

7

Векторные поля на двумерных поверхностях

По аналогии с векторными полями на плоскости можно ввести понятие *векторного поля на сфере*. Сопоставим каждой точке сферы некоторый вектор в трехмерном пространстве. Для векторного поля на плоскости не нужно было заботиться о том, чтобы его траектории оставались на плоскости. Но для векторного поля на сфере позаботиться об этом необходимо, а именно, нужно потребовать, чтобы заданные на сфере векторы касались ее. Будем говорить, что на сфере задано непрерывное векторное поле, если в каждой ее точке задан касательный вектор, причем эти векторы непрерывно зависят от точки.

Приведем два примера векторных полей на сфере.

Пример 1. Рассмотрим вращение сферы с некоторой угловой скоростью вокруг оси, проходящей через центр сферы. На сфере при этом возникает векторное поле скоростей движения точек (рис. 7.1). У этого векторного поля есть две особые точки, а именно, точки пересечения сферы и оси вращения. Индексы обеих особых точек равны 1.

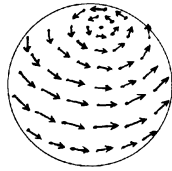


Рисунок 7.1

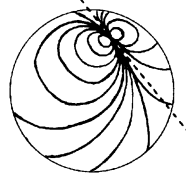


Рисунок 7.2

Пример 2. На сфере можно построить и векторное поле с одной особой точкой. Его траектория — сечения сферы плоскостями, проходящими через фиксированную касательную к сфере (рис. 7.2). Индекс особой точки равен 2.

В обоих примерах сумма индексов особых точек равна 2. Это не случайное совпадение.

Теорема 7.1. Пусть число особых точек непрерывного векторного поля на сфере конечно. Тогда сумма их индексов равна 2.

Первое доказательство. Сферу можно разделить на две части кривой, не содержащей особых точек. Для наших целей достаточно было бы рассмотреть произвольную замкнутую кривую на сфере, не проходящую через особые точки. Но докажем несколько более сильное утверждение, а именно, докажем, что если на сфере дано конечное множество точек, то существует окружность большого круга (т.е. сечение сферы плоскостью, проходящей через центр), не проходящее ни через одну из данных точек. Рассмотрим соответствие $\{A, A^*\} \leftrightarrow a$, где A и A^* — диаметрально противоположные точки сферы, a — сечение сферы плоскостью, перпендикулярной прямой AA^* и проходящей через центр сферы. Легко проверить, что точка A принадлежит плоскости b (где $b \leftrightarrow \{B, B^*\}$) тогда и только тогда, когда точка B принадлежит плоскости a .

Пусть A_1, \dots, A_n — данные точки. Им сопоставляются окружности большого круга a_1, \dots, a_n . Существует точка M не принадлежащая ни одной из этих окружностей. Ни одна из данных точек не лежит на окружности m , соответствующей точке M .

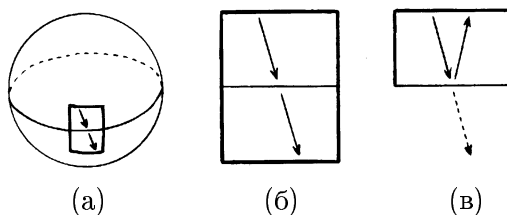


Рисунок 7.3

Представим сферу как воздушный шарик. Выпустив воздух, сферу можно сплющить так, чтобы обе части, на которые рассматриваемая окружность большого круга делит сферу, совпали друг с другом и имели при этом форму круга. Выделим окрестность точки большого круга и посмотрим, что с ней происходит. Рис. 7.3 показывает, что на граничной окружности векторы двух полей симметричны друг другу относительно касательной. Остается доказать следующее несложное утверждение, которое мы сформулируем в виде задачи.

- ▷ **Задача 7.1.** Векторные поля v и w таковы, что на окружности S у них нет особых точек и в каждой точке X этой окружности векторы $v(X)$ и $w(X)$ симметричны относительно касательной. Докажите, что сумма индексов особых точек полей v и w , лежащих внутри окружности, равна 2.

