ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Ковариантные и контравариантные координаты вектора

Из аналитической геометрии известно, что всякий вектор на плоскости x^1x^2 (цифры 1, 2 над буквой x означают индекс, но не степень!) можно разложить на две составляющие по единичным векторам базиса $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$

$$\vec{a}=a^1\vec{e}_1+a^2\vec{e}_2. \tag{1.1}$$

При этом числа a^1 и a^2 называются прямоугольными декартовыми координатами вектора $\vec{a}$ (рис. 3).

Если осн координат x^1 и x^2 не являются взаимно ортогональными, то вектор $\vec{a}$ можно задать двояко:

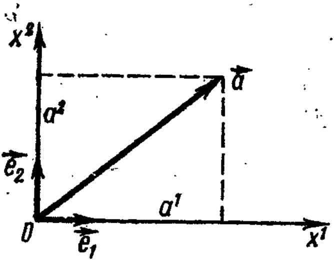

Рис. 3

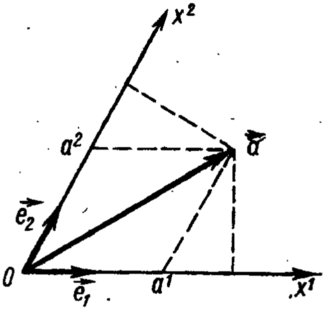

Рис. 4

разлагая его, как и прежде, по единичным векторам базиса (1.1), т. е. числами a^1 и a^2, а также с помощью ортогональных проекций вектора $\vec{a}$ на оси координат (рис. 4).

Введем теперь два вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, вообще говоря, различной длины, направленных соответственно по x^1 и x^2 (рис. 5). Тогда для вектора $\vec{a}$ справедливо соотношение (1.1). Пара чисел a^1, a^2 определяет однозначно вектор $\vec{a}$. Поэтому эти числа могут быть названы координатами вектора $\vec{a}$ *(контравариантными)*.

Рассмотрим скалярные произведения

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_1=a_1;\quad \vec{a}\cdot\vec{e}_2=a_2. \tag{1.2}$$

Обозначим длину вектора $\vec{b}$ через $|\vec{b}|$. Тогда из (1.2) по определению скалярного произведения имеем

$$a_1=\vec{a}\cdot\vec{e}_1=|\vec{a}|\cdot|\vec{e}_1|\cos\alpha=\vec{a}|_{x^1}\cdot|\vec{e}_1|, \tag{1.3}$$

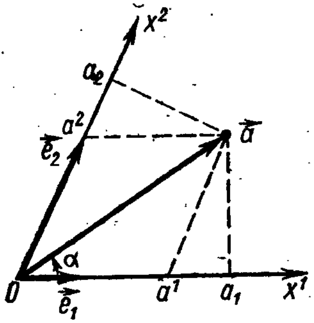

Рис. 5

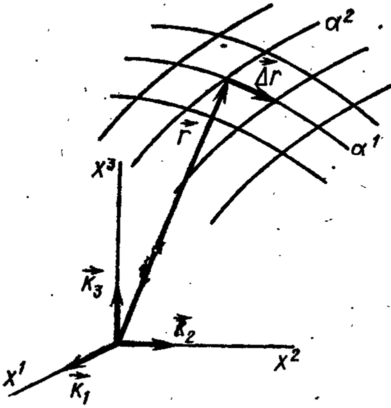

Рис. 6

где $\vec{a}|_{x^1}$ — ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на ось x^1. Из (1.2) и (1.3) имеем

$$\vec{a}|_{x^1}=\frac{a_1}{|\vec{e}_1|};\quad \vec{a}|_{x^2}=\frac{a_2}{|\vec{e}_2|}. \tag{1.4}$$

Таким образом, по числам a_1 и a_2 можно определить ортогональные проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат и, следовательно, сам вектор $\vec{a}$. Тогда величины a_1 и a_2 тоже можно назвать координатами вектора $\vec{a}$, в отличие от предыдущих — *ковариантными*. В дальнейшем всегда контравариантные компоненты вектора $\vec{a}$ по отношению к некоторому базису будем обозначать верхними индексами, а ковариантные — нижними.

Рассмотрим три некомпланарных вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, и пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор в трехмерном пространстве. Тогда

$$\vec{a}=a^1\vec{e}_1+a^2\vec{e}_2+a^3\vec{e}_3=\sum_{i=1}^{3} a^i\vec{e}_i. \qquad (1.5)$$

Условимся всякий раз, когда в одночлене встречается какой-нибудь латинский индекс дважды, один раз вверху и один раз внизу, считать, что происходит суммирование по этому индексу от 1 до n (n — размерность пространства, в данном случае $n=3$), а знак суммы опускать, т. е.

$$\sum_{i=1}^{3} a^i\vec{e}_i\equiv a^i\vec{e}_i \quad (i=1,\,2,\,3). \qquad (1.6)$$

При этом, если из изложения не ясно и требуется уточнить, какие значения пробегает индекс суммирования, значения этого индекса заключаем в круглые скобки, как показано в (1.6). Если же встречается дважды греческий индекс, то суммирование по нему не производится. Если нужно уточнить, какие значения может пробегать греческий индекс, заключаем его значения в угловые скобки. Например, выражение

$$a^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\,\langle\alpha=1,\,2,\,3\rangle \qquad (1.7)$$

представляет собой составляющую вектора $\vec{a}$ по оси x^{α}.

