9

Двумерные поверхности

В этом параграфе мы более подробно познакомимся с некоторыми свойствами двумерных поверхностей.

Узел трилистник можно расположить на торе (рис. 9.1). При этом получим замкнутую кривую, которая трижды обвивает тор в направлении меридиана и дважды в направлении параллели.

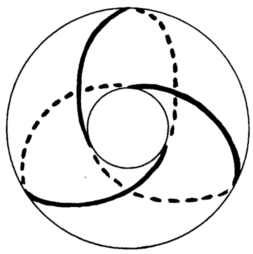


Рисунок 9.1

▷ **Задача 9.1.** Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что на торе существует замкнутая несамопересекающаяся кривая, обвивающая его p раз в направлении меридиана и q раз в направлении параллели.

Для меридиана $p = 1$ и $q = 0$, а для параллели $p = 0$ и $q = 1$. Оказывается, что эти значения p и q вместе со значениями, указанными в задаче 9.1, исчерпывают все возможные значения p и q. Одно из наиболее простых доказательств этого утверждения использует задачу 9.2 а).

▷ **Задача 9.2.** а) Рассмотрим на плоскости произвольную кривую, соединяющую точки A и B. Докажите, что если n — натуральное число, то существует отрезок PQ длиной $\dfrac{AB}{n}$, концы которого лежат на данной кривой, а он сам параллелен отрезку AB.

б) Докажите, что если положительное число d не является натуральным, то существует кривая, соединяющая точки A и B, для которой утверждение задачи а) неверно, т.е. если точки P и Q принадлежат этой кривой и отрезок PQ параллелен AB, то длина отрезка PQ не равна $\dfrac{AB}{d}$.

▷ **Задача 9.3.** Докажите, что если замкнутая несамопересекающаяся кривая на торе обвивает его p раз в направлении меридиана и q раз в направлении параллели, то либо числа p и q взаимно простые, либо одно из них равно 1, а другое равно 0.

Сферу можно задать полиномиальным уравнением $P(x,y,z) = 0$, где $P(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Можно ли задать полиномиальным уравнением сферу с g ручками? Оказывается, что да.

▷ **Задача 9.4.** Укажите полином $P(x,y,z)$, для которого уравнение $P(x,y,z) = 0$ задает сферу с g ручками.

Изучим теперь более подробно две поверхности, которые нам уже встретились в § 8, а именно, поверхности, которые получаются при склейке диаметрально противоположных точек сферы и при склейке точек тора, симметричных относительно его центра симметрии. Напомним, что они получаются в результате склейки стрелок, изображенных на рис. 9.2 (а) и (б).

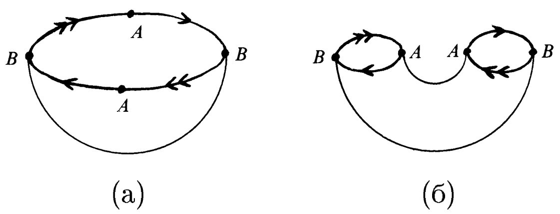


Рисунок 9.2

Как уже говорилось, построенная в примере 1 инволюция изменяет ориентацию сферы с ручками. Из этого следует, что полученная в результате склейки по такой инволюции поверхность неориентируема. В самом деле, соединим на сфере с ручками точку A и симметричную ей точку A' некоторой кривой. В результате склейки по инволюции из этой кривой получится замкнутая кривая, так как точки A и A' склеиваются. Обход вдоль этой замкнутой кривой изменяет ориентацию, поэтому полученная поверхность неориентируема.

Рассмотрим сначала поверхность, которая получается при склейке диаметрально противоположных точек сферы. Эту поверхность называют *проективной плоскостью.* Чтобы объяснить происхождение этого названия, дадим другое определение проективной плоскости. Это определение более длинное, но оно связано с важными понятиями проективной геометрии.

