что *комплексной плоскостью* называют множество точек плоскости, отождествленное с множе-

ством комплексных чисел. Точка с координатами  $(x, y)$  отождествляется при этом с числом  $x + iy$ .

▷ **Задача 6.4.** Рассмотрим на комплексной плоскости векторное поле  $v(z) = \frac{z^n}{|z|^{n-1}}$  при  $z \neq 0$ ,  $v(0) = 0$ . Найдите индексы особых точек таких векторных полей для всех целых  $n$  и нарисуйте их траектории.

▷ **Задача 6.5.** Назовем векторное поле  $v$  четным, если  $v(x) = v(-x)$ , и нечетным, если  $v(x) = -v(-x)$ . Докажите, что индекс точки  $O$  для четного поля четен, а для нечетного поля нечетен.

▷ **Задача 6.6.** В каждой точке  $X$  некоторой окружности задан вектор  $v(X)$ , непрерывно зависящий от  $X$ . Прямая, содержащая этот вектор, пересекает окружность в точках  $X$  и  $Y$  (рис. 6.5). При полном обходе окружности вектор  $v$  делает  $n$  оборотов. Сколько оборотов делает при этом вектор  $w = \overrightarrow{OY}$ , где  $O$  — центр окружности?

Докажем теперь, что индекс особой точки не зависит от пути обхода. Индекс — целое число, поэтому он может изменяться лишь скачком, не менее чем на 1; изменяться непрерывно индекс не может. При непрерывном изменении пути обхода скачок индекса может произойти лишь в том случае, когда путь проходит через особую точку. Но мы рассматриваем лишь пути, которые содержат внутри ровно одну особую точку и не проходят через особые точки. Любые два таких пути, содержащих одну и ту же особую точку, можно продеформировать друг в друга, не задевая при этом особых точек.

▷ **Задача 6.7.** Замкнутая самопересекающаяся кривая разбивает плоскость на несколько областей (рис. 6.6). В каждой области можно выбрать некоторую точку  $O$  и сопо-

ставить области число оборотов вектора  $\overrightarrow{OX}$  при обходе кривой. Докажите, что если две области имеют общую границу, то соответствующие им числа отличаются на 1.

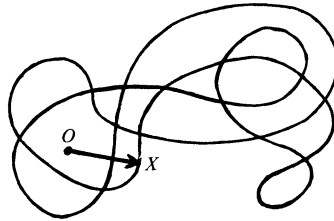


Рисунок 6.6

Пусть замкнутая несамопересекающаяся кривая  $\gamma$  не проходит через особые точки векторного поля  $v$ . Тогда можно определить *индекс* этой кривой как число оборотов вектора  $v(X)$  при обходе кривой  $\gamma$ . Обороты вектора считаются положительными, если их направление совпадает с направлением обхода кривой.

**Теорема 6.1.** *Индекс кривой  $\gamma$  равен сумме индексов особых точек, заключенных внутри ее.*

*Доказательство.* Выберем в качестве оси  $Ox$  прямую, не перпендикулярную ни одной из прямых, соединяющих пары данных точек, и соединим рассматриваемые особые точки в порядке возрастания координаты  $x$  (рис. 6.7).

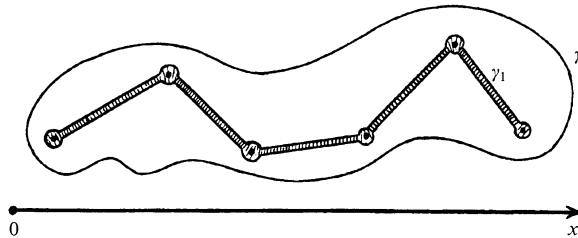


Рисунок 6.7

Кривая  $\gamma$  изотопна кривой  $\gamma_1$ , близкой к полученной ломаной (на рис. 6.7 заштрихована область, содержащаяся внутри  $\gamma_1$ ). В процессе изотопии от  $\gamma$  к  $\gamma_1$  кривые не проходят через особые точки, поэтому индексы кривых  $\gamma$

и  $\gamma_1$  равны. Кривая  $\gamma_1$  состоит из дуг окружностей с центрами в особых точках и отрезков, близких к отрезкам, соединяющим особые точки. Если пройти по отрезку  $AB$  сначала от  $A$  к  $B$ , а затем от  $B$  к  $A$ , то в обоих случаях абсолютные величины углов поворота вектора  $v(X)$  будут равны, но направления углов поворота будут противоположны. Следовательно, части кривой  $\gamma_1$ , близкие к отрезкам, дают нулевой вклад в индекс, так как они проходятся в противоположных направлениях. В итоге вклад в индекс кривой  $\gamma_1$  дают лишь особые точки.