Индекс, по которому происходит суммирование, называется *немым индексом*. Его можно, как и переменную интегрирования в подынтегральном выражении, заменить любым другим индексом. Например,

$$x^j_i y^i=x^j_k y^k=x^j_m y^m \text{ и т. д.}$$

(сравните: $\int f(x)dx=\int f(t)dt$). Индекс, встречающийся в одночлене один раз, называется *свободным индексом.* При правильном написании любого выражения каждое его слагаемое должно иметь одни и те же свободные индексы, стоящие на одном и том же месте (вверху или внизу).

Обратим внимание на порядок написания индексов. Из записи x^i_j следует, что индекс i стоит на первом месте, а индекс j — на втором. Чтобы подчеркнуть это, иногда пишут $x^{i\cdot}_{\cdot j}$. Если порядок следования индексов ясен или не имеет значения, будем писать x^i_j.

Упражнение 1.1. Представить в полной записи

$$a^{\alpha}{}_{kl}x_{\alpha}y^k z^l \quad (k, l=1, 2, 3), \quad \langle \alpha=1, 2\rangle. \bullet$$

Вектор $\vec{a}$ в косоугольной системе координат определяется, таким образом, своими контравариантными a^i и ковариантными a_i компонентами

$$\vec{a}=a^i\vec{e}_i, \quad a_i=\vec{a}\cdot\vec{e}_i. \tag{1.8}$$

Рассмотрим теперь криволинейную систему координат α^1, α^2, α^3. Для этого зададим радиус-вектор $\vec{r}$ как дифференцируемую вектор-функцию от трех переменных

$$\vec{r}=\vec{r}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3). \tag{1.9}$$

Векторное соотношение (1.9) равносильно трем скалярным:

$$x^i=x^i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3). \tag{1.10}$$

На рис. 6 показана координатная сетка линий α^1 и α^2. Если мы дадим приращение радиус-вектору $\vec{r}$ по координатной линии $\Delta\alpha^1$, то

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^1}=\lim_{\Delta\alpha^1\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\alpha^1}. \tag{1.11}$$

Следовательно, вектор $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^1}$ является вектором, касательным к линии α^1. Таким образом, в каждой точке пространства можно рассмотреть тройку векторов $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i}$, которые можно принять за *векторы базиса* (или *репера*), если они не компланарны. Это условие выполнено, если в каждой точке

$$\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^1}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^2}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^3}\right) \neq 0, \tag{1.12}$$

т. е.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial\alpha^1} & \frac{\partial x^1}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial x^1}{\partial\alpha^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial\alpha^1} & \frac{\partial x^2}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial x^3}{\partial\alpha^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial\alpha^1} & \frac{\partial x^3}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial x^3}{\partial\alpha^3} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.13}$$

По теореме о неявных функциях в этом случае существует обращение формул (1.10):

$$\alpha^i = \alpha^i(x^1,\ x^2,\ x^3), \tag{1.14}$$

так что *якобиевы матрицы* $\frac{\partial x^i}{\partial\alpha^j} \equiv X^i{}_j$(или X) и $\frac{\partial\alpha^i}{\partial x^j} \equiv Y^i{}_j$ (короче, Y) являются взаимно обратными.

Таким образом, при выполнении условий (1.13) в каждой точке пространства существует связанный с криволинейной системой координат базис

$$\vec{e}_i \equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i}, \tag{1.15}$$

который поэтому называется *локальным*. Если $\vec{k}_i$ — тройка единичных векторов, то локальный базис $\vec{e}_i$ связан с ней соотношениями

$$\vec{e}_i = X_i{}^j\vec{k}_j;\quad \vec{k}_i = Y_i{}^j e_j. \tag{1.16}$$

Упражнение 1.2. Найти якобиевы матрицы $X^i{}_j$ и $Y^i{}_j$ и локальный базис $\vec{e}_i$ цилиндрической системы координат

$$x^1 = \alpha^1\cos\alpha^2,$$
$$x^2 = \alpha^1\sin\alpha^2,$$
$$x^3 = \alpha^3. \quad \bullet$$

Упражнение 1.3. Найти матрицы X и Y и построить локальный базис $\vec{e}_i$ в сферической системе координат

$$x^1 = \alpha^1 \cos \alpha^2 \cos \alpha^3,$$
$$x^2 = \alpha^1 \sin \alpha^2 \cos \alpha^3,$$
$$x^3 = \alpha^1 \sin \alpha^3. \quad \bullet$$

Итак, в каждой точке вектор $\vec{a}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ представляется в локальном базисе $\vec{e}_i$ своими контравариантными компонентами

$$\vec{a} = a^i \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} = a^i \vec{e}_i. \tag{1.17}$$

Его ковариантные компоненты согласно (1.8) определяются следующим образом:

$$a_j = \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^j} = \vec{a} \cdot \vec{e}_j = a^i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j. \tag{1.18}$$

