8

Гомеоморфизмы без неподвижных точек. Периодические гомеоморфизмы

Согласно теореме 6.3 любое непрерывное отображение диска D^2 в себя имеет неподвижную точку. Если же из диска вырезать несколько кругов, то для полученного круга с дырками уже можно построить непрерывное отображение в себя без неподвижных точек. Сделать это несложно.

▷ **Задача 8.1.** Постройте непрерывное отображение без неподвижных точек круга с n дырками в себя.

Задачу 8.1 можно усложнить, потребовав, чтобы отображение без неподвижных точек было гомеоморфизмом. Такое отображение кольца (круга с одной дыркой) построить легко. Для этого достаточно рассмотреть поворот кольца на ненулевой угол. Если количество дырок n больше двух, то построить гомеоморфизм без неподвижных точек тоже несложно. Можно считать, что

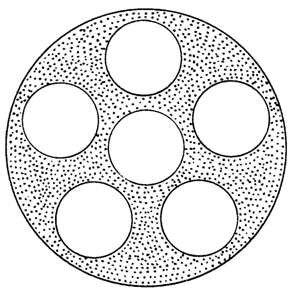


Рисунок 8.1

одна дырка расположена в центре, причем фигура переходит в себя при повороте на угол $\dfrac{2\pi}{n-1}$ (рис. 8.1). Очевидно, что ни одна точка фигуры не остается неподвижной при этом повороте.

▹ **Задача 8.2.** Существует ли геоморфизм без неподвижных точек для круга с двумя дырками?

Пусть $f : M \to M$ — отображение некоторого множества M в себя, m — некоторый элемент множества M. Положим, $f^2(m) = f(f(m))$ и $f^k(m) = f(f^{k-1}(m))$ при $k \geqslant 3$. Отображение f называют *периодическим*, если при некотором $p \geqslant 2$ для всех элементов множества M справедливо равенство $f^p(m) = m$. Наименьшее из всех таких чисел p называют *периодом* отображения f.

Предостережение. Понятие периода отображения не имеет отношения к понятию периода функции. Напомним, что периодом функции f называют такое число T, что $f(x+T) = f(x)$ для всех чисел x.

Примером периодического отображения служит поворот фигуры на угол, кратный π.

Понятие периода имеет смысл не только для непрерывных отображений, но мы, как и раньше, будем рассматривать лишь непрерывные периодические отображения.

▹ **Задача 8.3.** Приведите пример непрерывного периодического отображения f периода 4, которое для части точек имеет период 2, т.е. для этих точек $f(f(m)) = m$ и $f(m) \neq m$.

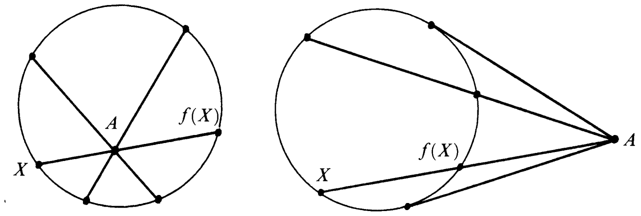
Особое место среди периодических отображений занимают отображения периода 2. У них даже есть специальное название. Отображение периода 2 называют *инволюцией*. Иными словами, инволюция — это такое нетождественное отображение $f : M \to M$, что $f(f(m)) = m$.

Примером инволюции служит симметрия относительно точки, прямой или плоскости.

Пусть f — инволюция множества M. Сопоставим каждому элементу m этого множества пару $\{m, f(m)\}$. При этом элементу $f(m)$ сопоставляется та же самая пара, так как $f(f(m)) = m$. В некоторых случаях элементы m и $f(m)$ совпадают, т.е. $m = f(m)$. Напомним, что такие элементы называют неподвижными.

Таким образом, по инволюции f можно построить разбиение множества M на пары элементов $\{m, f(m)\}$ и отдельные неподвижные элементы. Ясно также, что верно и обратное утверждение, т.е. по разбиению множества M на пары элементов и отдельные элементы можно построить инволюцию. Элементы каждой пары она отображает друг в друга, а каждый отдельный элемент она отображает в самого себя.