Во всех этих рассуждениях мы предполагаем, что кривая  $\gamma_1$  достаточно близка к рассматриваемой ломаной.

**Следствие.** *Если индекс замкнутой несамопересекающейся кривой отличен от нуля, то внутри ее есть по крайней мере одна особая точка.*

Именно со следствием теоремы 6.1 связаны наиболее важные применения индекса особой точки. Приведем три примера использования этого следствия (теоремы 6.2–6.4).

**Теорема 6.2.** *Пусть  $f$  — непрерывное отображение круга  $D^2$  в плоскость, причем каждая точка граничной окружности  $S^1$  отображается сама в себя. Тогда некоторая точка круга  $D^2$  отображается в его центр.*

*Доказательство.* Рассмотрим на  $D^2$  векторное поле

$$v(X) = \overrightarrow{Of(X)},$$

где  $O$  — центр круга (рис. 6.8). На окружности  $S^1$  получим при этом такое же векторное поле, какое изображено на рис. 6.2 (а). Следовательно, индекс кривой  $S^1$  равен 1, а значит, внутри  $S^1$  есть особая точка  $X_0$ . Равенство  $v(X_0) = 0$  эквивалентно тому, что  $f(X_0) = O$ , т.е. точка  $X_0$  отображается в центр круга.

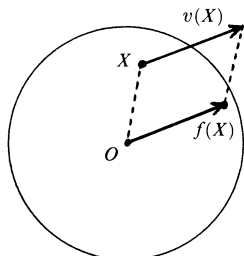


Рисунок 6.8

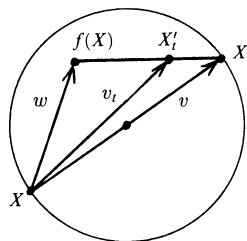


Рисунок 6.9

**Теорема 6.3.** Пусть  $f$  — непрерывное отображение круга  $D^2$  в себя. Тогда  $f(X_0) = X_0$  для некоторой точки  $X_0$ , т.е.  $f$  имеет неподвижную точку  $X_0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим на круге  $D^2$  векторное поле  $w(X) = \overrightarrow{Xf(X)}$ . Предположим, что у отображения  $f$  нет неподвижных точек, т.е. у векторного поля  $w$  нет особых точек. На граничной окружности можно также рассмотреть векторные поля  $v$  и  $v_t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), построение которых видно из рис. 6.9: точка  $X'$  диаметрально противоположна точке  $X$ , а точка  $X'_t$  делит отрезок  $f(X)X'$  в отношении  $f(X)X'_t : X'_tX = t : (1-t)$ . Будем считать, что  $X'_0 = f(X)$  и  $X'_1 = X'$ . Все векторы  $v_t$  ненулевые, поэтому можно рассмотреть число  $n(t)$  — индекс граничной окружности относительно векторного поля  $v(t)$ . Число  $n(t)$  целое и оно непрерывно зависит от  $t$ . Следовательно,  $n(0) = n(1) = 1$ . Но это означает, что векторное поле  $w$  имеет особую точку. Получено противоречие.

По ходу доказательства теоремы 6.3 мы фактически доказали следующее утверждение, которым нам еще придется воспользоваться в дальнейшем.

**Лемма 6.1.** Пусть на замкнутой несамопересекающейся кривой заданы векторные поля  $v$  и  $w$ , причем в любой точке  $X$  векторы  $v(X)$  и  $w(X)$  не противоположны

по направлению. Тогда индексы кривой  $\gamma$  относительно этих векторных полей равны.

*Доказательство.* Обратимся к рис. 6.9. Вектор  $v_t$  может быть нулевым лишь в том случае, когда векторы  $v$  и  $w$  противоположны по направлению.

