Величины $a_{i(\Phi)}$ (или $a^{i(\Phi)}$) называются физическими компонентами вектора $\vec{a}$ и не преобразуются при переходе от одной системы координат к другой по законам (2.14) или (2.16). Поэтому они являются компонентами экстенсива, который, вообще говоря, не есть вектор. Пользуясь физическими компонентами векторов, следует помнить об этом.

Аналогично для любого тензора T можно ввести физические компоненты. При этом для каждого ковариантного индекса компоненты тензора T нужно пользоваться формулой (5.22), а для контравариантного — формулой (5.18), например:

$$T_{\alpha(\Phi)}^{\beta}=T_{\alpha}^{\beta}\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\sqrt{g_{\beta\beta}}=T_{\alpha}^{\beta}\frac{H_{\alpha}}{H_{\beta}}. \tag{5.24}$$

§ 6. Матричная запись

Пусть задано соотношение

$$b_i=Q_i^j a_j \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3). \tag{6.1}$$

Его можно записать на «матричном языке», не используя индексов:

$$b=Qa. \tag{6.2}$$

При этом маленькими латинскими буквами будем обозначать одностолбцовую матрицу

$$a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

а большими латинскими буквами — квадратные матрицы

$$Q=\begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_1^2 & Q_1^3 \\ Q_2^1 & Q_2^2 & Q_2^3 \\ Q_3^1 & Q_3^2 & Q_3^3 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Транспонированные матрицы будем помечать волной над соответствующей буквой *. Например,

---

* Часто транспонирование обозначают верхним индексом т : $a^{т}$.

$$\tilde{a} = (a_1 a_2 a_3). \tag{6.5}$$

В частности, для репера имеем

$$e = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}; \quad \tilde{e} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3). \tag{6.6}$$

Если две матрицы записаны одна за другой, будем считать, что они перемножаются обычным образом. Фундаментальную матрицу обозначим через G. Согласно (1.19) имеем

$$G = e\tilde{e} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Матрицу, обратную к квадратной невырожденной матрице Q, обозначим через Q^{-1}.

Произвольный вектор $\vec{a}$ можно в матричной записи изобразить следующим образом:

$$\vec{a} = \tilde{a}e = \widetilde{(\tilde{a}e)} = \tilde{e}a. \tag{6.8}$$

Обозначим через $\mathcal{I}$ единичную матрицу. Вводим взаимный базис e^*:

$$e^* = G^{-1}e, \tag{6.9}$$

где

$$G^{-1}G = GG^{-1} = \mathcal{I}. \tag{6.10}$$

Умножая (6.9) слева на G, получим

$$e = Ge^*. \tag{6.11}$$

Матрица Q называется симметричной, если $Q = \tilde{Q}$, и кососимметричной (или антисимметричной), если $Q = -\tilde{Q}$.

Упражнение 6.1. Доказать, что всякую матрицу Q можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц.

Упражнение 6.2. Показать, что для любой матрицы Q

$$\tilde{\tilde{Q}} = Q. \quad ●$$

Используя формулу (6.11), дадим другое представление вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}=\tilde{a}e=\tilde{a}Ge^*=\tilde{a}^*e^*, \tag{6.12}$$

где введено обозначение

$$\tilde{a}G=\tilde{a}^*. \tag{6.13}$$

Из (6.13), пользуясь симметричностью матрицы G, получим

$$Ga=a^*. \tag{6.14}$$

Упражнение 6.3. Пользуясь матричной записью, показать, что

$$e^*\tilde{e}=\mathcal{I}; \quad e\tilde{e}^*=\mathcal{I}. \; \bullet \tag{6.15}$$

Пусть теперь задан закон перехода от одной системы координат к другой. При этом новый локальный базис e' выражается через старый следующим образом:

$$e'=Ce. \tag{6.16}$$

Тогда

$$\vec{a}=\tilde{a}e=\tilde{a}'e'=\tilde{a}'Ce, \tag{6.17}$$

откуда

$$\tilde{a}=\tilde{a}'C; \quad a'=\tilde{C}^{-1}a. \tag{6.18}$$

Для фундаментальной матрицы G

$$G'=e'\tilde{e}'=Ce\tilde{e}\tilde{C}=CG\tilde{C}. \tag{6.19}$$

Далее из формулы (6.14) и второго соотношения (6.18), используя (6.19), имеем

$$a^{*\prime}=G'a'=(CG\tilde{C})\tilde{C}^{-1}a=CGa=Ca^*. \tag{6.20}$$

Запишем теперь выражение (6.11) в новой системе координат и к левой части применим соотношение (6.16). Тогда, воспользовавшись (6.19), получим