Пример инволюции окружности можно получить следующим образом. Выберем точку A, не лежащую на окружности. Пусть X — точка окружности. Отобразим ее в точку $f(X)$, в которой прямая AX вторично пересекает окружность (если AX — касательная к окружности, то $f(X) = X$). Для точки A, лежащей внутри окружности, получаем инволюцию без неподвижных точек (рис. 8.2 (а)), а для точки A, лежащей вне окружности, получаем инволюцию с двумя неподвижными точками (рис. 8.2 (б)). Это связано с тем, что из точки,



(а) (б)

Рисунок 8.2

лежащей внутри окружности, нельзя провести ни одной касательной, а из точки, лежащей вне окружности, можно провести ровно две касательные. Оказывается, что непрерывных инволюций окружности с другим числом неподвижных точек не существует.

▹ **Задача 8.4.** Докажите, что количество неподвижных точек любой непрерывной инволюции окружности равно 0 или 2.

▹ **Задача 8.5.** а) Постройте пример инволюции тора без неподвижных точек.

б) Постройте инволюцию тора с четырьмя неподвижными точками.

в) Постройте инволюцию тора, множество неподвижных точек которой — окружность.

▹ **Задача 8.6.** Постройте отображение тора, имеющее период 3 и имеющее ровно 3 неподвижные точки.

Приведем два примера инволюции сферы с g ручками.

Пример 1. Можно считать, что сфера с g ручками имеет центр симметрии O (рис. 8.3). Симметрия относительно точки O является инволюцией сферы с ручками, причем эта инволюция не имеет неподвижных точек. В самом деле, неподвижной точкой рассматриваемой симметрии является лишь точка O. В зависимости от четности g она расположена либо вне сферы с ручками, либо внутри ее, но в обоих случаях точка O не принадлежит сфере с ручками.

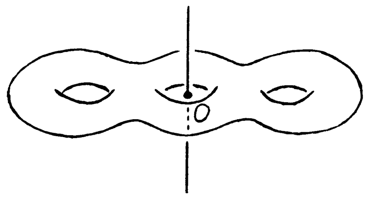


Рисунок 8.3

Пример 2. Можно считать, что сфера с g ручками имеет ось симметрии (см. снова рис. 8.3). Симметрия относительно оси является инволюцией сферы с g ручками. Но эта инволюция не при всех g будет инволюцией без неподвижных точек. Дело в том, что при четном g ось симметрии пересекает сферу с ручками в двух точках. А при нечетном g получаем инволюцию без неподвижных точек.

Между инволюциями, построенными в примерах 1 и 2, есть существенное различие. Инволюции из примера 1 изменяют ориентацию сферы с ручками, а инволюции из примера 2 сохраняют ориентацию . Мы имеем в виду следующее. Рассмотрим пару векторов, касающихся сферы с ручками в одной точке. Направление вращения от первого вектора ко второму задает ориентацию сферы с ручками. Инволюция переводит данную пару касательных векторов в другую пару касательных векторов. В случае симметрии относительно точки новая пара касательных векторов задает другую ориентацию сферы с ручками, а в случае симметрии относительно прямой — ту же самую ориентацию.

Если на множестве M задана инволюция f, то можно отождествить точку m с точкой $f(m)$; при этом точка $f(m)$ отождествляется с точкой m, так как $f(f(m)) = m$. Эту операцию будем называть *склейкой по инволюции.*

Посмотрим, что получается из сферы с g ручками при склейке по инволюциям, построенным в примерах 1 и 2. Начать проще всего с инволюций из примера 2 для сфер с нечетным числом ручек. Такие инволюции сохраняют ориентацию и не имеют неподвижных точек.

Рассмотрим сферу с нечетным числом ручек, симметричную относительно прямой (рис. 8.3). Такую сферу с ручками можно разрезать плоскостью, проходящей через ось симметрии, на две части, одна из которых изображена на рис. 8.4. Точки одной части можно склеить с точками другой части, поэтому достаточно рассмотреть одну из двух частей сферы с ручками. Но на границе этой части есть точки, симметричные относительно исходной оси симметрии. Их нужно склеить. На рис. 8.4 изображены стрелки, которые нужно склеить. Для сферы с тремя ручками в результате получится сфера с двумя ручками, а для сферы с $2g+1$ ручкой получится сфера с $g+1$ ручкой.

