$$\vec{a}\cdot\vec{e}^k = a_j\vec{e}^j\cdot\vec{e}^k = a_j g^{jk} = a^k. \qquad (1.30)$$

Итак, всякий вектор $\vec{a}$ может быть разложен как по векторам базиса $\vec{e}_i$ (тогда компоненты его разложения являются контравариантными), так и по векторам базиса $\vec{e}^i$ (с ковариантными компонентами)

$$\vec{a} = a^i\vec{e}_i = a_i\vec{e}^i. \qquad (1.31)$$

При этом ковариантные и контравариантные компоненты вектора $\vec{a}$ определяются как скалярные произведения вектора $\vec{a}$ на базисные векторы $\vec{e}_i$ и $\vec{e}^i$ соответственно

$$a_i = \vec{a}\cdot\vec{e}_i; \qquad a^i = \vec{a}\cdot\vec{e}^i. \qquad (1.32)$$

Это оправдывает название базиса $\vec{e}^1$, $\vec{e}^2$, $\vec{e}^3$ как взаимного по отношению к $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Отметим существенную разницу этих базисов. Если векторы $\vec{e}_i$ связаны непосредственно с системой координат (являются касательными к координатным линиям), то векторы $\vec{e}^i$ вводятся формально по формулам (1.25) и, вообще говоря, не являются касательными векторами ни к каким координатным линиям (*неголономный* базис). Формулы (1.22) и (1.23) показывают, что с помощью матриц g_{ij} и g^{ij} можно опускать и поднимать индексы у компонент вектора. Иногда говорят, что с помощью этих матриц происходит *жонглирование* индексами.

Упражнение 1.6. Показать, что в прямоугольной декартовой системе координат

$$\vec{e}_i = \vec{e}^i; \quad g_{ij} = g^{ij} = \delta_i^j. \qquad (1.33)$$

§ 2. Преобразование координат. Ковариантная производная вектора

Наряду со старой криволинейной системой координат $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ рассмотрим новую систему координат $(\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \alpha^{3'})$, связанную со старой соотношениями

$$\alpha^{i'} = \alpha^{i'}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3). \qquad (2.1)$$

Предположим, что преобразование (2.1) в каждой точке обратимо

$$\alpha^i = \alpha^i(\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \alpha^{3'}). \tag{2.2}$$

Для этого потребуем, чтобы определитель якобиевой матрицы

$$A^{i'}{}_j \equiv \frac{\partial \alpha^{i'}}{\partial \alpha^j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

был отличен от нуля, т. е.

$$A \equiv \det |A^{i'}{}_j| \neq 0. \tag{2.4}$$

Тогда существует матрица $B^i{}_{j'}$, обратная к матрице (2.3), так что

$$A^{i'}{}_j B^j{}_{j'} = \delta^{i'}{}_{j'}; \quad B^i{}_{j'} A^{j'}{}_j = \delta^i{}_j. \tag{2.5}$$

Матрица $B^i{}_{j'}$ является якобиевой матрицей преобразования (2.2).

Векторы нового локального репера определяются согласно формуле (1.13) следующим образом:

$$\vec{e}_{i'} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^{i'}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} B^i{}_{i'}. \tag{2.6}$$

Отсюда следует, что при переходе от одной системы координат к другой векторы репера преобразуются по законам

$$\vec{e}_{i'} = \vec{e}_i B^i{}_{i'}, \tag{2.7}$$

$$\vec{e}_i = \vec{e}_{i'} A^{i'}{}_i. \tag{2.8}$$

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{a}$

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i. \tag{2.9}$$

В новой (штрихованной) системе координат имеем

$$\vec{a} = a^{i'} \vec{e}_{i'}. \tag{2.10}$$

Сравним выражения (2.9) и (2.10) и воспользуемся соотношениями (2.7)

$$a^i \vec{e}_i = a^{i'} \vec{e}_i B^i{}_{i'}. \tag{2.11}$$

Так как векторы $\vec{e}_i$ линейно независимы, то

$$a^i = B^i{}_{i'} a^{i'}. \qquad (2.12)$$

Умножим левую и правую части (2.12) на $A^{j'}{}_i$ и просуммируем по i от 1 до 3. Используя первое равенство (2.5) и отмеченное в § 1 свойство символов Кронекера, получим

$$A^{j'}{}_i a^i = A^{j'}{}_i B^i{}_{i'} a^{i'} = \delta^{j'}{}_{i'} a^{i'} = a^{j'}, \qquad (2.13)$$

т. е.

$$a^{i'} = A^{i'}{}_i a^i. \qquad (2.14)$$

Таким образом, при переходе от одной системы координат к другой по закону (2.1) контравариантные компоненты произвольного вектора преобразуются по закону (2.14) с помощью якобиевой матрицы (2.3).

