$$(1, 1, 1), (-1, -1, -1), \tag{3.23}$$

образуют подгруппу группы O, которая называется *группой инверсии.*

§ 4. Алгебра геометрических объектов. Понятие тензора

Пусть в каждой системе координат (α^1, α^2, α^3) и в каждой точке пространства задано 3^{n+m} чисел

$$Q^{i_1 i_2 \ldots i_n}{}_{j_1 j_2 \ldots j_m}. \tag{4.1}$$

В этом случае будем говорить, что в пространстве определен *геометрический объект,* или *экстенсив* Q, порядка (валентности, ранга) $(n+m)$ с n контравариантными и m ковариантными компонентами (4.1).

Закон преобразования компонент геометрического объекта Q при новом выборе системы координат может быть весьма разнообразным. Примеры таких законов см. в упр. 2.4, 2.7, 2.9, 2.12 и др. В частности, если рассматривается геометрический объект 1-го порядка и для его контравариантных компонент справедлив закон преобразования (2.14), то согласно определению, данному в § 2, такой геометрический объект называется *вектором.*

Рассмотрим алгебраические операции, производимые над геометрическими объектами.

1. Сложение. В сложении могут участвовать два (или несколько) объекта (экстенсива) одинакового строения, т. е. число ковариантных (и контравариантных) компонент каждого слагаемого должно быть одинаковым и, кроме того, одинаково чередование ковариантных и контравариантных индексов у каждого слагаемого. Например, суммой двух экстенсивов Q и P соответственно с компонентами $Q^i{}_j{}^{kl}$ и $P^i{}_j{}^{kl}$ называется экстенсив S с компонентами $S^i{}_j{}^{kl}$, вычисленными по формулам

$$S^i{}_j{}^{kl} = Q^i{}_j{}^{kl} + P^i{}_j{}^{kl}. \tag{4.2}$$

2. Умножение на число. В результате умножения экстенсива Q с компонентами (4.1) на число α получается экстенсив P с компонентами

$$P^{i_1 \ldots i_n}{}_{j_1 \ldots j_m} = \alpha Q^{i_1 \ldots i_n}{}_{j_1 \ldots j_m}. \tag{4.3}$$

3. **Произведение.** Произведением двух экстенсивов Q и P произвольного строения, например $Q^i{}_j{}^k$, P^{mn} называется экстенсив S, компоненты которого определяются следующим образом:

$$S^i{}_j{}^{kmn} = Q^i{}_j{}^k P^{mn}. \tag{4.4}$$

Отсюда видно, что произведение экстенсивов некоммутативно.

Заметим, что при сложении экстенсивов порядок суммы равен порядку каждого слагаемого, при умножении экстенсива на число его порядок не изменяется. При произведении экстенсивов порядок произведения равен сумме порядков сомножителей.

4. **Подстановка индексов.** Если у компонент некоторого экстенсива Q переставить произвольным образом один или несколько индексов, то полученные таким образом компоненты образуют некоторый новый экстенсив P. Частным случаем подстановки индексов является симметрирование экстенсива по двум индексам

$$P_{ij}{}^k = \frac{1}{2}(Q_{ij}{}^k + Q_{ji}{}^k). \tag{4.5}$$

Операция симметрирования обозначается взятием индексов, по которым производится суммирование, в круглые скобки, т. е. из (4.5) следует

$$P_{ij}{}^k = Q^k{}_{(ij)}. \tag{4.6}$$

Если между индексами, участвующими в симметрировании, стоят другие индексы, то их выделяют вертикальной чертой, например:

$$S_{(i|kl|j)} \equiv \frac{1}{2}(S_{iklj} + S_{jkli}). \tag{4.7}$$

Операция симметрирования по трем индексам определяется следующим образом:

$$Q_{(ijk)} \equiv \frac{1}{6}(Q_{ijk} + Q_{kij} + Q_{jki} + Q_{jik} + Q_{kji} + Q_{ikj}). \tag{4.8}$$

Аналогично можно определить операцию симметрирования по n индексам:

$$Q_{(i_1 \ldots i_n)} \equiv \frac{1}{n!}(Q_{i_1 \ldots i_n} + Q_{i_n \ldots i_1} + \ldots), \tag{4.9}$$

где в правой части в скобках сумма $n!$ членов с различными перестаиовками индексов.