**Теорема 6.4 (Основная теорема алгебры).** *Любой многочлен  $P(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$  с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень.*

*Доказательство.* Рассмотрим на комплексной плоскости векторные поля  $v(z) = z^n$  и  $w(z) = P(z)$ . Докажем сначала, что при достаточно больших  $R$  для всех точек окружности, заданной уравнением  $|z| = R$ , выполняется неравенство  $|w(z) - v(z)| < |v(z)|$ . Пусть  $a$  — наибольшее из чисел  $|a_1|, \dots, |a_n|$ . Тогда

$$\begin{aligned} |w(z) - v(z)| &= |a_1z^{n-1} + \dots + a_n| \leq \\ &\leq |a_1|R^{n-1} + \dots + |a_n| \leq naR^{n-1} \end{aligned}$$

при  $R > 1$ . Так как  $|v(z)| = R^n$ , то  $|w - v| < |v|$  при  $R > na + 1$ .

Из неравенства  $|w - v| < |v|$  следует, что векторы  $v$  и  $w$  не могут быть противоположно направлены. Поэтому индекс окружности  $|z| = R$  относительно поля  $w$  равен ее индексу относительно поля  $v$ . Последний индекс равен  $n$  (см. решение задачи 6.4). Поэтому индекс окружности  $|z| = R$  относительно векторного поля  $w(z) = P(z)$  равен  $n$ . Следовательно, внутри ее есть особые точки, в которых  $P(z)$  обращается в нуль.

Основную идею доказательства теоремы 6.4 наглядно можно представить следующим образом. Если число  $R$  достаточно велико, то длина вектора  $w - v$  во много раз меньше длины вектора  $v$  (рис. 6.10). Вектор  $v$  совершает



$n$  оборотов, поэтому вектор  $w$ , очень близкий к нему, тоже совершает  $n$  оборотов.

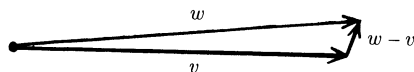


Рисунок 6.10

- ▷ **Задача 6.8.** Пусть  $f$  — непрерывное отображение круга  $D^2$  с центром  $O$  в плоскость, причем если точки  $A$  и  $B$  симметричны относительно точки  $O$ , то точки  $f(A)$  и  $f(B)$  тоже симметричны относительно точки  $O$ . Докажите, что некоторая точка круга отображается в точку  $O$ .

Посмотрим теперь, что происходит, когда векторное поле изменяется внутри некоторой окружности. Отметим, прежде всего, что индекс окружности сохраняется, так как на ней векторы не изменяются. Поэтому при слиянии нескольких особых точек в одну получается особая точка, индекс которой равен сумме их индексов. Например, при слиянии двух особых точек с индексом 1 получается особая точка с индексом 2 (рис. 6.11). Слияние трех особых точек с индексом 1 можно представить следующим образом. Область, заштрихованная на рис. 6.12 (а), пережимается, и в результате из нее получаются две области. При добавлении других особых точек с индексом 1 происходит аналогичное пережимание одной из областей.

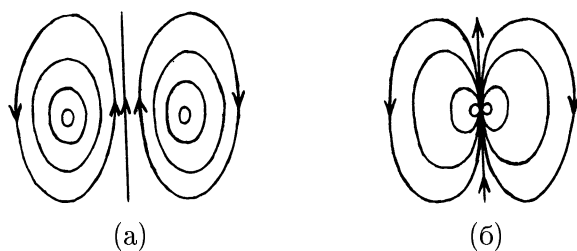


Рисунок 6.11

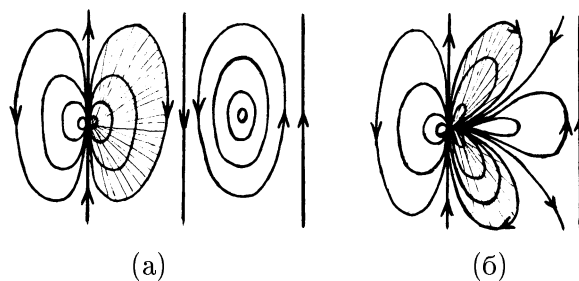


Рисунок 6.12

При слиянии двух особых точек с индексом  $-1$  пережимается область, заштрихованная на рис. 6.13 (а). В результате переходим к рис. 6.13 (б). При добавлении других особых точек с индексом  $-1$  происходит аналогичное пережимание областей (рис. 6.14).