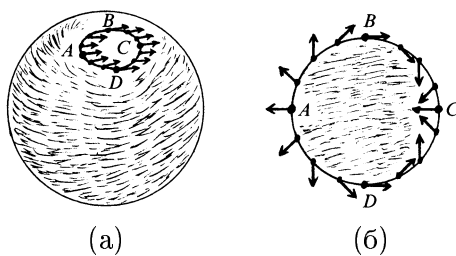


Рисунок 7.4

Второе доказательство. Возьмем произвольную неособую точку векторного поля на сфере и выберем ее окрестность столь малой, что все векторы в ней почти одинаковые (рис. 7.4 (а)). Окрестность не содержит особых точек, поэтому достаточно рассмотреть остальную часть сферы. Ее можно продеформировать в круг (рис. 7.4 (б)). При этом получим векторное поле, направленное на дугах BC и CD внутрь окружности, а на дугах DA и AB наружу. Индекс окружности относительно полученного векторного поля равен 2. В самом деле, при обходе каждой из дуг AB , BC , CD , DA вектор поворачивается на 180° , причем направление поворота вектора совпадает с направлением обхода.

В качестве примера использования теоремы 7.1 докажем *теорему Декарта–Эйлера* о выпуклых многогранниках.

Теорема 7.2. Пусть V — число вершин выпуклого многогранника, P — число его ребер, Γ — число граней. Тогда

$$V - P + \Gamma = 2.$$

Доказательство. Поместим многогранник внутрь сферы так, чтобы он содержал ее центр, и спроецируем ребра многогранника на сферу из ее центра. На сфере возникает при этом криволинейная сеть. Выберем внутри каждой сферической грани по точке и соединим на сфере точки соседних граней путями, проходящими через середины их общих ребер. На рис. 7.5 (а) новая сеть изображена пунктиром. Рассмотрим на сфере сеть, составленную из этих двух сетей, и нарисуем на ее ребрах стрелки, выходящие из выбранных точек граней и входящие в вершины. Полученную сеть можно включить в систему траекторий векторного поля (рис. 7.5 (б)). Вид траектории в окрестности вершины, выбранной точки грани и середины ребра показан на рис. 7.6 (а), (б) и (в) соответственно. Других

особых точек у построенного векторного поля нет, поэтому сумма индексов его особых точек равна $B - P + G$. Согласно теореме 7.1 это число равно 2.

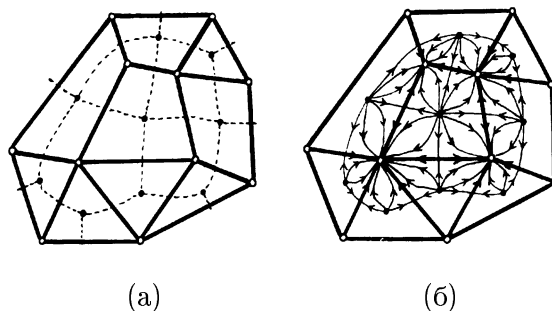


Рисунок 7.5

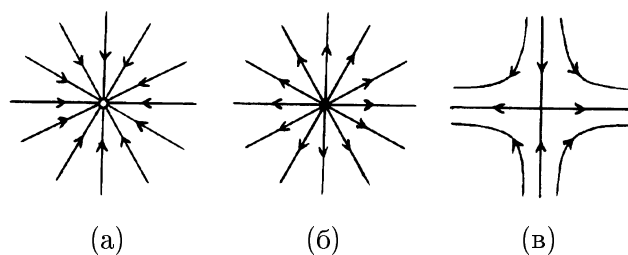


Рисунок 7.6

► **Задача 7.2.** Каждой точке X сферы сопоставлен некоторый ненулевой вектор $v(X)$ трехмерного пространства. Вектор v непрерывно зависит от точки сферы, но он не обязательно касается сферы. Докажите, что хотя бы один из векторов $v(X)$ перпендикулярен касательной плоскости в точке X .

Векторные поля можно рассматривать не только на сфере, но и на других двумерных поверхностях. Одна из двумерных поверхностей изображена в разных видах на рис. 7.7. Ее называют *сферой с тремя ручками*; происхождение такого названия поясняет рис. 7.7 (б). Аналогично можно определить *сферу с g ручками*. На сфере с g

ручками мы тоже будем рассматривать векторные поля, состоящие лишь из касательных векторов.

