Упражнение 4.12. Доказать, что абсолютный дифференциал тензора T является тензором того же порядка, что и тензор T.

Упражнение 4.13. Доказать, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого скаляра $\varkappa$ справедливы следующие правила дифференцирования:

$$D(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot D\vec{b}+\vec{b}\cdot D\vec{a}, \tag{4.41}$$

$$D(\vec{a}+\vec{b})=D\vec{a}+D\vec{b}, \tag{4.42}$$

$$D(\varkappa\vec{a})=\varkappa D\vec{a}+d\varkappa\vec{a}. \quad \bullet \tag{4.43}$$

§ 5. Физические компоненты тензоров

В механике и физике чаще всего используются ортогональные криволинейные системы координат, т. е. системы координат, в которых три семейства поверхностей, определяемых уравнениями (1.9), взаимно пересекаются под прямыми углами. В этом случае локальный базис $\vec{e}_i$ (1.15) ортогональный и для фундаментального тензора g_{ij} (1.19) имеем соотношение

$$g_{ij}=0 \quad (i\neq j). \tag{5.1}$$

Поэтому отличных от нуля независимых компонент тензора g_{ij} только три. Иногда их обозначают следующим образом:

$$\sqrt{g_{\beta\beta}}=H_\beta \; (\beta=1,\,2,\,3), \tag{5.2}$$

где величины H_β называются параметрами Ламе. Поэтому для компонент сопряженного фундаментального тензора получим

$$g^{\beta\beta}=1/H_\beta^2. \tag{5.3}$$

Определитель матрицы g_{ij}:

$$g=H_1H_2H_3. \tag{5.4}$$

Символы Кристоффеля 1-го рода определим по формулам (2.50):

$$\Gamma_{\beta\beta,\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial\alpha^\beta}=H_\beta\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha^\beta},$$

$$\Gamma_{\beta\gamma,\beta}=-\Gamma_{\beta\beta,\gamma}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial\alpha^\gamma}=H_\beta\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha^\gamma} \tag{5.5}$$

$$\langle \beta \neq \gamma;\ \gamma = 1, 2, 3\rangle,$$

откуда по формулам (2.51) находим символы Кристоффеля 2-го рода:

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\beta} = g^{\beta\beta}\Gamma_{\beta\beta,\beta} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha^\beta},$$

$$\Gamma^{\gamma}_{\beta\beta} = g^{\gamma\gamma}\Gamma_{\beta\beta,\gamma} = -\frac{H_\beta \partial H_\beta}{H_\gamma^2 \partial \alpha^\gamma}, \tag{5.6}$$

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\gamma} = g^{\beta\beta}\Gamma_{\beta\gamma,\beta} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha^\gamma}$$

$$\langle \beta, \gamma = 1, 2, 3\rangle.$$

Символы Кристоффеля, у которых все индексы различны, тождественно равны нулю.

Пример 5.1. Рассмотрим сферическую систему координат (см. упр. 1.3)

$$x^1 = \alpha^1 \cos \alpha^2 \cos \alpha^3,$$

$$x^2 = \alpha^1 \sin \alpha^2 \cos \alpha^3,$$

$$x^3 = \alpha^1 \sin \alpha^3 \quad \text{(рис. 7)}. \tag{5.7}$$

Чтобы найти компоненты фундаментального тензора g_{ij}, можно воспользоваться формулами (1.15) и (1.19). Однако мы используем другой подход. Для этого отметим, что квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками ds^2 может быть подсчитан по формуле

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}, \tag{5.8}$$

но

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} d\alpha^i = \vec{e}_i d\alpha^i. \tag{5.9}$$

Подставляя (5.9) в (5.8) и используя (1.19), получим

$$ds^2 = g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j, \tag{5.10}$$

или, пользуясь тем, что сферическая система координат (5.7) ортогональна,

$$ds^2 = g_{11}(d\alpha^1)^2 + g_{22}(d\alpha^2)^2 + g_{33}(d\alpha^3)^2. \tag{5.11}$$

Рассмотрим теперь элементарный объем, ограниченный координатными поверхностями α^i и $\alpha^i + d\alpha^i$

$(i=1, 2, 3)$ (рис. 8). Очевидно, что квадрат расстояния между точками A и E может быть подсчитан как сумма квадратов расстояний AB, AD и AC, т. е.

$$ds^2=(d\alpha^1)^2+(\alpha^1 d\alpha^2)^2+(\alpha^1 \sin \alpha^2 d\alpha^3)^2, \qquad (5.12)$$

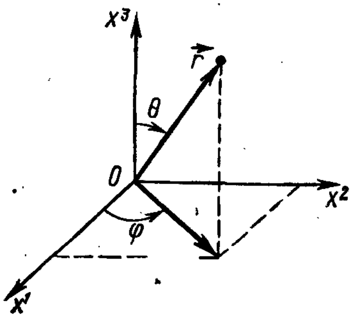

Рис. 7

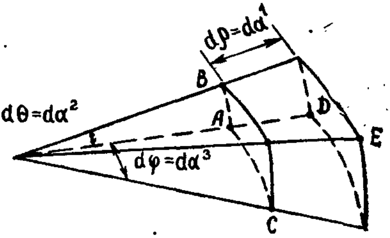

Рис. 8

откуда находим матрицу

$$g_{ij}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\alpha^1)^2 & 0\\ 0 & 0 & (\alpha^1\sin\alpha^2)^2\end{pmatrix} \qquad (5.13)$$