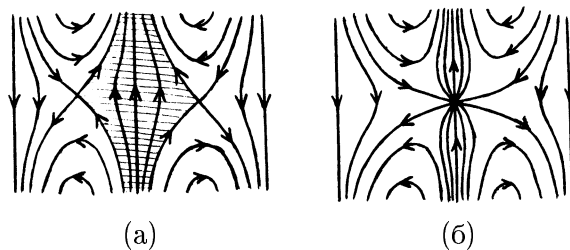


Рисунок 6.13

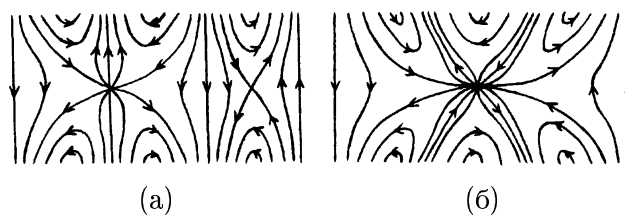


Рисунок 6.14

При слиянии двух особых точек с индексами  $1$  и  $-1$  получается особая точка с индексом  $0$ . Такую особую

точку можно «устранить». Задачи 6.9 и 6.10 дают две различные интерпретации устранения особой точки.

- ▷ **Задача 6.9.** Измените траектории векторного поля, изображенные на рис. 6.15, так, чтобы вне окружности  $S_2$  траектории не изменились, а внутри окружности  $S_1$  они стали параллельными отрезками. При этом должно получиться векторное поле без особых точек.

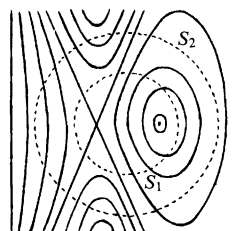


Рисунок 6.15

- ▷ **Задача 6.10.** Измените траектории того же векторного поля так, чтобы внутри  $S_1$  траектории не изменились, а вне  $S_2$  они стали параллельными лучами или прямыми. Между  $S_1$  и  $S_2$  при этом не должно быть особых точек.

В задачах 6.9 и 6.10 фактически идет речь о построении на кольце векторного поля без особых точек в том случае, когда векторное поле задано на граничных окружностях кольца. Иными словами, речь идет о продолжении без особых точек векторного поля, заданного на границе. Вот еще одна задача такого рода.

- ▷ **Задача 6.11.** Продолжите без особых точек на все кольцо векторное поле, изображенное на рис. 6.16. Нарисуйте его траектории.

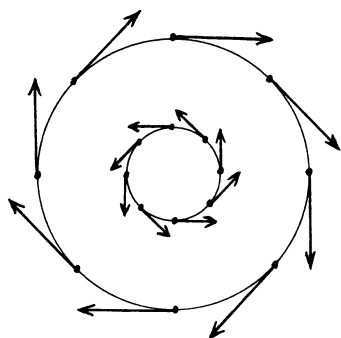


Рисунок 6.16

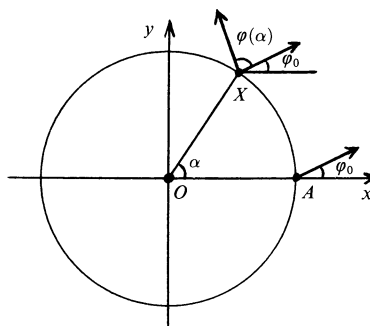


Рисунок 6.17

Задачи 6.9–6.11 являются частными случаями следующего утверждения.

**Теорема 6.5.** *Векторное поле без особых точек, заданное на граничных окружностях кольца, можно продолжить на все кольцо тогда и только тогда, когда индексы граничных окружностей равны.*

*Доказательство.* Предположим сначала, что векторное поле, заданное на граничных окружностях кольца, можно продолжить на все кольцо. Внешнюю окружность кольца с помощью гомотетии можно продеформировать во внутреннюю окружность. В процессе деформации окружность не проходит через особые точки, поэтому индексы внутренней и внешней окружностей равны.