$$Ce=G'e^{*\prime}=CG\tilde{C}e^{*\prime}, \tag{6.21}$$

откуда

$$e=G\tilde{C}e^{*\prime}. \tag{6.22}$$

Воспользовавшись (6.11), получим

$$Ge^*=G\tilde{C}e^{*\prime}. \tag{6.23}$$

Умножив (6.23) на G^{-1}, имеем

$$e^*=\tilde{C}e^{*\prime}, \tag{6.24}$$

или

$$e^{*\prime}=\tilde{C}^{-1}e^{*}. \tag{6.25}$$

Упражнение 6.4. Обозначим матрицу $A_i^{i'}$, фигурирующую в § 2, через A, а матрицу $B_{i'}^{i}$ — через B. Доказать, что эти матрицы связаны с матрицей C следующим образом:

$$A=\tilde{C}^{-1}; \quad B=\tilde{C}. \; \bullet \tag{6.26}$$

Пусть матрицей Q задано преобразование (6.2), при котором каждый вектор $\vec{a}$ в некоторой точке трехмерного евклидова пространства преобразуется в вектор $\vec{b}$. Предположим, что длина вектора при этом преобразовании не меняется:

$$\tilde{b}b=\tilde{a}a. \tag{6.27}$$

Таким образом,

$$\tilde{b}b=\tilde{a}\tilde{Q}Qa=\tilde{a}a, \tag{6.28}$$

т. е.

$$\tilde{Q}Q=\mathcal{I}. \tag{6.29}$$

Следовательно,

$$\tilde{Q}=Q^{-1}. \tag{6.30}$$

Матрица Q, для которой выполняется равенство (6.30), называется ортогональной. Из (6.29) видно, что для такой матрицы $\det|Q|=\pm 1$.

Пусть теперь задан закон преобразования от одной системы координат к другой, в результате которого величины a и b преобразуются следующим образом:

$$a'=Da; \quad b'=Db. \tag{6.31}$$

Тогда в новой системе координат

$$b'=Q'a' \tag{6.32}$$

имеем

$$Db=Q'Da, \tag{6.33}$$

откуда

$$b=D^{-1}Q'Da. \tag{6.34}$$

Сравнивая это выражение с (6.2), получим

$$D^{-1}Q'D=Q, \tag{6.35}$$

или

$$Q'=DQD^{-1}. \tag{6.36}$$

В этом случае говорят, что матрицы Q' и Q связаны между собой преобразованием подобия D.

Если матрица D коммутирует с матрицей Q, т. е.

$$DQ=QD, \tag{6.37}$$

то матрица Q называется инвариантиой относительно преобразования D:

$$Q'=DQD^{-1}=QDD^{-1}=Q\mathcal{I}=Q. \tag{6.38}$$

Например, единичная матрица $\mathcal{I}$ коммутирует с любой матрицей, т. е. всякая матрица инвариантна относительно тождественного преобразования, и, наоборот, единичная матрица $\mathcal{I}$ инвариантна относительно любого преобразования.

Упражнение 6.5. Доказать, что $\mathcal{I}$ — единственная матрица, инвариантная относительно произвольного ортогонального преобразования D. ●

Обозначим след матрицы Q (т. е. $Q_i{}^i$) через $\langle Q\rangle$. Существуют и другие обозначения следа, например $tr\, Q$ (английское trace), $Sp\, Q$ (немецкое Spur).

Упражнение 6.6. Доказать следующие свойства следов матриц:

а) $\langle \tilde{Q}\rangle=\langle Q\rangle$, (6.39)

б) $\langle AB\rangle=\langle BA\rangle$, (6.40)

в) $\langle ABC\rangle=\langle CAB\rangle$. (6.41)

Упражнение 6.7. Доказать, что при преобразовании подобия (5.36) след матрицы не изменяется, т. е.

$$\langle Q'\rangle=\langle Q\rangle. \; ● \tag{6.42}$$

С помощью матричного исчисления можно построить фундаментальные матрицы G и G^{-1}. Обозначим якобиеву матрицу преобразования (1.10) (т. е. преобразования, которым задается криволинейная система координат) через X, а якобиеву матрицу обратного преобразования (1.14) — через Y. Тогда из (1.19) или (6.7) видно, что

$$G=\tilde{X}X. \tag{6.43}$$

Поэтому определить матрицы G

$$g=(\det|X|)^2. \tag{6.44}$$

Из формулы (6.43) имеем для обратной матрицы G^{-1}

$$G^{-1}=X^{-1}\tilde{X}^{-1}=Y\tilde{Y}. \tag{6.45}$$

Очевидно, что каждая неособеииая матрица третьего порядка определяет некоторое преобразование системы координат в евклидовом пространстве R_3. Каждая ортогональная матрица определяет преобразование одной прямоугольной декартовой системы координат в другую.