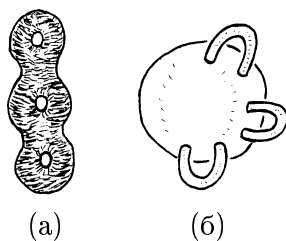


Рисунок 7.7

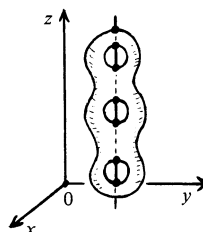


Рисунок 7.8

Можно считать, что сфера с g ручками имеет ось симметрии, параллельную оси Oz (рис. 7.8). Рассмотрим на этой поверхности векторное поле, траектории которого лежат в плоскостях $z = c$. Особые точки этого векторного поля — точки пересечения поверхности

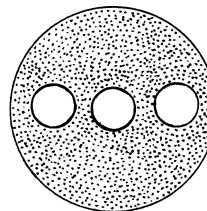


Рисунок 7.9

с осью симметрии. Самая высокая и самая низкая из этих точек (т.е. точки с наибольшим и наименьшим значением координаты z) имеют индекс 1, потому что траектории в окрестностях этих точек выглядят как окружности. Остальные особые точки имеют индекс -1 , потому что траектории в окрестностях этих точек выглядят как части гипербол (и части лучей). У рассматриваемого векторного поля две особые точки индекса 1 и $2g$ особых точек индекса -1 , поэтому сумма индексов его особых точек равна $2 - 2g$.

Теорема 7.3. Сумма индексов особых точек непрерывного векторного поля на сфере с g ручками равна $2 - 2g$.

Первое доказательство. Сферу с тремя ручками можно разрезать на две части, каждую из которых можно продеформировать в плоскую фигуру F , изображенную на

рис. 7.9. Аналогично можно разрезать и сферу с g ручками. Если на кривую разреза попадает особая точка, то, слегка изменив кривую, особую точку можно с нее убрать. Поэтому будем считать, что разрез не проходит через особые точки. Сферу с g ручками, как и обычную сферу, можно сплющить так, что ее обе части совпадут с фигурой F . Из векторного поля на сфере с g ручками при этом получатся два векторных поля v и w на фигуре F , причем на всех граничных окружностях векторы $v(X)$ и $w(X)$ симметричны относительно касательной в точке X . Требуется доказать, что сумма индексов особых точек этих векторных полей равна $2 - 2g$. Воспользуемся для этого результатом задачи 7.1. Пусть a и b — индексы внешней окружности относительно векторных полей v и w соответственно, a_1, \dots, a_g и b_1, \dots, b_g — индексы внутренних окружностей относительно этих векторных полей. Тогда $a + b = 2$, $a_1 + b_1 = 2$, \dots , $a_g + b_g = 2$ согласно задаче 7.1. Продолжим векторные поля v и w на круги, ограниченные внутренними окружностями. Сделать это можно, например, с помощью гомотетии с центром в центре круга. Сумма индексов всех особых точек продолжения поля v равна a . С другой стороны, она равна $a_1 + \dots + a_g + A$, где A — сумма индексов особых точек исходного поля v , т.е. тех особых точек, которые принадлежат фигуре F . Следовательно, $a = a_1 + \dots + a_g + A$. Аналогично $b = b_1 + \dots + b_g + B$. Сложив оба равенства, получим

$$a + b = (a_1 + b_1) + \dots + (a_g + b_g) + (A + B),$$

т.е. $A + B = 2 - 2g$, что и требовалось.

Второе доказательство. Рис. 7.10 показывает, как от сферы с g ручками можно перейти к сфере с $g - 1$ ручкой. Для этого нужно разрезать одну ручку (рис. 7.10 (а)), а затем заклеить кривые разреза двумя полусферами (рис. 7.10 (б)).

Для $g = 0$, т.е. для обычной сферы, теорема 7.3 уже доказана (см. теорему 7.1). Предположим, что утверждение теоремы 7.3 доказано для любого непрерывного векторного поля на сфере с $g - 1$ ручкой. Нужно доказать его для сферы с g ручками. Рассмотрим произвольное непре-

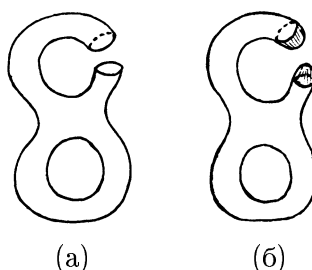


Рисунок 7.10

рерывное векторное поле на сфере с g ручками. Перейдем к сфере с $g - 1$ ручкой, как показано на рис. 7.10. При этом векторное поле не определено на двух полусферах. Но его можно на них непрерывно продолжить, представив полусферу как круг и рассмотрев гомотетию с центром в центре круга. Слегка изменив при необходимости разрез, можно считать, что он не проходит через особые точки. Векторные поля на кривых разреза происходят из одного и того же векторного поля на сфере с g ручками. Поэтому из двух рассматриваемых полусфер с заданными на них векторными полями можно склеить сферу так, что на ней получим непрерывное векторное поле. Следовательно, сумма индексов особых точек на двух полусферах равна 2. Чтобы найти сумму индексов особых точек на остальной части сферы с $g - 1$ ручкой, нужно из суммы индексов всех особых точек векторного поля на сфере с $g - 1$ ручкой вычесть 2. В результате получим $2 - 2(g - 1) - 2 = 2 - 2g$, что и требовалось.