Операция альтериирования или кососимметрироваиия экстеисива P по двум индексам обозначается взятием этих индексов в квадратиые скобки и определяется следующим образом:

$$P_{[kl]} \equiv \frac{1}{2}(P_{kl} - P_{lk}). \tag{4.10}$$

Аналогичио определяется операция альтериирования по n индексам $(n \geqslant 2)$:

$$P_{[i_1 \ldots i_n]} \equiv \frac{1}{n!}(P_{i_1 \ldots i_n} + P_{i_n i_1 \ldots i_{n-1}} + \ldots), \tag{4.11}$$

где в правой части в скобках стоит сумма $n!/2$ членов со зиаком плюс с четиыми подстановками индексов $i_1, \ldots, i_n$ и $n!/2$ члеиов со зиаком мииус с нечетиыми подстановками этих иидексов.

5. Свертка. Операция свертки экстенсива может производиться только над экстенсивами, компоненты которых имеют не менее одного ковариантного и одного контравариантного индекса. Свертка заключается в замене одного ковариантного (контравариантного) индекса на соответствующий контравариантный (ковариаитный) индекс и проведения по повторяющемуся иидексу суммирования от 1 до 3. В результате свертки порядок экстенсива уменьшается на две единицы. Например, свертка экстеисива Q с компонентами $Q^{ij}{}_k$ по индексам j, k заключается в замеие индекса j иа k (или индекса k иа j) и последующем суммировании

$$P^i = Q^{ij}{}_j \equiv Q^{i1}{}_1 + Q^{i2}{}_2 + Q^{i3}{}_3. \tag{4.12}$$

Скалярное произведение двух векторов, например, содержит две операции: произведение двух экстенсивов и свертку

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^i b_i \equiv a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3. \tag{4.13}$$

Дадим определение тензора: *если при переходе от одной системы координат к другой (2.1) компоненты экстенсива (4.1) преобразуются по закону*

$$Q^{i'_1 i'_2 \ldots i'_n}{}_{j'_1 j'_2 \ldots j'_m} = A^{i'_1}{}_{i_1} A^{i'_2}{}_{i_2} \ldots A^{i'_n}{}_{i_n} \times$$

$$\times B^{j_1}_{\ \ i_1'} B^{j_2}_{\ \ i_2'} \ldots B^{j_n}_{\ \ i_n'} Q^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{j_1 j_2 \ldots j_m}, \tag{4.14}$$

то экстенсив Q — тензор относительно группы преобразований (2.1).

Экстенсив, являющийся тензором относительно одной группы преобразований, может не быть таковым относительно другой группы преобразований.

Упражнение 4.1. Доказать тензорный характер величин g_{ij}, g^{ij}, $\delta_j^{\ i}$, определенных в § 1. Таким образом, величины g_{ij} образуют так называемый фундаментальный тензор.

Упражнение 4.2. Определим экстенсив ϵ с компонентами

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы два индекса совпадают,} \\ +1, & \text{если все индексы различны и образуют четную подстановку,} \\ -1, & \text{если все индексы различны и образуют нечетную подстановку.} \end{cases} \tag{4.15}$$ ●

Доказать, что ϵ является тензором относительно группы I_0 и не является тензором относительно более широкой группы I (см. упр. 3.10 и 3.11).

Упражнение 4.3. Доказать, что ковариантные производные вектора $a^i{}_{,j}$ и $a_{i,j}$ являются компонентами тензора второго порядка.