Предположим теперь, что на граничных окружностях задано векторное поле, причем индексы граничных окружностей равны. Требуется продолжить векторное поле на все кольцо. Для произвольного векторного поля, заданного на окружности, построим график следующим образом. Для каждого угла  $\alpha$  определим  $\varphi(\alpha)$  — угол между векторами, заданными в точках  $X$  и  $A$  (рис. 6.17); при этом  $\varphi(0) = 0$ . Построим график функции  $\varphi(\alpha)$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Он проходит через начало координат и точку с координатами  $(2\pi, 2k\pi)$ ,

где  $k$  — индекс окружности относительно данного векторного поля. Такие графики построим для двух рассматриваемых векторных полей, заданных на граничных окружностях. Эти графики можно следующим образом соединить непрерывным семейством графиков. Пусть прямая, параллельная оси  $Oy$ , пересекает первый график в точке  $A_1$ , а второй график в точке  $A_2$  (рис. 6.18). Будем считать, что в момент времени  $t$  гра-

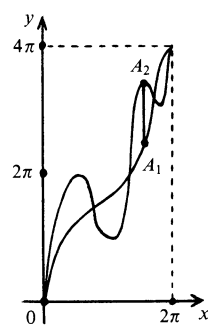


Рисунок 6.18

фик делит отрезок  $A_1A_2$  в отношении  $t : (1 - t)$ . Тогда в моменты  $t = 0$  и  $t = 1$  получаем соответственно первый и второй графики, а при изменении  $t$  от 0 до 1 первый график непрерывно переходит во второй. В результате для всех  $t$  и  $\alpha$ , где  $0 \leq t \leq 1$  и  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ , определены значения  $\varphi(t, \alpha)$ . Исходные графики соответствуют функциям  $\varphi(0, \alpha)$  и  $\varphi(1, \alpha)$ . С помощью функции  $\varphi(t, \alpha)$  можно построить векторное поле на кольце. Чтобы задать ненулевой вектор, достаточно задать его длину и угол, который он образует с лучом  $Ox$ . Будем считать, что на принадлежащем кольцу отрезке луча с началом в центре кольца длина вектора равномерно изменяется от длины вектора на первой граничной окружности до длины вектора на второй граничной окружности. Исходя из рис. 6.17, угол, который вектор образует с лучом  $Ox$ , определим как сумму углов  $\varphi(t, \alpha)$  и  $\varphi_{0,t}$ , где угол  $\varphi_{0,t}$ , соответствующий углу  $\varphi_0$  на рис. 6.17, равномерно изменяется от угла  $\varphi_{0,0}$  до угла  $\varphi_{0,1}$ . Построенное векторное поле обладает требуемыми свойствами.

Наряду с векторными полями можно рассматривать и поля направлений. Пусть в каждой точке плоскости (или части плоскости) задана прямая, причем направления прямых непрерывно зависят от точки, т.е. углы между прямыми, заданными в достаточно близких точках, малы. Тогда говорят, что на плоскости задано *непрерывное поле направлений*.

Для поля направлений тоже можно рассмотреть траектории — кривые, у которых в каждой точке касательная является прямой поля направлений, заданной в этой точке.

Любому векторному полю без особых точек можно сопоставить поле направлений, взяв вместо вектора содержащую его прямую. Обратную операцию проделать можно не всегда. В самом деле, исключим из плоскости точку  $O$  и рассмотрим в оставшейся части плоскости поле направлений, изображенное на рис. 6.19 (предполагается,

что во всех точках луча, выходящего из точки  $O$ , заданы параллельные прямые). Как видно из того же рисунка, попытка построить векторное поле по этому полю направлений не увенчается успехом.

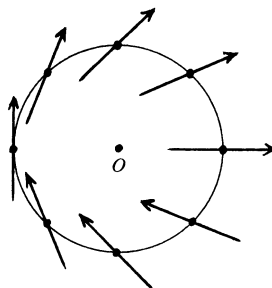


Рисунок 6.19

- ▷ **Задача 6.12.** Докажите, что по любому непрерывному полю направлений, заданному на всей плоскости, можно построить непрерывное векторное поле.
- ▷ **Задача 6.13.** Существует ли в трехмерном пространстве с одной выколотой точкой поле направлений, по которому нельзя построить векторное поле?

## Решения

- **6.1.** Если  $(x(t), y(t))$  — траектория векторного поля  $a$ , то

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = y(t).$$

Поэтому  $x(t) = pe^t$  и  $y(t) = qe^t$ , а значит,  $qx = py$  и каждая траектория целиком лежит в одном из квадрантов. Следовательно, траекториями являются лучи, выходящие из начала координат. Отдельной траекторией является также само начало координат.