Параллельные линии, например железнодорожные рельсы, кажутся пересекающимися на горизонте. Это вызывает желание дополнить плоскость точками, в которых пересекаются параллельные прямые. Как это сделать? Возьмем точку O, не лежащую в данной плоскости П. Каждой точке A, лежащей в плоскости П, можно сопоставить прямую OA (рис. 9.3). Прямой, лежащей в плоскости П, будет при этом сопоставлена плоскость, проходящая через точку O, точнее говоря, плоскость за исключением прямой, проходящей через точку O параллельно плоскости П. Если прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке A, то соответствующие им плоскости пересекаются по прямой OA. Если же прямые l_1 и l_2 параллельны, то соответствующие им плоскости пересекаются по прямой m, параллельной прямым l_1 и l_2. Это

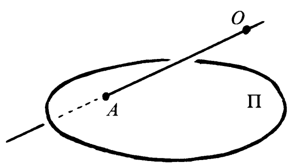


Рисунок 9.3

можно понимать следующим образом: прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке, соответствующей прямой m. Прямая m не пересекает плоскость П, поэтому она не соответствует никакой точке этой плоскости.

Теперь можно дать следующие определения. Назовем *точками проективной плоскости* прямые, проходящие через точку O, а плоскости, проходящие через точку O, назовем *проективными прямыми*. При этом прямые, проходящие через точку O параллельно плоскости П, будем называть *бесконечно удаленными точками*. Две проективные прямые пересекаются ровно в одной точке. Проективные прямые, соответствующие параллельным прямым плоскости П, пересекаются в бесконечно удаленной точке.

Отметим, что плоскость П не участвует в определении точек проективной плоскости и проективных прямых. Поэтому о плоскости П можно вообще не говорить. Тогда бесконечно удаленные точки ничем не будут отличаться от остальных точек проективной плоскости.

Покажем теперь, что множество всех определенных выше точек проективной плоскости гомеоморфно поверхности, полученной в результате склейки диаметрально противоположных точек сферы. Рассмотрим для этого сферу с центром O. Каждой точке проективной плоскости соответствуют две точки сферы, а именно, точки, в которых прямая OA пересекает сферу. Эти точки диаметрально противоположные. Таким образом, склеив диаметрально противоположные точки сферы, получим фигуру, гомеоморфную проективной плоскости (рассматриваемой как множество точек проективной плоскости).

▹ **Задача 9.5.** Докажите, что если из проективной плоскости вырезать круг, то в результате получится фигура, гомеоморфная листу Мёбиуса.

▹ **Задача 9.6.** Выберем на проективной плоскости две проективные прямые и вырежем круг, не пересекающий их. Полученная фигура гомеоморфна листу Мёбиуса. Изобразите на нем выбранные проективные прямые.

▷ **Задача 9.7.** Рассмотрим фигуру, точки которой соответствуют прямым на плоскости. При этом точки считаются близкими, если соответствующие им прямые близки, т.е. они либо пересекаются под малым углом, либо параллельны и расстояние между ними мало. Докажите, что эта фигура гомеоморфна листу Мёбиуса.

* * *

Займемся теперь поверхностью, которая получается в результате склейки точек тора, симметричных относительно его центра симметрии. Эта поверхность называется *бутылка Клейна*. Как уже говорилось, она получается в результате склейки стрелок, изображенных на рис. 9.2 (б). Если допустить самопересечения, то при такой склейке получится поверхность, изображенная на рис. 9.4.

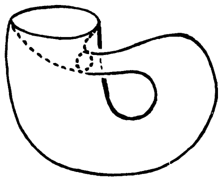
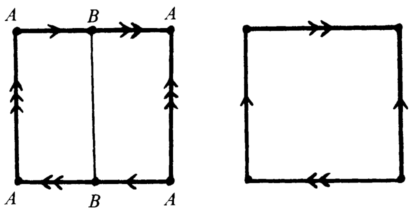


Рисунок 9.4

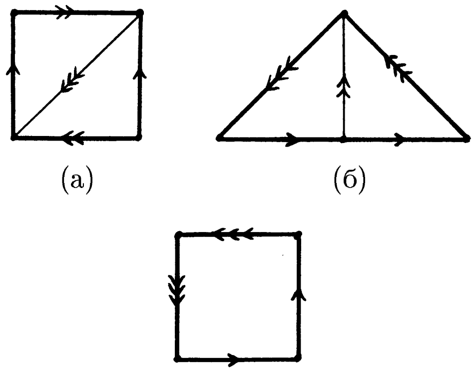


(а) (б)