Упражнение 4.4. Доказать, что частные производные $\dfrac{\partial a^i}{\partial a^j}$ и $\dfrac{\partial a_i}{\partial a^j}$ не образуют тензора. ●

Легко показать, что линейная комбинация тензоров одного строения является тензором того же строения. В самом деле, пусть даны два числа α, β (действительных или комплексных) и два тензора T и Q ($T_i{}^j$ и $Q_i{}^j$). Тогда экстенсив $S = \alpha T + \beta Q$ является тензором. В самом деле, согласно определению суммы экстенсивов и умножения их на число имеем

$$S_i{}^j = \alpha T_i{}^j + \beta Q_i{}^j. \tag{4.16}$$

Так как экстенсивы T и Q — тензоры, то при переходе к другой (штрихованной) системе координат

$$T_{i'}^{j'} = B_{i'}^{i} A_j^{j'} T_i^j; \quad Q_{i'}^{j'} = B_{i'}^{i} A_j^{j'} Q_i^j. \tag{4.17}$$

Поэтому в новой системе координат

$$S_{i'}^{j'} = \alpha T_{i'}^{j'} + \beta Q_{i'}^{j'} = B_{i'}^{i} A^{j'}{}_{j} (\alpha T_i^j + \beta Q_i^j) = B_{i'}^{i} A_j^{j'} S_i^j, \quad (4.18)$$

что и требовалось доказать.

В частности, из доказанного следует, что сумма тензоров является тензором и в результате умножения тензора на число получается тензор.

Упражнение 4.5. Доказать, что произведением двух тензоров является тензор, порядок которого равен сумме порядков сомножителей.

Упражнение 4.6. Доказать, что геометрический объект, образованный подстановкой индексов у тензора, является тензором.

Упражнение 4.7. Доказать, что всякий ковариантный тензор второго порядка (т. е. тензор, имеющий ковариантные компоненты) можно представить в виде суммы симметричного и косимметричного тензоров. ●

Покажем теперь, что геометрический объект, полученный сверткой двух тензоров, является тензором. В самом деле, пусть два тензора $T(T_i{}^{kl})$ и $Q(Q_{jm})$ свертываются по индексам $k=m$. Тогда для геометрического объекта $S(S_{ij}{}^{l})$

$$S_{ij}^{l} = T_i^{ml} Q_{jm}; \quad S_{ij}^{l} = S_{ijm}^{kl}|_{k=m}. \quad (4.19)$$

В новой (штрихованной) системе координат в силу тензорного характера T и Q

$$S_{i'}{}^{l'}{}_{j'} = T_{i'}{}^{k'l'} Q_{j'm'}|_{k'=m'} =$$

$$= B_{i'}^{i} \underline{A^{k'}{}_{k}} A^{l'}{}_{l} T_i{}^{kl} B^{j}{}_{j'} \underline{B^{m}{}_{m'}} Q_{jm}|_{k'=m'}. \quad (4.20)$$

Так как матрицы $A_l^{l'}$ и $B_{j'}^{j}$ взаимно обратные, то для подчеркнутых величин имеем

$$A_k^{k'} B_{m'}^{m}|_{k'=m'} = \widehat{A_k^{m'} B_{m'}^{m}} = \delta_k^m. \quad (4.21)$$

Подставляя (4.21) в (4.20) и используя свойство символов Кронекера, получим

$$S_{i'}^{l'}{}_{j'} = B_{i'}^{i} A_l^{l'} B_{j'}^{j} T_i^{ml} Q_{jm}, \quad (4.22)$$

что и требовалось доказать.

Упражнение 4.8. Доказать, что в результате полного свертывания тензора, имеющего одинаковое число ковариантных и контравариантных индексов, получается скаляр. ●

При выяснении вопроса о тензориальности того или иного экстенсива часто полезен так называемый «обратный тензорный признак», который заключается в следующем. Пусть дан некоторый экстенсив $Q(Q_j{}^i)$ и известно, что для произвольного вектора $S(S^j)$ в результате свертки

$$Q_j{}^i S^j = T^i \tag{4.23}$$

получается вектор $T(T^i)$. В этом случае экстенсив $Q(Q_j{}^i)$ является тензором.

