преобразований называется функция $\chi(g)$, определяемая как след матриц $g$, образующих группу $G$

$$\chi(g)=\langle g\rangle. \tag{6.53}$$

**Упражнение 6.10.** Показать, что характер представления (6.46)

$$\chi(E)=3, \quad \chi(C)=-3. \tag{6.54}$$

**Упражнение 6.11.** Показать, что характер представления (6.47)

$$\chi(E)=3, \quad \chi(S_1)=1. \tag{6.55}$$

**Упражнение 6.12.** Показать, что характер представления (6.48)

$$\chi(E)=3,\ \chi(S_1)=\chi(S_2)=\chi(S_3)=1,\ \chi(D_1)= =\chi(D_2)=\chi(D_3)=-1, \quad \chi(C)=-3. \tag{6.56}$$

**Упражнение 6.13.** Показать, что характер представления (6.49)

$$\chi(g_\varphi)=1+2\cos\varphi. \tag{6.57}$$

**Упражнение 6.14.** Показать, что характер представления (6.52)

$$\chi(g)=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\cos\theta\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\cos\theta. \tag{6.58}$$

## § 7. Диады

Совокупность двух векторов $a$ и $b$ называется диадой

$$\underset{\sim}{D}=\vec{a}\otimes\vec{b}. \tag{7.1}$$

Вектор $\vec{a}$ называется первым (или левым) вектором диады, а вектор $\vec{b}$ — вторым (или правым). Символ $\otimes$ между векторами диады называется символом диадного умножения. Совокупность чисел $a^ib^j$ называется компонентами диады $D$

$$\begin{pmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Так как при переходе от одной системы координат к другой контравариантные векторы базиса преобразуются по закону (2.14), то для компонент диады

$$a^{i'}b^{j'}=A^{i'}_{i}A^{j'}_{j}a^{i}b^{j}. \tag{7.3}$$

Таким образом, компоненты диады $\underset{\sim}{D}$ являются компонентами тензора, а значит, сама диада — тензором второго порядка, правда, специального вида: например, из (7.2) видно, что все строки (и столбцы) компонент этого тензора пропорциональны.

Обозначим скалярное произведение

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\varkappa \tag{7.4}$$

и определим скалярное умножеиие диады $\underset{\sim}{D}$ слева на вектор $\vec{c}$

$$\vec{c}\cdot\underset{\sim}{D}=\vec{c}\cdot\vec{a}\otimes\vec{b}=\varkappa\vec{b}. \tag{7.5}$$

Таким образом, скалярное умножение некоторого вектора слева на диаду как бы проектирует этот вектор на направление правого вектора диады. Можно видеть, что умножение некоторого вектора на диаду справа проектирует этот вектор на направление левого вектора диады.

Транспонированием диады $\underset{\sim}{D}$ называется операция перестаиовки векторов диадиого произведения

$$\underset{\sim}{\tilde{D}}=\vec{b}\otimes\vec{a}. \tag{7.6}$$

Диада называется симметричиой, если

$$\underset{\sim}{\tilde{D}}=\underset{\sim}{D}. \tag{7.7}$$

**Упражнение 7.1.** Доказать, что векторы, образующне симметричную диаду, являются коллинеарными.

**Упражнение 7.2.** Доказать, что сумма двух диад образует тензор. ●

Обозначим тензор, образованный суммой двух диад, через

$$\underset{\sim}{D}_2=\vec{a}_{(1)}\otimes\vec{b}_{(1)}+\vec{a}_{(2)}\otimes\vec{b}_{(2)}. \tag{7.8}$$

Умножим скалярно вектор $\vec{c}$ на $\underset{\sim}{D}_2$ слева и обозначим скаляриые произведения векторов

$$\vec{c}\cdot\vec{a}_{(1)}=\varkappa_1; \qquad \vec{c}\cdot\vec{a}_{(2)}=\varkappa_2. \tag{7.9}$$

Тогда

$$\vec{c}\cdot\underset{\sim}{D}_2=\varkappa_1\vec{b}_{(1)}+\varkappa_2\vec{b}_{(2)}. \tag{7.10}$$

Таким образом, любой вектор $\vec{c}$ путем скалярного умножения на $\underset{\sim}{D}_2$ преобразуется в некоторую линейную комбинацию векторов $\vec{b}_{(1)}$ и $\vec{b}_{(2)}$. Следовательно, комбинация двух диад (7.8) операцией левого (правого) скалярного умножения отображает векториое пространство на плоскость, параллельную двум векторам $\vec{b}_{(1)}$ и $\vec{b}_{(2)}$ ($\vec{a}_{(1)}$ и $\vec{a}_{(2)}$), если эти векторы не коллинеарны.