Рисунок 9.5

Бутылку Клейна можно получить, склеивая определенным образом точки сторон квадрата. Чтобы получить такое представление бутылки Клейна, разрежем фигуру, изображенную на рис. 9.2 (б), по дуге, соединяющей пару симметричных точек A и A (эти две точки обозначены одной буквой, потому что при склейке они отождествляются и становятся одной точкой). В результате получим квадрат, точки сторон которого отождествляются так, как показано на рис. 9.5 (а). Две короткие стрелки можно заменить одной стрелкой. После некоторых переобозначений придем к рис. 9.5 (б).

Еще одно представление о бутылке Клейна можно получить, разрезав квадрат по диагонали (рис. 9.6 (а)). Склеив после этого одну из пар стрелок, придем к рис. 9.6 (б). Полученный треугольник можно заменить на квадрат (рис. 9.6 (в)).



(а) (б)

(в)

Рисунок 9.6

▹ **Задача 9.8.** Докажите, что бутылку Клейна можно разрезать на два листа Мёбиуса.

▹ **Задача 9.9.** Рассмотрим фигуру F, точки которой соответствуют парам точек $\{x, y\}$, где x — точка отрезка $[0, 1]$, y — точка листа Мёбиуса. При этом точки $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$ фигуры F считаются близкими, если близки как точки x_1 и x_2 отрезка, так и точки y_1 и y_2 листа Мёбиуса. Докажите, что граница этой фигуры гомеоморфна бутылке Клейна.

▹ **Задача 9.10.** Постройте на бутылке Клейна инволюцию без неподвижных точек.

Если из проективной плоскости вырезать диск, то получим лист Мёбиуса (задача 9.5). Это означает, что проективную плоскость можно получить следующим образом. Вырежем из сферы диск и приклеим лист Мёбиуса к краю полученной сферы с дыркой. Напомним, что краем листа Мёбиуса является окружность, которую можно отождествить с краем сферы с дыркой.

Бутылку Клейна можно разрезать на два листа Мёбиуса. Это означает, что бутылку Клейна можно получить следующим образом. Вырежем из сферы два диска и приклеим к краю каждой дырки по листу Мёбиуса.

Помимо операции приклеивания листа Мёбиуса, есть еще операция приклеивания ручки (рис. 9.7).

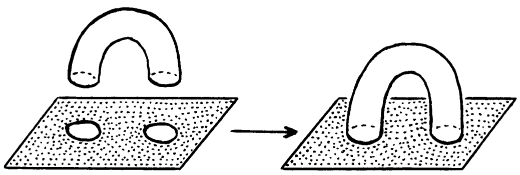


Рисунок 9.7

▹ **Задача 9.11.** Докажите, что сфера, к которой приклеены три листа Мёбиуса, гомеоморфна сфере, к которой приклеена одна ручка и один лист Мёбиуса.

Решения

▸ **9.1.** Тор можно получить, склеив точки плоскости с координатами (x, y) и $(x + m, y + n)$, где m и n — целые числа. В самом деле, в результате такой склейки получим квадрат, изображенный на рис. 9.8; стрелки показывают, какие точки его сторон нужно склеить.

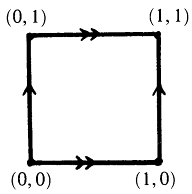


Рисунок 9.8

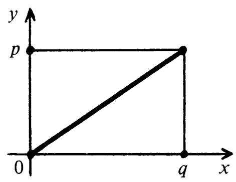


Рисунок 9.9

Чтобы получить тор описанным выше способом, нет необходимости рассматривать всю плоскость. Можно взять и произвольную ее часть, содержащую квадрат, изображенный на рис. 9.8. Например, можно взять прямоугольник с вершинами $(0,0)$, $(0,p)$, $(q,0)$ и (q,p) (рис. 9.9). Диагональ этого прямоугольника, исходящая из начала координат, в результате склейки превращается в замкнутую кривую на торе. Эта кривая обвивает тор p раз в направлении меридиана и q раз в направлении параллели (или q раз в направлении меридиана и p раз в направлении параллели; это зависит от того, как именно мы склеили тор из квадрата).