В самом деле, в новой (штриховаиной) системе коордииат

$$Q^{i'}_{j'} S^{j'} = T^{i'}. \tag{4.24}$$

Кроме того, известно, что

$$S^{j'} = A^{j'}_j S^j; \quad T^{i'} = A^{i'}_i T^i. \tag{4.25}$$

Подставляя (4.25) в (4.24), получим

$$Q^{i'}_{j'} A^{j'}_j S^j = A^{i'}_j T^i. \tag{4.26}$$

Умножая (4.26) на $B^k{}_{i'}$, суммируя по i' и заменяя индекс k на i, имеем

$$Q^{i'}_{j'} A^{j'}_j B^i_{i'} S^j = T^i. \tag{4.27}$$

Вычтем теперь из равенства (4.27) равеиство (4.23):

$$(Q^i_j - A^{j'}_j B^i_{i'} Q^{i'}_{j'})\, S^j = 0. \tag{4.28}$$

Откуда в снлу пронзвольности вектора S

$$Q^i_j = A^{j'}_j B^i_{i'} Q^{i'}_{j'}. \tag{4.29}$$

Умножим обе части (4.29) на $A^{k'}_i B^j_{m'}$, используем свойство символов Кронекера и, заменив в окончательиом выражении k' на i', m' на j', получим

$$Q^{i'}_{j'} = A^{i'}_i B^j_{j'} Q^i_j, \tag{4.30}$$

т. е. экстенсив Q является теизором второго порядка, что и требовалось доказать.

Упражнение 4.9. Пусть для произвольных векторов $a(a^i)$ и $\vec{b}(b_j)$ и для экстеисива $Q(Q_i{}^j)$ выполияется

ИНВ № 33
НЕ БОЛЕЕ 1Й КНИГИ В ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ
БИБЛИОТЕКА
КОЛХОЗА

тождество

$$Q_i{}^j a^i b_j = 1. \tag{4.31}$$

Доказать, что Q — тензор. ●

В заключение покажем, как понятие ковариантной производной, введенное в предыдущем параграфе для векторов (т. е. тензоров первого порядка), обобщается на тензоры более высокого порядка. Прежде всего обратим внимание на тот факт, что частные производные скалярной функции $\mathcal{J}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ по координатам являются ковариантными компонентами вектора (см. упр. 2.2):

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha^{i'}} = B_{i'}^{i} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha^{i}}. \tag{4.32}$$

Поэтому можно сказать, что ковариантная производная скаляра совпадает с его частной производной.

Пусть теперь известно, что $T\,(T_j{}^i)$ — тензор второго порядка. Тогда путем свертки этого тензора с двумя произвольными векторамн $\overleftarrow{b}(b_i)$ и $\vec{c}(c^j)$ получим скаляр

$$\mathcal{J} = T_j{}^i b_i c^j. \tag{4.33}$$

Продифференцируем частным образом равенство (4.33) и воспользуемся равенствами (2.35) и (2.42):

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial T^i{}_j}{\partial \alpha^k} b_i c^j + T^i{}_j \left(b_{i,k} + \Gamma^l_{ik} b_l\right) c^j + \\ + T^i{}_j b_i \left(c^j{}_{,k} - \Gamma^j_{lk} c^l\right). \tag{4.34}$$

Отсюда

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha^k} - T^i{}_j b_{i,k} c^j - T^i{}_j b_i c^j{}_{,k} = \\ = \left(\frac{\partial T^i{}_j}{\partial \alpha^k} + T^l{}_j \Gamma^i_{kl} - T^i{}_l \Gamma^l_{jk}\right) b_i c^j. \tag{4.35}$$

Выражение в скобках в правой части (4.35) согласно обратному тензорному признаку носит тензорный характер. Назовем это выражение ковариаитной производной компонент $T^i{}_j$ тензора T

$$T^i{}_{j,k} \equiv \frac{\partial T^i{}_j}{\partial \alpha^k} + T^l{}_j \Gamma^i_{kl} - T^i{}_l \Gamma^l_{jk}. \tag{4.36}$$

Аналогично опеделяется ковариантная производная тензора любого строения, а именно: для того чтобы образовать ковариантную производную произвольного тензора T (например, по k-й координате), необходимо составить сумму выражений трех типов.