Определим теперь матрицу

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^j} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \tag{1.19}$$

которая, очевидно, является симметричной. Она называется *фундаментальной* матрицей. Определитель этой матрицы $g = \det |g_{ij}|$ согласно условиям (1.12) или (1.13) отличен от нуля. Следовательно, существует матрица g^{ij}, обратная по отношению к g_{ij}:

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j, \tag{1.20}$$

где δ_i^j — элементы единичной матрицы (*дельта Кронекера*):

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{1.21}$$

Из формул (1.18) и (1.19) устанавливаем связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора $\vec{a}$:

$$a_j = a^i g_{ij}. \tag{1.22}$$

Умножая левую и правую части этого соотношения на g^{jk} и производя суммирование по j, получим, используя (1.20), соотношение, обратное к (1.22):

$$a_j g^{jk} = a^k. \tag{1.23}$$

Обратим внимание на мнемоническое правило суммирования величин a^i с дельтой Кронекера δ_i^k, использованное при выводе соотношения (1.23):

$$a^k = a^i \delta_i^k.$$

У компоненты a^i следует заменить индекс, по которому происходит суммирование с дельтой Кронекера, на ее свободный индекс.

С помощью формул (1.22), (1.23) и определения (1.19) скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно выразить четырьмя различными способами:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = g^{ji} a_j b_i = a_i b^i. \tag{1.24}$$

Рассмотрим теперь тройку векторов $\vec{e}^j$, получающуюся из базисных векторов $\vec{e}_i$, следующим образом:

$$\vec{e}^j = g^{ji} \vec{e}_i. \tag{1.25}$$

Умножая скалярно левую и правую части равенства (1.25) последовательно на векторы $\vec{e}_k$ и $\vec{e}^k$, получим

$$\vec{e}^j \cdot \vec{e}_k = \delta^j{}_k, \tag{1.26}$$

$$\vec{e}^j \cdot \vec{e}^k = g^{jk}. \tag{1.27}$$

Следовательно, вектор $\vec{e}^1$, например, ортогонален к векторам $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, а его скалярное произведение с вектором $\vec{e}_1$ равно единице. Систему векторов $\vec{e}^1$, $\vec{e}^2$ и $\vec{e}^3$ называют ***базисом, взаимным*** (или ***сопряженным***) с базисом e_1, e_2, e_3.

Упражнение 1.4. Доказать некомпланарность векторов $\vec{e}^1$, $\vec{e}^2$ и $\vec{e}^3$.

Упражнение 1.5. Показать справедливость формулы

$$\vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^j. \quad \bullet \tag{1.28}$$

Рассмотрим какой-либо вектор $\vec{a}$. Из соотношений (1.23) и (1.25) находим, что

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i = a_j g^{ji} \vec{e}_i = a_j \vec{e}^j. \tag{1.29}$$

Умножая скалярно вектор $\vec{a}$ на $\vec{e}^k$, из (1.29) получим

$$\vec{a}\cdot\vec{e}^k=a_j\vec{e}^j\cdot\vec{e}^k=a_jg^{jk}=a^k. \qquad (1.30)$$

Итак, всякий вектор $\vec{a}$ может быть разложен как по векторам базиса $\vec{e}_i$ (тогда компоненты его разложения являются контравариантными), так и по векторам базиса $\vec{e}^i$ (с ковариантными компонентами)

$$\vec{a}=a^i\vec{e}_i=a_i\vec{e}^i. \qquad (1.31)$$

При этом ковариантные и контравариантные компоненты вектора $\vec{a}$ определяются как скалярные произведения вектора $\vec{a}$ на базисные векторы $\vec{e}_i$ и $\vec{e}^i$ соответственно

$$a_i=\vec{a}\cdot\vec{e}_i; \qquad a^i=\vec{a}\cdot\vec{e}^i. \qquad (1.32)$$

Это оправдывает название базиса $\vec{e}^1$, $\vec{e}^2$, $\vec{e}^3$ как взаимного по отношению к $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Отметим существенную разницу этих базисов. Если векторы $\vec{e}_i$ связаны непосредственно с системой координат (являются касательными к координатным линиям), то векторы $\vec{e}^i$ вводятся формально по формулам (1.25) и, вообще говоря, не являются касательными векторами ни к каким координатным линиям (*неголономный* базис). Формулы (1.22) и (1.23) показывают, что с помощью матриц g_{ij} и g^{ij} можно опускать и подимать индексы у компонент вектора. Иногда говорят, что с помощью этих матриц происходит *жонглирование* индексами.

Упражнение 1.6. Показать, что в прямоугольной декартовой системе координат

$$\vec{e}_i=\vec{e}^i; \quad g_{ij}=g^{ij}=\delta_i{}^j. \qquad (1.33)$$

§ 2. Преобразование координат. Ковариантная производная вектора

Наряду со старой криволинейной системой координат $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ рассмотрим новую систему координат $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, связанную со старой соотношениями

$$\alpha^{i'}=\alpha^{i'}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3). \qquad (2.1)$$