рода называются величины $\Gamma_{ij,k}$ *, определенные следующим образом:

$$\Gamma_{ij,k} \equiv g_{km}\Gamma^m_{ij}. \qquad \Gamma^m_{ij}\, g_{km} \tag{2.49}$$

Тогда из (2.30) следует

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}\right). \tag{2.50}$$

Нетрудно видеть, что символы Кристоффеля 1-го рода $\Gamma_{ij,k}$ симметричны по индексам ij и

$$\Gamma^l_{ij} = g^{lk}\Gamma_{ij,k}. \tag{2.51}$$

Доказать, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}. \tag{2.52}$$

Упражнение 2.12. Показать, что закон преобразования символов Кристоффеля 1-го рода при переходе к другой системе координат (2.1) таков:

$$\Gamma_{i'j',k'} = B^i{}_{i'}B^j{}_{j'}B^k{}_{k'}\Gamma_{ij,k} + \frac{\partial^2 \alpha^l}{\partial \alpha^{i'}\partial \alpha^{j'}} B^k{}_{k'} g_{kl}. \tag{2.53}$$

Упражнение 2.13. Показать, что при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат ковариантные и контравариантные компоненты преобразуются по одному закону, т. е.

$$a^i = a_i. \tag{2.54}$$

Поэтому для прямоугольной системы координат будем предполагать суммирование по повторяющемуся индексу, даже если он написан оба раза внизу, например

$$\vec{a} = a_i \vec{k}_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.55}$$

§ 3. Группы преобразований

Отметим одно важное обстоятельство, касающееся «инвариантности» рассматриваемых величин. Для этого заметим, что от преобразования (2.1) мы требо-

* В литературе иногда обозначают $\Gamma_{ij,k} \equiv [ij,\ k]$.

вали лишь его обратимости (2.2), т. е. выполнения условий (2.4). Назовем такое преобразование *общим*.

Однако иногда нам нужно рассмотрение преобразований более частного вида.

Например, в случае, если функции $\alpha^{i'}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ являются линейными, соотношения (2.1) и (2.2) можно записать соответственно в виде

$$\alpha^{i'} = A^{i'}{}_i \alpha^i + A^{i'}, \tag{3.1}$$

$$\alpha^i = B^i{}_{i'} \alpha^{i'} + B^i. \tag{3.2}$$

Упражнение 3.1. Показать, что если соотношения (3.1) и (3.2) взаимообратны, то выполняются условия (2.4), (2.5) и условия

$$A^{i'} = -A^{i'}{}_i B^i, \quad B^i = -B^i{}_{i'} A^{i'}. \quad \bullet \tag{3.3}$$

Преобразования (3.1), (3.2) называются *аффинными* преобразованиями координат.

Можно рассмотреть различные частные случаи этих преобразований.

Так, полагая в (3.1) и (3.2):

$$A^{i'} = 0, \quad B^i = 0, \tag{3.4}$$

получим так называемые *центроаффинные* преобразования.

Преобразования (3.1), (3.2) называются *эквиаффинными*, если

$$A = \pm 1, \tag{3.5}$$

где A определяется формулой (2.4).

Преобразования (3.1), (3.2) называются *унимодулярными*, если

$$A = 1, \tag{3.6}$$

преобразованиями *переноса (трансляцией)*, если

$$A^{i'}{}_i = \delta^{i'}{}_i, \quad B^i{}_{i'} = \delta^i{}_{i'}. \tag{3.7}$$

Если рассматривается прямоугольная декартова система координат $x^1 = x_1$, $x^2 = x_2$, $x^3 = x_3$ и переход к новой прямоугольной декартовой системе координат $x^{1'} = x_{1'}$, $x^{2'} = x_{2'}$, $x^{3'} = x_{3'}$ и обратно осуществляется с помощью преобразований

$$x_{i'} = A_{i'i} x_i + A_{i'}, \tag{3.8}$$

$$x_i = B_{ii'} x_{i'} + B_i, \tag{3.9}$$

причем справедливы условия

$$B_{ii'} = A_{i'i} \tag{3.10}$$

и (3.3), то преобразования (3.8), (3.9) называются *ортогональными*.