Остается проверить, что на торе получается несамопересекающаяся кривая. Координаты точек рассматриваемой диагонали прямоугольника удовлетворяют уравнению $px = qy$. Предположим, что точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), лежащие на диагонали, отождествляются при склейке, т.е. $x_1 = x_2 + m$ и $y_1 = y_2 + n$, где m и n — целые числа. Учитывая, что $px_1 = qy_1$ и $px_2 = qy_2$, получаем $p(x_2 + m) = q(y_2 + n)$ и $pm = qn$. Так как числа p и q взаимно простые, то $m = kq$ и $n = kp$. Следовательно, при склейке отождествляются лишь концы диагонали; никакие другие точки диагонали не отождествляются.

▸ **9.2.** а) Будем говорить, что на кривой, соединяющей точки A и B, реализуется расстояние d, если существует отрезок длиной d, концы которого лежат на этой кривой, а сам отрезок параллелен AB. Требуется доказать, что расстояние $\frac{AB}{n}$ реализуется на любой кривой, соединяющей точки A и B. Докажем сначала, что если $0 < \alpha < 1$, то на любой кривой, соединяющей точки A и B, реализуется хотя бы одно из расстояний αAB и $(1-\alpha)AB$. Можно считать, что отрезок AB расположен на оси Ox, причем абсциссы его концов равны 0 и 1. Предположим, что на кривой γ_0 не реализуются расстояния α и $1-\alpha$. Тогда при сдвигах этой кривой вдоль оси Ox на расстояния α и $1-\alpha$ получаются кривые, не имеющие общих точек с исходной кривой. Пусть γ_α и γ_1 — кривые, полученные из кривой γ_0 сдвигами вдоль оси Ox на расстояние α и 1 в положительном направлении. Тогда кривая γ_α не пересекается ни с γ_0, ни с γ_1. Построим кривую L следующим образом. Выберем на кривой γ_α точку с максимальной ординатой и проведем из нее луч, параллельный оси Oy, по направлению к $+\infty$, а из точки с минимальной ординатой проведем луч по направлению $-\infty$ (рис. 9.10). Кривая

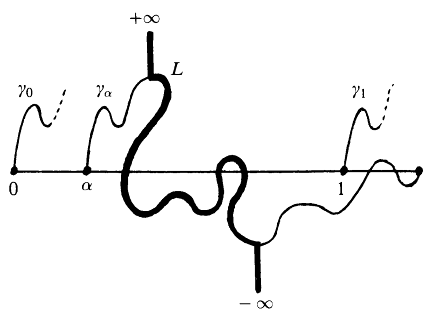


Рисунок 9.10

L состоит из этих двух лучей и части кривой γ_α, идущей из начала одного луча в начало другого. Кривые γ_0 и γ_1 не пересекаются ни с кривой γ_α, ни с рассматриваемыми лучами. Поэтому они не пересекаются с кривой L. А так как кривая L разбивает плоскость на две части, причем точки кривых γ_0 и γ_1 с максимальными ординатами лежат в разных частях, то кривые γ_0 и γ_1 лежат в разных частях.

С другой стороны, кривые γ_0 и γ_1 имеют общую точку с координатами (1,0). Получено противоречие, поэтому хотя бы одно из расстояний α и $1-\alpha$ реализуется.