Посмотрим, по какому закону преобразуются ковариантные компоненты вектора $\vec{a}$. Согласно (1.18) и (2.7) имеем

$$a_{j'} = \vec{a} \cdot \vec{e}_{j'} = \vec{a} \cdot \vec{e}_j B^j{}_{j'}, \qquad (2.15)$$

т. е.

$$a_{j'} = a_j B^j{}_{j'}. \qquad (2.16)$$

Из формулы (2.16) видим, что при переходе от одной системы координат к другой ковариантные компоненты произвольного вектора $\vec{a}$ преобразуются совершенно по другому закону, нежели контравариантные компоненты, а именно с помощью матрицы, обратной и транспонированной по отношению к якобиевой матрице (2.3) преобразования (2.1). Заметим, что векторы репера (2.7) преобразуются по тому же закону, что и ковариантные компоненты вектора $\vec{a}$. Поэтому векторы репера $\vec{e}_i$ иногда называют *ковариантным базисом* системы координат.

Посмотрим, как преобразуются векторы взаимного базиса. Для этого разложим по векторам этого базиса произвольный вектор $\vec{a}$:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}^{\,i}. \qquad (2.17)$$

В новой системе координат согласно (2.16) имеем

$$\vec{a} = a_{i'}\vec{e}^{i'} = a_i B^i{}_{i'}\vec{e}^{i'}. \tag{2.18}$$

Сравнивая это выражение с (2.17) и учитывая произвольность вектора $\vec{a}$ (а поэтому и его компонент a_i), получим

$$\vec{e}^i = B^i{}_{i'}\vec{e}^{i'}. \tag{2.19}$$

Умножая (2.19) на $A^{i'}{}_i$, суммируя по i и учитывая свойство символов Кронекера, получим

$$\vec{e}^{i'} = A^{i'}{}_i\vec{e}^i. \tag{2.20}$$

Таким образом, векторы взаимного репера при переходе к другой системе координат преобразуются так же, как и контравариантные компоненты вектора $\vec{a}$. Поэтому векторы взаимного репера иногда называют *контравариантным базисом* системы координат.

Теперь можно дать формальное определение ковариантным и контравариантным компонентам вектора. А именно, *ковариантными* компонентамн вектора (или векторного поля) $\vec{a}$ называется система трех чисел a_i, определенная в каждой точке пространства и в каждой системе координат, которая при переходе от одной системы координат к другой (2.1) преобразуется по формулам (2.16). Аналогично определяются и контравариантные компоненты вектора (для которых закон преобразования от одной системы координат к другой задается формулами (2.14)).

Величины, которые не меняются при переходе от одной системы координат к другой, называются *инвариантными* относительно преобразований (2.1). Например, скалярные величины являются инварнантными. Примерами таких величин могут служить плотность вещества, температура, энергия, энтропия и т. д. Инвариантными объектами являются и векторы. В самом деле, нелепо было бы предположить, что от того, что мы рассматриваем течение жидкости в той или иной неподвижной системе координат, меняется скорость течения этой жидкости. Однако компоненты этой скорости изменяются по установленным выше законам (см. формулы (2.12) и (2.16)).

Упражнение 2.1. Показать, что длина вектора $\vec{a}$

(2.9) является инвариантом относительно преобразований (2.1).

Упражнение 2.2. Пусть $\varphi(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ — дифференцируемая функция криволинейных координат α^i. Доказать, что ее частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^i}$ преобразуются при переходе от одной системы координат к другой как ковариантные компоненты вектора.