Для траекторий векторного поля  $b$  получаем уравнения

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

В полярных координатах  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  эти уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= r \sin \varphi, \\ \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= -r \cos \varphi.\end{aligned}$$

Решая эту систему линейных уравнений относительно  $\frac{dr}{dt}$  и  $\frac{d\varphi}{dt}$ , получаем  $\frac{dr}{dt} = 0$  и  $\frac{d\varphi}{dt} = 1$ . Следовательно,  $x = R \cos(t + t_0)$  и  $y = R \sin(t + t_0)$ , где  $R$  и  $t_0$  — константы.

Для траекторий векторного поля  $s$  получаем уравнения

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Сделаем замену переменных  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ . Тогда

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = y + x = u, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = y - x = -v.\end{aligned}$$

Поэтому  $u = pe^t$ ,  $v = qe^{-t}$ , а значит,  $u = \frac{pq}{v}$ . В координатах  $Ouv$  траектории являются ветвями гипербол  $u = \frac{c}{v}$  (рис. 6.20) или лучами с началом в точке  $O$ , лежащими на осях координат.

► **6.2.** Ответ: а) 2; б) 3; в) -2.

► **6.3.** Если попытаться задать направления движения на траекториях, изображенных на рис. 6.4, то придем к противоречию (рис. 6.21).

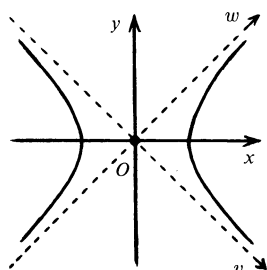


Рисунок 6.20

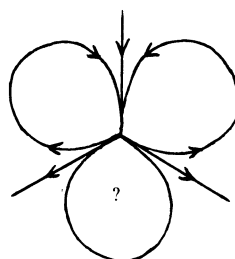


Рисунок 6.21

- **6.4.** Пусть  $z = Re^{i\varphi}$ . Тогда  $v(z) = Re^{in\varphi}$ . При изменении  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  число  $n\varphi$  изменяется от 0 до  $2n\pi$ , т.е. вектор  $v(z)$  делает  $n$  оборотов. Следовательно, индекс векторного поля  $v$  равен  $n$ .

Нарисовать траектории векторного поля вам поможет рис. 6.3.

- **6.5.** Для четного векторного поля при обходе половины окружности вектор  $v$  поворачивается на  $2k\pi$ , а для нечетного на  $(2k + 1)\pi$ .
- **6.6.** Обратимся к рис. 6.22. Пусть  $\alpha$  и  $\varphi(\alpha)$  — углы между осью  $Ox$  и векторами  $\vec{OX}$  и  $v$ . Тогда  $\angle ZOY = 2\angle ZXY = 2\varphi(\alpha)$  и  $\angle IOY = 2\varphi(\alpha) - \alpha$ . Следовательно, если вектор  $v$  совершает  $n$  оборотов, то вектор  $w$  совершает  $2n - 1$  оборот.
- **6.7.** Отметим, прежде всего, что внутри каждой области число оборотов непрерывно зависит от точки, поэтому внутри области оно постоянно.



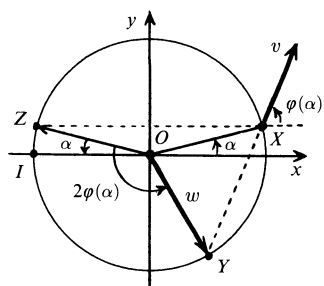


Рисунок 6.22

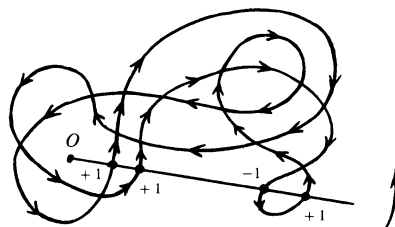


Рисунок 6.23

Число оборотов вектора  $\overrightarrow{OX}$  при обходе кривой можно вычислять следующим образом. Проведем из точки  $O$  луч, не касающийся кривой. Точкам пересечения луча с кривой сопоставим числа  $\pm 1$  в соответствии с тем, происходит ли в них движение по кривой справа налево или слева направо (рис. 6.23). Тогда число оборотов с учетом знака равно сумме этих чисел. Иными словами, если вы находитесь в фиксированной точке, а вокруг вас бегают собака, то для того, чтобы узнать, сколько раз она вокруг вас обежала, не нужно все время следить за ней. Достаточно смотреть в одном направлении и считать, сколько раз собака пробегает мимо в одном направлении и сколько в другом.