Поэтому группу I (см. упр. 3.10) можно описать с помощью ортогональных матриц, а группу I_0 (упр. 3.11) — с помощью ортогональных матриц, определитель которых равен $+1$. Такое описание называется *матричным представлением группы.*

Например, группу инверсии (см. упр. 3.16) можно описать с помощью матриц

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\qquad (6.46)$$

группу отражений относительно плоскости $x_1=0$ (см. упр. 3.13) — матрицами

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad S_1=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad (6.47)$$

а группу O (см. упр. 3.12) — матрицами

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad S_1=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$S_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad D_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad D_2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$D_3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.\qquad (6.48)$$

Описанные представления являются конечными группами G, ибо состоят из конечного числа элементов (группы матриц (6.46), (6.47) из двух, а группа (6.48) — из восьми).

Группу T_3 (см. упр. 3.18) можно описать с помощью бесконечного числа матриц

$$g_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6.49)$$

То же относится и к группам I и I_0.

Упражнение 6.8. Доказать, что матрицы (6.49) образуют группу (которая называется *непрерывной*).

Упражнение 6.9. Доказать, что группу I_0 (см. упр. 3.11) можно описать непрерывной группой матриц, каждый элемент которой представляется в виде произведения

$$g = g_{\varphi_1} g_\theta g_{\varphi_2} \quad (0 \leqslant \varphi_1,\ \varphi_2 \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta < \pi), \qquad (6.50)$$

где g_{φ_1} и g_{φ_2} описываются формулой (6.49), а

$$g_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad (6.51)$$

так что элементы g имеют вид

$$\begin{aligned}
&g_{11} = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\theta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2,\\
&g_{12} = -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \cos\theta \sin\varphi_1 \cos\varphi_2,\\
&g_{13} = \sin\varphi_1 \sin\theta, \qquad (6.52)\\
&g_{21} = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\theta \cos\varphi_1 \sin\varphi_2,\\
&g_{22} = -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\theta \cos\varphi_1 \cos\varphi_2,\\
&g_{23} = -\cos\varphi_1 \sin\theta,\\
&g_{31} = \sin\varphi_2 \sin\theta,\\
&g_{32} = \cos\varphi_2 \sin\theta,\\
&g_{33} = \cos\theta.
\end{aligned}$$

Матрица Q называется *изотропной*, если она инвариантна относительно группы I, и *гиротропной*, если она инвариантна относительно группы I_0 (часто и в этом случае матрицу Q называют изотропной).

Матрица Q называется *ортотропной*, если она инвариантна относительно группы O (см. упр. 3.12), и *трансверсально-изотропной* (*монотропной*), если она инвариантна относительно группы преобразований T_3 (см. упр. 3.13).

Характером матричного представления G группы преобразований называется функция $\chi(g)$, определяемая как след матриц g, образующих группу G

$$\chi(g)=\langle g\rangle. \tag{6.53}$$

Упражнение 6.10. Показать, что характер представления (6.46)

$$\chi(E)=3, \quad \chi(C)=-3. \tag{6.54}$$

Упражнение 6.11. Показать, что характер представления (6.47)

$$\chi(E)=3, \quad \chi(S_1)=1. \tag{6.55}$$

Упражнение 6.12. Показать, что характер представления (6.48)

$$\chi(E)=3,\ \chi(S_1)=\chi(S_2)=\chi(S_3)=1,\ \chi(D_1)=$$
$$=\chi(D_2)=\chi(D_3)=-1, \quad \chi(C)=-3. \tag{6.56}$$

Упражнение 6.13. Показать, что характер представления (6.49)

$$\chi(g_\varphi)=1+2\cos\varphi. \tag{6.57}$$

Упражнение 6.14. Показать, что характер представления (6.52)

$$\chi(g)=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\cos\theta\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\cos\theta. \tag{6.58}$$

§ 7. Диады

Совокупность двух векторов a и b называется диадой

$$\underset{\sim}{D}=\vec{a}\otimes\vec{b}. \tag{7.1}$$

Вектор $\vec{a}$ называется первым (или левым) вектором диады, а вектор $\vec{b}$ — вторым (или правым). Символ $\otimes$ между векторами диады называется символом диадного умножения. Совокупность чисел a^ib^j называется компонентами диады D

$$\begin{pmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Так как при переходе от одной системы координат к другой контравариантные векторы базиса преобразуются по закону (2.14), то для компонент диады