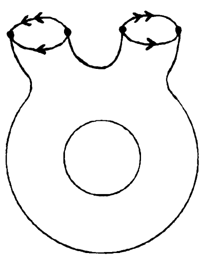
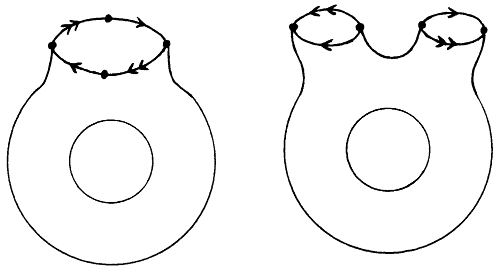


Рисунок 8.4



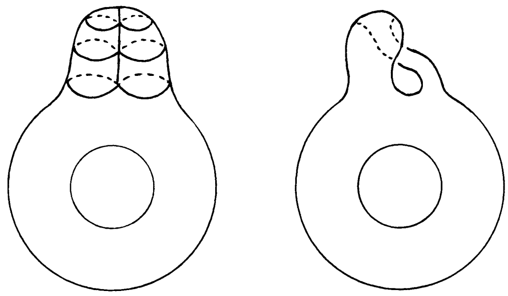
(а) (б)

Рисунок 8.5

Рассмотрим теперь склейки по инволюциям из примера 1. Напомним, что они изменяют ориентацию и не имеют неподвижных точек. Случаи сфер с четным и нечетным числом ручек нужно рассматривать отдельно. На рис. 8.5 показано, какие склейки нужно сделать для сфер с двумя и тремя ручками. Обратите внимание, что стрелки на рис. 8.5 (б) не такие, как на рис. 8.4.

При склейке стрелок, изображенных на рис. 8.5, возникают некоторые трудности. Дело в том, что требуемую склейку нельзя выполнить в трехмерном пространстве. Точнее говоря, ее можно выполнить, лишь допуская самопересечения поверхностей. Результаты такой склейки изображены на рис. 8.6.

Но если нас интересует фигура лишь с точностью до гомеоморфизма, то нет необходимости располагать ее в трехмерном пространстве. Важно лишь знать, как устроены окрестности каждой точки фигуры и как эти окрестности стыкуются друг с другом. У каждой точки сферы с g ручками есть окрестность, гомеоморфная кругу. У каждой точки фигуры, полученной из сферы с g ручками склейкой по инволюции из примера 1, тоже есть такая



(а) (б)

Рисунок 8.6

окрестность. В этом легко убедиться с помощью рис. 8.5.

Мы рассматривали лишь склейки по инволюциям без неподвижных точек. Для таких инволюций образом достаточно малой окрестности U точки x является окрестность V точки $f(x)$, не пересекающаяся с U. При склейке непересекающихся окрестностей U и V получаем окрестность W, гомеоморфную как U, так и V.

В том случае, когда инволюция имеет неподвижную точку x, приходится склеивать друг с другом точки не разных окрестностей U и V, а одной и той же окрестности U. Это приводит ко многим неприятностям. Мы обсудим лишь одну из них.

Пусть A — сфера с ручками, f — инволюция на ней, B — фигура, полученная из A склейкой по инволюции f. Рассмотрим отображение $p : A \to B$, сопоставляющее точке a точку b, полученную в результате склейки точек a и $f(a)$. Если f — инволюция без неподвижных точек, то достаточно малая окрестность W точки b получается в результате склейки непересекающихся окрестностей U и V. Это означает, что прообраз окрестности W при отображении p состоит из двух непересекающихся окрестностей U и V, а прообраз точки b состоит из точек a и $f(a)$, лежащих в окрестностях U и V соответственно. Если же инволюция f имеет неподвижную точку x, то ситуация совсем иная. Точка $a = x$ склеивается с точкой $f(x)$, т. е. сама с собой. Поэтому прообраз полученной точки b при отображении p состоит не из двух точек, а из одной точки.

Если фигура B получена из сферы с g ручками A склейкой по инволюции f без неподвижных точек, то у каждой точки b фигуры B есть окрестность, гомеоморфная диску. Поэтому на B тоже можно рассматривать векторные поля.