и векторы локального базиса

$$\vec{e}_1=(1,\ 0,\ 0),$$

$$\vec{e}_2=(0,\ \alpha^1,\ 0),$$

$$\vec{e}_3=(0,\ 0,\ \alpha^1\sin\alpha^2). \qquad (5.14)$$

Из формул (5.14) видно, что если $\rho=\alpha^1$ измеряется в единицах длины, а углы $\varphi=\alpha^2$ и $\Theta=\alpha^3$ — в радианах, то векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ (или $\vec{e}_3$) имеют разную размерность. Это бывает неудобно при записи физических соотношений. Поэтому вводят единичный базис k_i, т. е. базис из единичных векторов

$$\vec{k}_\beta=\frac{\vec{e}_\beta}{|\vec{e}_\beta|}. \qquad (5.15)$$

Длина вектора $\vec{e}_\beta$ подсчитывается по формуле

$$|\vec{e}_\beta| = \sqrt{g_{\beta\beta}} = \frac{1}{\sqrt{g^{\beta\beta}}}. \tag{5.16}$$

Для произвольного вектора $\vec{a}$ имеем

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i = \sum_{\beta=1}^{3} a^\beta\, |\vec{e}_\beta|\, \frac{\vec{e}_\beta}{|\vec{e}_\beta|} = a^i_{(\Phi)} \vec{k}_i, \tag{5.17}$$

где $a_{(\Phi)}{}^i$ — компоненты вектора $\vec{a}$ в единичном базисе $\vec{k}_i$, причем

$$a^\beta_{(\Phi)} = a^\beta\, |\vec{e}_\beta| = a^\beta \sqrt{g_{\beta\beta}}. \tag{5.18}$$

Аналогично образуем единичный базис $\vec{k}^i$ из векторов взаимного репера

$$\vec{k}^\beta \equiv \frac{\vec{e}^\beta}{|\vec{e}^\beta|} = \frac{\vec{e}^\beta}{\sqrt{g^{\beta\beta}}} = \vec{e}^\beta \sqrt{g_{\beta\beta}}. \tag{5.19}$$

Используя определение взаимного репера (или формулу (1.28)), получим

$$\vec{k}_\beta = \frac{\vec{e}_\beta}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} = \sum_{\gamma=1}^{3} \frac{g_{\beta\gamma}\vec{e}^\gamma}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} = \frac{g_{\beta\beta}\vec{e}^\beta}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} =$$

$$= \sqrt{g_{\beta\beta}}\, \vec{e}^\beta = \frac{\vec{e}^\beta}{\sqrt{g^{\beta\beta}}} = \vec{k}^\beta. \tag{5.20}$$

Следовательно, единичные базисы $\vec{k}^i$ и $\vec{k}_i$ совпадают.

Для ковариантных компонент вектора a_i имеем

$$\vec{a} = a_i \vec{e}^i = \sum_{\beta=1}^{3} a_\beta\, |\vec{e}^\beta|\, \frac{\vec{e}^\beta}{|\vec{e}^\beta|} = a_{i(\Phi)} \vec{k}^i, \tag{5.21}$$

где

$$a_{\beta(\Phi)} = a_\beta \sqrt{g^{\beta\beta}}. \tag{5.22}$$

Учитывая (5.20), из (5.21) и (5.17) получим

$$a_{i(\Phi)} = a^{i(\Phi)}. \tag{5.23}$$

Величины $a_{i(\Phi)}$ (или $a^{i(\Phi)}$) называются физическими компонентами вектора $\vec{a}$ и не преобразуются при переходе от одной системы координат к другой по законам (2.14) или (2.16). Поэтому они являются компонентами экстенсива, который, вообще говоря, не есть вектор. Пользуясь физическими компонентами векторов, следует помнить об этом.

Аналогично для любого тензора T можно ввести физические компоненты. При этом для каждого ковариантного индекса компоненты тензора T нужно пользоваться формулой (5.22), а для контравариантного — формулой (5.18), например:

$$T_{\alpha(\Phi)}^{\beta} = T_{\alpha}^{\beta}\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\sqrt{g_{\beta\beta}} = T_{\alpha}^{\beta}\,\frac{H_\alpha}{H_\beta}. \tag{5.24}$$

§ 6. Матричная запись

Пусть задано соотношение

$$b_i = Q_i^j a_j \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3). \tag{6.1}$$

Его можно записать на «матричном языке», не используя индексов:

$$b = Qa. \tag{6.2}$$

При этом маленькими латинскими буквами будем обозначать одностолбцовую матрицу

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

а большими латинскими буквами — квадратные матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_1^2 & Q_1^3 \\ Q_2^1 & Q_2^2 & Q_2^3 \\ Q_3^1 & Q_3^2 & Q_3^3 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Транспонированные матрицы будем помечать волной над соответствующей буквой *. Например,

* Часто транспонирование обозначают верхним индексом т : $a^{т}$.