Следствие. Если $g \neq 1$, то на сфере с g ручками любое непрерывное векторное поле имеет особую точку.

Сфера с одной ручкой — это тор. На нем можно построить векторное поле без особых точек. Например,

представим тор как вращающееся колесо и рассмотрим на нем поле скоростей движения точек.

На сфере с g ручками можно построить непрерывное векторное поле с одной особой точкой индекса $2-2g$. Возьмем для этого произвольное непрерывное векторное поле с конечным числом особых точек. Соединим две особые точки путем, а затем сольем их в одну особую точку, стянув путь в точку. В результате число особых точек уменьшится на 1. Сделав так несколько раз, получим векторное поле с одной особой точкой. Но нарисовать его на сфере с g ручками затруднительно. Чтобы получить явное изображение векторного поля с одной особой точкой на сфере с g ручками, можно поступить по-другому. Разрежем сферу с g ручками на две части и продеформируем каждую из них в фигуру, изображенную на рис. 7.9. Рисовать на плоских фигурах все же проще. На одной из частей можно взять векторное поле v с параллельными траекториями. Для сферы с двумя ручками его траектории изображены на рис. 7.11. На граничных окружностях другой части получаем векторное поле w , для которого вектор $w(X)$ симметричен вектору $v(X)$ относительно касательной к окружности в точке X . Для сферы с двумя ручками векторное поле w на крае изображено на рис. 7.11 (б). Основная трудность заключается в том, чтобы продолжить его на всю фигуру.

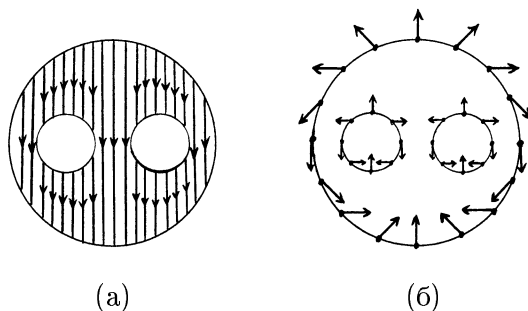


Рисунок 7.11

- **Задача 7.3.** Продолжите векторное поле, изображенное на рис. 7.11 (б), на всю фигуру.

Решения

- **7.1.** Воспользуемся обозначениями рис. 7.12. Так как векторы v и w симметричны относительно касательной, то $\varphi_1 + \varphi_2 = 2(90^\circ + \alpha)$. Поэтому $\varphi_2 = 180^\circ + 2\alpha - \varphi_1$. Пусть точка X совершает полный обход окружности, т.е. угол α изменяется от 0° до 360° . Если при этом угол φ_1 изменяется на $n \cdot 360^\circ$, то угол φ_2 изменяется на $2 \cdot 360^\circ - n \cdot 360^\circ$. Это означает, что если при обходе окружности вектор v совершает n оборотов, то вектор w совершает $2 - n$ оборотов. Согласно теореме 6.1 суммы индексов особых точек векторных полей v и w равны n и $2 - n$ соответственно. Поэтому сумма индексов особых точек полей v и w равна $n + (2 - n) = 2$.

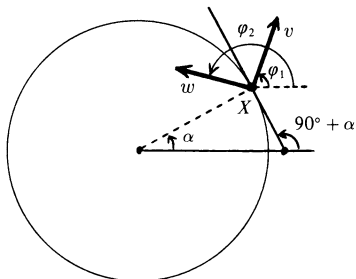


Рисунок 7.12

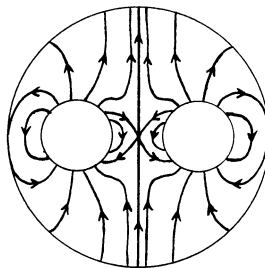


Рисунок 7.13

- **7.2.** Сопоставим каждой точке X , принадлежащей сфере, проекцию вектора $v(X)$ на плоскость, касающуюся сферы в точке X . В результате получим непрерывное векторное поле на сфере. Согласно теореме 7.1 у этого векторного поля есть особая точка X_0 , т.е. проекция вектора $v(X_0)$

на касательную плоскость нулевая. Это означает, что вектор $v(X_0)$ перпендикулярен касательной плоскости.

► **7.3.** См. рис. 7.13.