Множество M элементов называется *группой*, если в M установлена операция, ставящая в соответствие каждой паре элементов a, $b \in M$ некоторый элемент $c \in M$. Результат этой операции (обычно называемый умножением) обозначается через ab:

$$c = ab. \tag{3.11}$$

При этом выполняются следующие аксиомы:

1°. Ассоциативность: для всяких трех элементов a, b, $c \in M$ выполнено соотношение

$$(ab)c = a(bc). \tag{3.12}$$

2°. В M имеется левая единица, общая для всех элементов группы, т. е. такой элемент e, что

$$ea = a \tag{3.13}$$

для каждого элемента $a \in M$.

3°. Для всякого элемента $a \in M$ существует левый обратный элемент, т. е. такой элемент a^{-1}, что

$$a^{-1}a = e. \tag{3.14}$$

Если кроме этих аксиом в группе выполняется еще условие коммутативности, т. е. для всяких двух элементов a, $b \in M$ имеет место равенство

$$ab = ba, \tag{3.15}$$

то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*.

Упражнение 3.2. Доказать, что квадратные матрицы 3-го порядка, определители которых отличны от нуля (неособенные матрицы), образуют группу.

Упражнение 3.3. Доказать, что преобразования (2.1) при условии (2.4) образуют группу, причем роль единичного элемента играет тождественное преобразование, а роль обратного элемента к преобразованию (2.1) — преобразование (2.2). ●

Подгруппой N группы M называется подмножество элементов группы M, которые образуют группу в силу того же закона умножения, который имеет место в M.

Упражнение 3.4. Показать, что преобразования вида (3.1) образуют подгруппу группы преобразований вида (2.1), которая называется *группой аффинных преобразований* (условия (2.4) считаются выполненными).

Упражнение 3.5. Показать, что преобразования вида (3.1) при условиях (2.4), (3.4) образуют группу, которая называется *группой центроаффинных преобразований.*

Упражнение 3.6. Показать, что преобразования вида (3.1) при условии (3.5) образуют группу, которая называется *эквиаффинной группой преобразований.*

Упражнение 3.7. Показать, что преобразования вида (3.1) при условии (3.6) образуют группу, которая называется *унимодулярной группой преобразований.*

Упражнение 3.8. Показать, что преобразования вида (3.1) при условии (3.7) образуют группу, которая называется *группой трансляций.*

Упражнение 3.9. Показать, что преобразования вида (3.8) при условиях (3.3), (3.10) образуют группу, которая называется *полной группой движения* в евклидовом пространстве R_3, причем выполняется (3.5).

Упражнение 3.10. Показать, что преобразования вида (3.8) при условиях (3.4), (3.10) образуют группу I, которая называется *полной ортогональной группой* трехмерного евклидова пространства; она состоит из всех вращений и отражений в R_3 (см. упражнение 3.16).

Упражнение 3.11. Показать, что преобразования (3.8) при условиях (3.4), (3.10), (3.6) образуют группу I_0, которая называется *собственной ортогональной группой, или группой вращения* в R_3.

Упражнение 3.12. Показать, что преобразования

$$x_{\alpha'} = \varkappa_\alpha x_\alpha \quad \langle \alpha = 1, 2, 3 \rangle, \tag{3.16}$$

где $\varkappa_\alpha$ — следующие наборы чисел $(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)$:

$$(1, 1, 1),\ (-1, 1, 1),\ (1, -1, 1),\ (1, 1, -1),$$
$$(1, -1, -1),\ (-1, 1, -1),\ (-1, -1, 1),\ (-1, -1, -1), \tag{3.17}$$

образуют группу O, которая является подгруппой группы I и называется *группой ортотропии.*

Упражнение 3.13. Показать, что преобразования вида

$$x_{1'} = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi,$$

$$x_{2'} = -x_2 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi, \tag{3.18}$$

$$x_{3'} = x_3,$$

где $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, образуют группу T_3, которая является подгруппой группы I_0 и называется *группой трансверсальной изотропии.* ●

В предыдущем параграфе было введено понятие инварнантных величин относительно преобразований (2.1). Точно так же можно ввести понятие инвариантных величин относительно преобразований (3.1), (3.8), (3.16), (3.18) и т. д.