Точки  $A$  и  $B$  внутри соседних областей можно выбрать так, чтобы отрезок  $AB$  пересекал границу ровно в одной точке. Для луча  $AB$  и луча, идущего из точки  $B$  в направлении луча  $AB$ , описанная выше сумма чисел различается лишь одним числом, стоящим в точке пересечения отрезка  $AB$  с границей областей.

- **6.8.** Будем считать, что центр круга совпадает с началом координат на плоскости. Сопоставим каждой точке  $X$  круга  $D^2$  вектор  $\overrightarrow{Of(X)}$ . Предположим, что все эти векторы ненулевые. Тогда определен индекс граничной окружности, причем он нечетен, так как полученное векторное поле нечетно (см. задачу 6.5). Следовательно, вну-

три круга есть особая точка  $X$ , для которой  $\overrightarrow{Of(X)} = \vec{0}$ . Получено противоречие. Таким образом, внутри круга или на его границе есть особая точка  $X$ , для которой  $\overrightarrow{Of(X)} = \vec{0}$ , т.е.  $f(X) = O$ .

► 6.9. См. рис. 6.24.

► 6.10. См. рис. 6.25.

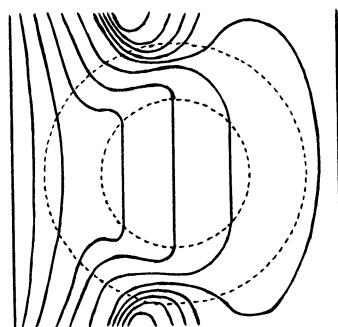


Рисунок 6.24

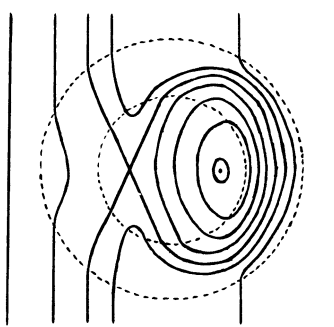


Рисунок 6.25

► 6.11. Траектория требуемого векторного поля изображена на рис. 6.26. Само векторное поле получается вращением векторов при движении по отрезкам радиусов, заключенным между граничными окружностями. При перемещении из одного конца отрезка в другой происходит поворот на  $180^\circ$ .

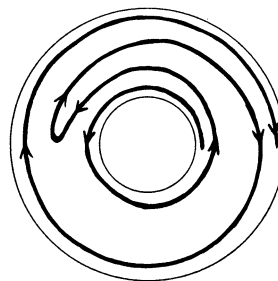


Рисунок 6.26

► 6.12. Выберем в плоскости фиксированную точку  $O$ . Заданной в точке  $O$  прямой соответствуют два единичных вектора; выберем один из них. Тогда в любой точке  $A$  единичный вектор на заданной в  $A$  прямой можно выбрать,

двигаясь по отрезку  $OA$  из  $O$  в  $A$  и выбирая в каждой точке  $X$  отрезка  $OA$  один из двух единичных векторов на заданной в точке  $X$  прямой.

Для плоскости с выколотой точкой этой конструкцией нельзя воспользоваться, потому что отрезок  $OA$  может проходить через выколотую точку.

► **6.13.** Ответ: нет, не существует.

Векторное поле по полю направлений в трехмерном пространстве можно построить почти так же, как и в задаче 6.12. Но переносить векторное поле по отрезку  $OA$  уже не удастся, так как он может проходить через выколотую точку. Векторы нужно переносить по путям, идущим из  $O$  в  $A$  и не проходящим через выколотую точку. Для этого приходится рассматривать криволинейные пути. Но тогда возникает вопрос о совпадении результатов переноса по разным путям. Этот вопрос не праздный; рис. 6.19 показывает, что для плоскости с выколотой точкой результаты переноса векторов по разным путям могут быть разными. Но в трехмерном пространстве с выколотой точкой любой замкнутый путь можно стянуть в точку, не задевая при этом выколотую точку. Именно это свойство приводит к совпадению результатов переноса по разным путям. В самом деле, если переносы вектора по двум разным путям приводят к разным результатам, то при обходе замкнутого пути, составленного из них, вектор должен переходить в противоположный вектор. Это свойство должно сохраняться в процессе стягивания пути в точку. С другой стороны, для пути, стянутого в точку, оно выполняться не может.