Теорема 8.1. *Сумма индексов особых точек любого непрерывного векторного поля на B равна $1 - g$.*

Доказательство. По векторному полю w на B можно построить векторное поле на A, которое переходит в w при проекции $p : A \to B$ (рис. 8.7). Каждой особой точке векторного поля на B соответствуют две особые точки построенного векторного поля на A, имеющие тот же самый индекс. Поэтому сумма индексов особых точек векторного поля на A в два раза больше суммы индексов особых точек векторного поля на B. С другой стороны, согласно теореме 7.3 сумма индексов особых точек любого непрерывного векторного поля на сфере с g ручками A равна $2 - 2g$.

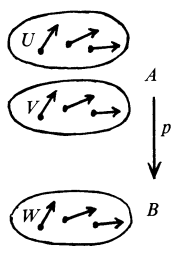


Рисунок 8.7

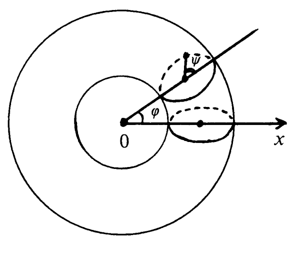


Рисунок 8.8

▹ **Задача 8.7.** Введем на торе координаты (φ, ψ), как показано на рис. 8.8. Рассмотрим инволюцию тора, переводящую точку с координатами (φ, ψ) в точку с координатами (ψ, φ). Докажите, что при склейке тора по этой инволюции получается лист Мёбиуса.

Решения

▸ **8.1.** Выберем внутри одной из дырок точку O. Отобразим сначала каждую точку X круга с дырками в точку, в которой луч OX пересекает граничную окружность круга. При этом неподвижными будут лишь точки этой окружности. Повернув затем окружность на ненулевой угол, получим отображение без неподвижных точек.

▸ **8.2.** Ответ: да, существует.

Круг с двумя дырками можно продеформировать в сферу с тремя дырками (рис. 8.9). При этом можно считать, что полученная фигура симметрична относительно плоскости Π и переходит в себя при повороте на 120° вокруг прямой l, перпендикулярной плоскости Π. Ясно, что плоскость Π и прямая l проходят через центр сферы. Требуемый гомеоморфизм — композиция симметрии относительно плоскости Π и поворота на 120° вокруг прямой l.

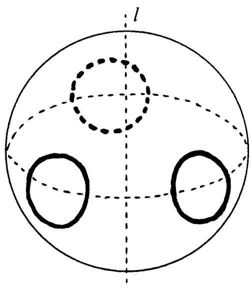


Рисунок 8.9

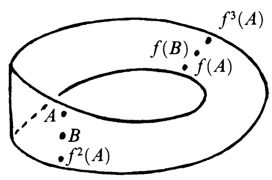


Рисунок 8.10

▶ **8.3.** Требуемый пример отображения построим для листа Мёбиуса. Склеим для этого лист Мёбиуса из прямоугольной полоски. Проведем на ней линии, параллельные краю листа Мёбиуса. Каждую точку листа Мёбиуса переместим по такой линии на расстояние, равное половине длины полоски (рис. 8.10). Если точка A не равноудалена от несклеиваемых краев полоски, то $f^4(A) = A$, причем точки A, $f(A)$, $f^2(A)$ и $f^3(A)$ различны. Если же точка B равноудалена от краев полоски, то $f^2(B) = B$.

▶ **8.4.** Достаточно рассмотреть случай, когда инволюция f окружности имеет неподвижную точку A. Требуется доказать, что инволюция f имеет ровно одну неподвижную точку, отличную от A.

Пусть B — некоторая точка окружности, причем $f(B) = C \neq B$. Инволюция f является гомеоморфизмом, так как $f^{-1} = f$. Поэтому f отображает гомеоморфно дугу AB в одну из двух дуг окружности, заданных точками A и C. Обозначим эту дугу AC.

Для двух дуг AB и AC возможны два варианта расположения:

1) дуги AB и AC не имеют общих внутренних точек;

2) одна из дуг AB и AC содержит другую дугу.