Докажем теперь индукцией по n, что расстояние $\frac{AB}{n}$ реализуется на любой кривой. При $n = 1$ утверждение очевидно. Шаг индукции делается следующим образом. Пусть $\alpha = 1/n$. Тогда

$$1-\alpha = \frac{n-1}{n},$$

поэтому одно из расстояний $\frac{AB}{n}$ и $\frac{(n-1)AB}{n}$ реализуется. Если реализуется расстояние $\frac{AB}{n}$, то утверждение доказано. Если реализуется расстояние $\frac{(n-1)AB}{n}$, то для кривой, соединяющей концы отрезка длиной $\frac{(n-1)AB}{n}$, согласно предположению индукции реализуется расстояние

$$\frac{1}{n-1}\frac{(n-1)AB}{n} = \frac{AB}{n}.$$

б) Пусть n — целая часть числа d. Разделим отрезок $[n, d]$ на n равных частей. На рис. 9.11 изображена кривая γ, соединяющая концы отрезка AB длиной d. Пунктирная кривая γ' получена из кривой γ сдвигом вдоль отрезка AB на расстояние 1. Так как кривые γ и γ' не пересекаются, то на кривой γ не реализуется расстояние $AB/d = 1$.

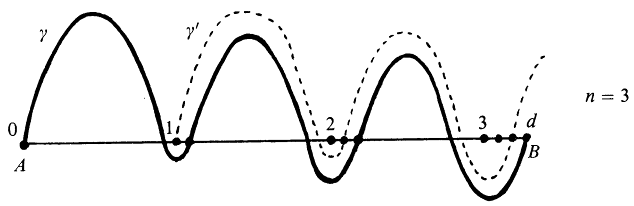


Рисунок 9.11

► **9.3.** Пусть замкнутая кривая γ обвивает тор p раз в направлении меридиана и q раз в направлении параллели. Отождествим точки плоскости, имеющие координаты (x, y) и $(x+m, y+n)$, где m и n — целые числа. В результате получим тор. При такой склейке кривую γ можно получить из кривой Γ, соединяющей на плоскости точки $A = (0,0)$ и $B = (p, q)$.

Предположим, что числа p и q либо оба не равны нулю и имеют общий делитель $d \neq 1$, либо одно из них равно нулю, а другое равно $d \neq 1$. Согласно задаче 9.2 а) на кривой Γ реализуется расстояние $\dfrac{AB}{d}$, т.е. на кривой Γ можно выбрать точки P и Q так, что

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{d}\overrightarrow{AB}.$$

Вектор $\overrightarrow{PQ}$ имеет целочисленные координаты $(\frac{p}{d}, \frac{q}{d})$, поэтому точки P и Q отождествляются, т.е. они соответствуют одной и той же точке тора. Это означает, что кривая γ самопересекающаяся.

► **9.4.** Заметим сначала, что если $Q(x, y)$ — произведение g сомножителей вида $(x - 2k + 1)^2 + y^2 - 1$, где $k = 1, \ldots, g$, то уравнение $Q(x, y) = 0$ задает на плоскости множество, состоящее из g окружностей (рис. 9.12). Поэтому уравнение

$$Q(x, y) + z^2 - \varepsilon = 0,$$

где ε — достаточно малое положительное число, задает сферу с g ручками.

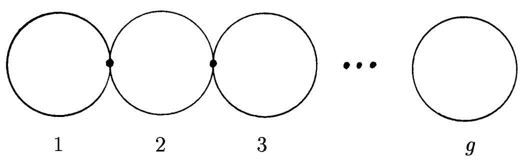
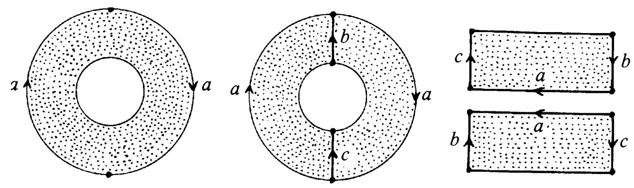


Рисунок 9.12

▸ **9.5.** На рис. 9.13 (а) показано, как можно представить проективную плоскость с вырезанным диском. Сделаем разрезы b и c, изображенные на рис. 9.13 (б). Затем склеим стрелки a (рис. 9.13 (в)). В результате получим лист Мёбиуса.



(а) (б) (в)

Рисунок 9.13

▸ **9.6.** На листе Мёбиуса две проективные прямые выглядят так, как показано на рис. 9.14.