При этом выражения 1-го типа составляются как соответствующие частные производные по k-й координате.

Выражения 2-го типа (со знаком плюс) составляются для каждого контравариантного индекса компонент тензора T в виде произведения этой компоненты на символ Кристоффеля 2-го рода. При этом один из контравариантных индексов компоненты T присваивается символу Кристоффеля, а взамен его ставится немой индекс, который приписывается символу Кристоффеля (и по которому производится суммирование). Вторым нижним индексом символа Кристоффеля является индекс ковариантного дифференцирования.

Выражения 3-го типа (со знаком минус) составляются для каждого ковариантного индекса компонент тензора T аналогичным образом (но замене подлежит каждый ковариантный индекс).

Упражнение 4.10. Доказать, что для ковариантного дифференцирования справедливы правила дифференцирования суммы и произведения тензоров, аналогичные правилам для дифференцирования скалярных функций:

$$(T^i_j + S^i_j)_{,k} = T^i_{j,k} + S^i_{j,k}, \tag{4.37}$$

$$(T^i_j Q^{mn})_{,k} = T^i_{j,k} Q^{mn} + T^i_i Q^{mn}{}_{,k}. \quad \bullet \tag{4.38}$$

Упражнение 4.11. Показать, что для фундаментальных тензоров (см. (1.17), (1.18)) выполняются соотношения

$$g_{ij,k} = 0; \quad g^{ij}{}_{,k} = 0. \quad \bullet \tag{4.39}$$

Абсолютным дифференциалом тензора T называется произведение его ковариантной производной на дифференциал криволинейных координат с последующей сверткой. Например, для тензора $T(T_j{}^i)$ координаты его абсолютной производной определяются следующим образом:

$$DT_j{}^i \equiv T_{j,k}{}^i d\alpha^k. \tag{4.40}$$

Упражнение 4.12. Доказать, что абсолютный дифференциал тензора T является тензором того же порядка, что и тензор T.

Упражнение 4.13. Доказать, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого скаляра $\varkappa$ справедливы следующие правила дифференцирования:

$$D(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot D\vec{b}+\vec{b}\cdot D\vec{a}, \qquad (4.41)$$

$$D(\vec{a}+\vec{b})=D\vec{a}+D\vec{b}, \qquad (4.42)$$

$$D(\varkappa\vec{a})=\varkappa D\vec{a}+d\varkappa\vec{a}. \qquad (4.43)$$

●

§ 5. Физические компоненты тензоров

В механике и физике чаще всего используются ортогональные криволинейные системы координат, т. е. системы координат, в которых три семейства поверхностей, определяемых уравнениями (1.9), взаимно пересекаются под прямыми углами. В этом случае локальный базис $\vec{e}_i$ (1.15) ортогональный и для фундаментального тензора g_{ij} (1.19) имеем соотношение

$$g_{ij}=0 \quad (i\neq j). \qquad (5.1)$$

Поэтому отличных от нуля независимых компонент тензора g_{ij} только три. Иногда их обозначают следующим образом:

$$\sqrt{g_{\beta\beta}}=H_\beta \, (\beta=1,\ 2,\ 3), \qquad (5.2)$$

где величины H_β называются параметрами Ламе. Поэтому для компонент сопряженного фундаментального тензора получим

$$g^{\beta\beta}=1/H_\beta^2. \qquad (5.3)$$

Определитель матрицы g_{ij}:

$$g=H_1H_2H_3. \qquad (5.4)$$

Символы Кристоффеля 1-го рода определим по формулам (2.50):

$$\Gamma_{\beta\beta,\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial\alpha^\beta}=H_\beta^1\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha^\beta},$$

$$\Gamma_{\beta\gamma,\beta}=-\Gamma_{\beta\beta,\gamma}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial\alpha^\gamma}=H_\beta\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha^\gamma} \qquad (5.5)$$