Покажем, что в нашей ситуации второй вариант невозможен. Инволюция f отображает дугу AC в дугу AB, поэтому дуги AB и AC играют аналогичные роли. Пусть для определенности дуга AB содержится в дуге $AC = f(AB)$. Тогда дуга $f(AB) = AC$ содержится в дуге $f(AC) = f(f(AB)) = AB$. Следовательно, дуги AB и AC совпадают, что противоречит условию $C \neq B$.

Итак, дуги AB и AC не пересекаются. Кроме того, если дуга AB содержится в дуге AB_1, то дуга AC содержится в дуге AC_1, где $C_1 = f(B_1)$. Это означает, что если точка B движется по окружности так, что длина дуги AB увеличивается, то длина дуги AC тоже увеличивается. Следовательно, в некоторый момент точки B

и C встретятся. Точка их встречи — неподвижная точка инволюции f, причем у f нет других неподвижных точек, кроме этой точки и точки A.

▶ **8.5.** Пусть O — центр симметрии тора, l — его ось симметрии, причем l пересекает тор в четырех точках (рис. 8.11). Симметрия тора относительно точки O не имеет неподвижных точек, а симметрия тора относительно прямой l имеет четыре неподвижные точки.

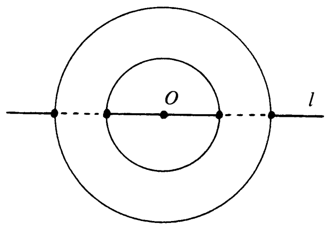
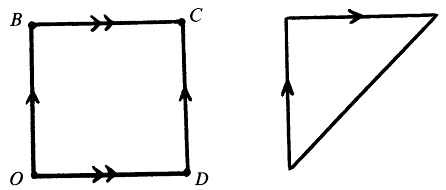


Рисунок 8.11

Пример инволюции тора, множество неподвижных точек которой — окружность, фактически описан в условии задачи 8.7. В самом деле, множество точек тора, для которых $\varphi = \psi$, представляет собой окружность.

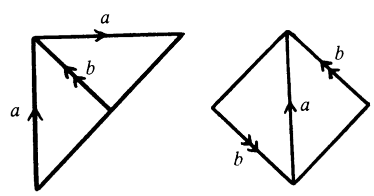
▶ **8.6.** Воспользуемся координатами (φ, ψ), описанными в условии задачи 8.7. Рассмотрим отображение тора, переводящее точку с координатами (φ, ψ) в точку с координатами $(\psi, -\varphi - \psi)$. При этом отображении точка (φ, ψ) переходит последовательно в точки $(\psi, -\varphi - \psi)$, $(-\psi - \varphi, \varphi)$ и (φ, ψ). Неподвижными будут точки, для которых $\varphi = \psi + 2m\pi$ и $\psi = -\varphi - \psi + 2n\pi$, где m и n — целые числа. Подставив первое равенство во второе, получим $3\psi = 2(n-m)\pi$, т.е. $\psi = \dfrac{2(n-m)\pi}{3}$. А так как точка тора, имеющая координаты $(\varphi + 2k\pi, \psi + 2l\pi)$, совпадает с точкой (φ, ψ), то на торе получаем три неподвижные точки, а именно, $\varphi = \psi = 0$, $\varphi = \psi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\varphi = \psi = \dfrac{4\pi}{3}$.

▶ **8.7.** Рассмотрим на плоскости $O\varphi\psi$ квадрат $OBCD$, заданный неравенствами $0 \leqslant \varphi$, $\psi \leqslant 2\pi$. Склеив противоположные стороны этого квадрата (рис. 8.12 (а)), получим тор. Отображение квадрата, переводящее точку (φ, ψ) в точку (ψ, φ), является симметрией относительно диагонали OC. Склеим точки квадрата, симметричные относительно диагонали OC. При этом произойдет склейка стрелок, нарисованных на сторонах OD и OB. Следовательно, при склейке точек тора по рассматриваемой инволюции получается такая же фигура, как и при склейке двух стрелок, нарисованных на двух катетах прямоугольного треугольника (рис. 8.12 (б)). Разрежем этот треугольник по стрелке b (рис. 8.13 (а)), а затем склеим стрелки a (рис.8.13 (б)). Теперь ясно, что после склейки стрелок b получается лист Мёбиуса.



(а) (б)

Рисунок 8.12



(а) (б)

Рисунок 8.13