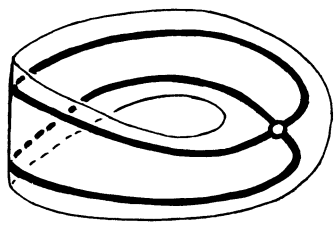
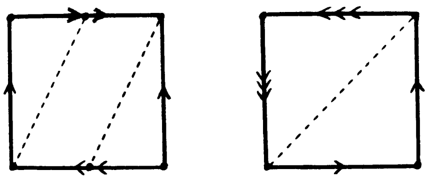


Рисунок 9.14

▸ **9.7.** Прямая на плоскости задается уравнением $ax + by + c = 0$, где числа a и b не равны нулю одновременно. Поэтому прямой можно сопоставить тройку чисел (a, b, c). Тройки (a, b, c) и $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, где $\lambda \neq 0$, задают одну и ту же прямую. Поэтому множество прямых на плоскости гомеоморфно проективной плоскости, из которой выколота точка, соответствующая тройке (0,0,1).

Проективная плоскость с выколотой точкой гомеоморфна листу Мёбиуса. При этом предполагается, что граничная окружность не принадлежит листу Мёбиуса.

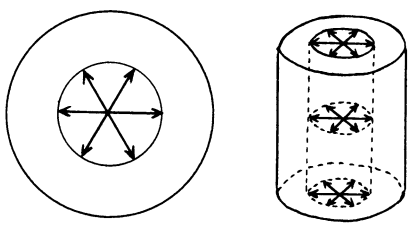
▸ **9.8.** Напомним, что два способа склейки бутылки Клейна из квадрата изображены на рис. 9.5 (б) и 9.6 (в). На рис. 9.15 пунктиром изображены требуемые разрезы для обоих способов склейки.



(а) (б)

Рисунок 9.15

▸ **9.9.** Представим лист Мёбиуса как проективную плоскость с вырезанным диском, т.е. как кольцо, на внутренней граничной окружности которого отождествлены диаметрально противоположные точки (рис. 9.16 (а)). Тогда рассматриваемую фигуру можно представить как цилиндр, из которого вырезан меньший цилиндр и при этом граничные точки меньшего цилиндра отождествлены так, как показано на рис. 9.16 (б). После склейки граничные точки меньшего цилиндра, не лежащие на его основаниях, перестанут быть граничными. Поэтому граница рассматриваемой фигуры представляет собой сферу, из которой вырезаны два диска и вместо них вклеены два листа Мёбиуса. Эта поверхность гомеоморфна бутылке Клейна.



(а) (б)

Рисунок 9.16

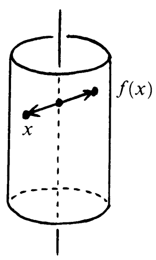
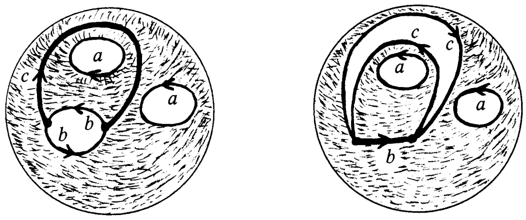


Рисунок 9.17

▶ **9.10.** Рассмотрим боковую поверхность прямого кругового цилиндра. Ее граница состоит из двух окружностей. Отождествив их точки, симметричные относительно центра симметрии цилиндра получим бутылку Клейна. Требуемая инволюция f этой бутылки Клейна — симметрия относительно оси цилиндра (рис. 9.17).

▶ **9.11.** Сфера, к которой приклеены два листа Мёбиуса, гомеоморфна бутылке Клейна. Поэтому сфера, к которой приклеены три листа Мёбиуса, гомеоморфна бутылке Клейна, к которой приклеен один лист Мёбиуса. Такая фигура изображена на рис. 9.18 (а). Сделаем разрез c, а затем склеим стрелки b (рис. 9.18 (б)). В результате получим сферу, к которой приклеены ручка a и лист Мёбиуса c.



(а) (б)

Рисунок 9.18