Упражнение 2.3. Доказать, что дифференциал функции $\varphi(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ является инвариантом относительно преобразований (2.1)

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^i} d\alpha^i. \tag{2.21}$$

Упражнение 2.4. Доказать, что при преобразованиях (2.1) величины g_{ij} и g^{ij}, определенные в § 1, преобразуются по законам

$$g^{i'j'} = A^{i'}{}_i A^{j'}{}_j g^{ij}, \tag{2.22}$$

$$g_{i'j'} = g_{ij} B^i{}_{i'} B^j{}_{j'}. \tag{2.23}$$

Упражнение 2.5. Доказать, что символы Кронекера $\delta^i{}_j$ в любой криволинейной системе координат имеют одни и те же значения. ●

Образуем теперь частные производные от векторов репера $\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial\alpha^j}$ и выразим их в виде линейной комбинации от векторов репера $\vec{e}_k$ (т. е. разложим по векторам базиса)

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial\alpha^j} = \Gamma^k_{ij}\vec{e}_k. \tag{2.24}$$

Величины $\Gamma_{ij}{}^k$ * называются *символами Кристоффеля 2-го рода.* Они симметричны по нижним индексам в силу определения (1.13):

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial\alpha^j} \equiv \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j} = \Gamma^k_{ij}\vec{e}_k. \tag{2.25}$$

Символы Кристоффеля можно найти по заданной

---

* Иногда в литературе обозначают $\Gamma^k_{ij} \equiv \left\{ {k \atop ij} \right\}$.

матрице g_{ij}. В самом деле, дифференцируя (1.19), имеем

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \alpha^k} \cdot \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \alpha^k}. \tag{2.26}$$

Подставляя в правую часть (2.26) обозначение (2.25), получим

$$\Gamma^m_{ik} g_{mj} + \Gamma^m_{jk} g_{mi} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}. \tag{2.27}$$

Меняя последовательно местами индексы i, k и j, k в равенстве (2.27), получим

$$\Gamma^m_{ki} g_{mj} + \Gamma^m_{ji} g_{mk} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i}, \tag{2.28}$$

$$\Gamma^m_{ij} g_{mk} + \Gamma^m_{kj} g_{mi} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j}. \tag{2.29}$$

Складывая теперь равенства (2.28) и (2.29), вычитая равенство (2.27) и учитывая симметрию Γ^k_{ij} по нижним индексам, находим

$$2\Gamma^m_{ij} g_{mk} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}. \tag{2.30}$$

Умножая левую и правую части (2.30) на $\frac{1}{2} g^{kl}$ и суммируя по k, из равенства (1.18) получим

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} \right). \tag{2.31}$$

Отсюда видно, что, например, в прямоугольной декартовой системе координат все символы Кристоффеля Γ^l_{ij} тождественно обращаются в нуль.

Рассмотрим некоторый вектор $\vec{a}$ в прямоугольной декартовой системе координат x^k. Очевидно, что его частные производные имеют вид

$$\vec{a}_k \equiv \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} = \frac{\partial a^i}{\partial x^k} \vec{k}_i. \tag{2.32}$$

Таким образом, компоненты вектора $\vec{a}_k$ получаются частным дифференцированием соответствующей компоненты вектора $\vec{a}$.

В криволинейной системе координат $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ векторы репера $\vec{e}_i$ различны в разных точках. Поэтому

$$\vec{a}_k \equiv \frac{\partial \vec{a}}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial a^i}{\partial \alpha^k}\vec{e}_i + a^i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial a^i}{\partial \alpha^k}\vec{e}_i + \Gamma^m_{ik} a^i \vec{e}_m, \quad (2.33)$$

т. е.

$$\vec{a}_k \equiv \frac{\partial \vec{a}}{\partial \alpha^k} = \left(\frac{\partial a^m}{\partial \alpha^k} + \Gamma^m_{ik} a^i\right)\vec{e}_m. \quad (2.34)$$

Следовательно, в этом случае для нахождения компоненты вектора $\vec{a}_k$ необходимо знать все компоненты вектора $\vec{a}$.

Величина, заключенная в скобки в выражении (2.34), называется *ковариантной производной* контравариантных компонент вектора $\vec{a}$ и обозначается через

$$a^m{}_{,k} \equiv \frac{\partial a^m}{\partial \alpha^k} + \Gamma^m_{ik} a^i. \quad (2.35)$$

В литературе встречаются и другие обозначения

$$a^m{}_{,k} \equiv \nabla_k a^m \equiv a^m|_k. \quad (2.36)$$

Формулу (2.34) можно записать, таким образом, в виде

$$\vec{a}_k \equiv \frac{\partial \vec{a}}{\partial \alpha^k} = a^m{}_{,k}\vec{e}_m. \quad (2.37)$$