Поэтому всякий раз, когда мы будем говорнть об инвариантностн той или иной велнчины, мы будем иметь в вนду некоторую вполне определенную группу преобразований. Инвариант относительно общей группы преобразований (2.1) будем иногда называть просто *инвариантом.*

Длнна вектора $\vec{a}$ является ннвариантом (см. упражненне 2.1), причем единственным для общей группы преобразований (2.1). Однако относительно некоторых подгрупп этой группы вектор $\vec{a}$ может иметь инвариантов больше одного.

Упражнение 3.14. Показать, что инварнантами относительно группы преобразований O (см. упражнение 3.12) для вектора

$$\vec{a} = a_i \vec{k}_i \tag{3.19}$$

являются велнчины

$$|a_1|,\ |a_2|,\ |a_3|. \tag{3.20}$$

Упражненне 3.15. Показать, что ннварнантамн относительно группы преобразований T_3 (см. упражиенне 3.13) для вектора (3.18) являются величины

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2},\ a_3. \tag{3.21}$$

Упражненне 3.16. Показать, что преобразовання (3.16), где $\varkappa_\alpha$ — следующнй набор чисел:

$$(1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ 1,\ 1), \tag{3.22}$$

образуют подгруппу группы O, которая называется *группой отражений* относнтельно плоскости $x_1 = 0$.

Упражнение 3.17. Показать, что преобразования (3.16), где $\varkappa_\alpha$ — следующий набор чисел:

$$(1, 1, 1), (-1, -1, -1), \tag{3.23}$$

образуют подгруппу группы O, которая называется *группой инверсии.*

§ 4. Алгебра геометрических объектов. Понятие тензора

Пусть в каждой системе координат $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ и в каждой точке пространства задано 3^{n+m} чисел

$$Q^{i_1 i_2 \ldots i_n}{}_{j_1 j_2 \ldots j_m}. \tag{4.1}$$

В этом случае будем говорить, что в пространстве определен *геометрический объект,* или *экстенсив* Q, порядка (валентности, ранга) $(n+m)$ с n контравариантными и m ковариантными компонентами (4.1).

Закон преобразования компонент геометрического объекта Q при новом выборе системы координат может быть весьма разнообразным. Примеры таких законов см. в упр. 2.4, 2.7, 2.9, 2.12 и др. В частности, если рассматривается геометрический объект 1-го порядка и для его контравариантных компонент справедлив закон преобразования (2.14), то согласно определению, данному в § 2, такой геометрический объект называется *вектором.*

Рассмотрим алгебраические операции, производимые над геометрическими объектами.

1. Сложение. В сложении могут участвовать два (или несколько) объекта (экстенсива) одинакового строения, т. е. число ковариантных (и контравариантных) компонент каждого слагаемого должно быть одинаковым и, кроме того, одинаково чередование ковариантных и контравариантных индексов у каждого слагаемого. Например, суммой двух экстенсивов Q и P соответственно с компонентами $Q^i{}_j{}^{kl}$ и $P^i{}_j{}^{kl}$ называется экстенсив S с компонентами $S^i{}_j{}^{kl}$, вычисленными по формулам

$$S^i{}_j{}^{kl} = Q^i{}_j{}^{kl} + P^i{}_j{}^{kl}. \tag{4.2}$$

2. Умножение на число. В результате умножения экстенсива Q с компонентами (4.1) на число α получается экстенсив P с компонентами

$$P^{i_1 \ldots i_n}{}_{j_1 \ldots j_m} = \alpha Q^{i_1 \ldots i_n}{}_{j_1 \ldots j_m}. \tag{4.3}$$