По аналогии с (2.37) определим ковариантную производную $a_{m,k}$ ковариантных компонент вектора $\vec{a}$ из формулы

$$\vec{a}_k = a_{m,k}\vec{e}^m. \quad (2.38)$$

Умножая скалярно на $\vec{e}_n$ левую и правую части соотношений (2.38), получим

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \alpha^k}\cdot\vec{e}_n = a_{n,k}. \quad (2.39)$$

Продифференцируем частным образом равенство (1.18)

$$\frac{\partial a_j}{\partial \alpha^k}=\frac{\partial \vec{a}}{\partial \alpha^k}\cdot\vec{e}_j+\vec{a}\cdot\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \alpha^k}. \tag{2.40}$$

Используя равенства (2.39), (2.24) и (1.18), получим

$$\frac{\partial a_j}{\partial \alpha^k}=a_{j,k}+\vec{a}\cdot\Gamma^m_{jk}\vec{e}_m=a_{j,k}+\Gamma^m_{jk}a_m, \tag{2.41}$$

откуда

$$a_{j,k}=\frac{\partial a_j}{\partial \alpha^k}-\Gamma^m_{jk}a_m. \tag{2.42}$$

Упражнение 2.6. Доказать справедливость соотношений

$$\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial \alpha^j}=-\Gamma^i_{jk}\vec{e}^k. \tag{2.43}$$

Упражнение 2.7. Доказать, что при преобразовании криволинейных координат (2.1) символы Кристоффеля 2-го рода преобразуются по закону

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}=\Gamma^k_{ij}B^i{}_{i'}B^j{}_{j'}A^{k'}{}_k+\frac{\partial^2\alpha^k}{\partial\alpha^{i'}\partial\alpha^{j'}}A^{k'}{}_k. \tag{2.44}$$

Упражнение 2.8. Доказать, что для ковариантных производных $a^i{}_{,k}$ и $a_{i,k}$ справедливы формулы жонглирования

$$a^i{}_{,k}=g^{im}a_{m,k};\quad a_{i,k}=g_{im}a^m{}_{,k}. \tag{2.45}$$

Упражнение 2.9. Доказать, что при преобразовании (2.1) ковариантные производные $a^i{}_{,j}$ и $a_{i,j}$ преобразуются по законам

$$a_{i',j'}=B^i{}_{i'}B^j{}_{j'}a_{i,j}, \tag{2.46}$$

$$a^{i'}{}_{,j'}=A^{i'}{}_iB^j{}_{j'}a^i{}_{,j}. \tag{2.47}$$

Упражнение 2.10. Доказать

$$\Gamma^j_{jk}=\frac{1}{2}g^{jl}\frac{\partial g_{jl}}{\partial \alpha^k}. \tag{2.48}$$

Упражнение 2.11. *Символами Кристоффеля 1-го* *рода* называются величины $\Gamma_{ij,k}$ *, определенные следующим образом:

$$\Gamma_{ij,k} \equiv g_{km}\Gamma^m_{ij}. \quad \Gamma^m_{ij} g_{km} \tag{2.49}$$

Тогда из (2.30) следует

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}\right). \tag{2.50}$$

Нетрудно видеть, что символы Кристоффеля 1-го рода $\Gamma_{ij,k}$ симметричны по индексам ij и

$$\Gamma^l_{ij} = g^{lk}\Gamma_{ij,k}. \tag{2.51}$$

Доказать, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}. \tag{2.52}$$

Упражнение 2.12. Показать, что закон преобразования символов Кристоффеля 1-го рода при переходе к другой системе координат (2.1) таков:

$$\Gamma_{i'j',k'} = B^i{}_{i'}B^j{}_{j'}B^k{}_{k'}\Gamma_{ij,k} + \frac{\partial^2 \alpha^l}{\partial \alpha^{i'}\partial \alpha^{j'}} B^k{}_{k'} g_{kl}. \tag{2.53}$$

Упражнение 2.13. Показать, что при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат ковариантные и контравариантные компоненты преобразуются по одному закону, т. е.

$$a^i = a_i. \quad ● \tag{2.54}$$

Поэтому для прямоугольной системы координат будем предполагать суммирование по повторяющемуся индексу, даже если он написан оба раза внизу, например

$$\vec{a} = a_i\vec{k}_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.55}$$

§ 3. Группы преобразований

Отметим одно важное обстоятельство, касающееся «инвариантности» рассматриваемых величин. Для этого заметим, что от преобразования (2.1) мы требо-

---

* В литературе иногда обозначают $\Gamma_{ij,k} \equiv [ij, k]$.