Рассмотрим тензор, образованый суммой трех диад, т. е.

$$\underset{\sim}{D}_3 = \vec{a}_{(1)} \otimes \vec{b}_{(1)} + \vec{a}_{(2)} \otimes \vec{b}_{(2)} + \vec{a}_{(3)} \otimes \vec{b}_{(3)}. \qquad (7.11)$$

Если среди векторов $\vec{a}_i$ (или $\vec{b}_i$) существует линейная зависимость, то $\underset{\sim}{D}_3$ сводится к $\underset{\sim}{D}_2$ (7.8) или $\underset{\sim}{D}$ (7.1). Пусть, например,

$$\vec{b}_{(3)} = \varkappa_1 \vec{b}_{(1)} + \varkappa_2 \vec{b}_{(2)}. \qquad (7.12)$$

Тогда

$$\underset{\sim}{D}_3 = \vec{a}_{(1)} \otimes \vec{b}_{(1)} + \vec{a}_{(2)} \otimes \vec{b}_{(2)} + \vec{a}_{(3)} \otimes (\varkappa_1 \vec{b}_{(1)} + \varkappa_2 \vec{b}_{(2)}), \qquad (7.13)$$

или в компонентах, используя правило сложения матриц,

$$D_3^{ij} = a_{(1)}^i b_{(1)}^j + a_{(2)}^i b_{(2)}^j + a_{(3)}^i (\varkappa_1 b_{(1)}^j + \varkappa_2 b_{(2)}^j) = \\ = (a_{(1)}^i + \varkappa_1 a_{(3)}^i)\, b_{(1)}^j + (a_{(2)}^i + \varkappa_2 a_{(3)}^i)\, b_{(2)}^j. \qquad (7.14)$$

Отсюда

$$\underset{\sim}{D}_3 = (\vec{a}_{(1)} + \varkappa_1 \vec{a}_{(3)}) \otimes \vec{b}_{(1)} + (\vec{a}_{(2)} + \varkappa_3 \vec{a}_{(3)}) \otimes \vec{b}_{(2)} = \\ = \vec{c}_{(1)} \otimes \vec{b}_{(1)} + \vec{c}_{(2)} \otimes \vec{b}_{(2)}. \qquad (7.15)$$

Так как в трехмерном пространстве всякие четыре вектора линейио зависимы, то сумму любого числа диад можно представить в виде (7.11). Поэтому $\underset{\sim}{D}_3$ называется полной диадой.

Полная диада, составленная из векторов основного и взаимного репера

$$\underset{\sim}{E} = \vec{e}^i \otimes \vec{e}_i, \qquad (7.16)$$

называется единичной диадой.

Используя правило обращения с компонентами диады как с матрицами, получим другие представления единичной диады:

$$\underset{\sim}{E}=\vec{e}^i\otimes\vec{e}_i=g^{ij}\vec{e}_j\otimes\vec{e}_i=\vec{e}_j\otimes\vec{e}^j=g_{ij}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j. \tag{7.17}$$

Умножая скалярно вектор $\vec{a}$ на диаду $\underset{\sim}{E}$ (7.16) слева, получим разложенне вектора $\vec{a}$ по векторам основного базиса, а умножая $\vec{a}$ скалярно на $\underset{\sim}{E}$ справа, получим разложение вектора $\vec{a}$ по векторам взаимного базиса:

$$\vec{a}\cdot\underset{\sim}{E}=\vec{a}\cdot\vec{e}^i\otimes\vec{e}_i=a^i\vec{e}_i, \tag{7.18}$$

$$\underset{\sim}{E}\cdot\vec{a}=\vec{e}^i\otimes\vec{e}_i\cdot\vec{a}=a_i\vec{e}^i. \tag{7.19}$$

Нетрудно видеть, что всякую диаду можно представить как разложение по девяти диадам, составленным из векторов репера:

$$\underset{\sim}{D}=\vec{a}\otimes\vec{b}=a^i\vec{e}_i\otimes b^j\vec{e}_j=a^ib^j\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j. \tag{7.20}$$

Поэтому естественно назвать девятку этих диад

$$\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j \tag{7.21}$$

диадным базисом. Таким образом, компоненты диады $\underset{\sim}{D}$ (7.2) являются компонентами (или координатами) именно в базисе $\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$. Можно, разумеется, выбрать вместо (7.21) н другие базисы, например

$$\vec{e}_i\otimes\vec{e}^k. \tag{7.22}$$

Но базис (7.22) можно выразнть через базис (7.21):

$$\vec{e}_i\otimes\vec{e}^k=g^{kj}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j. \tag{7.23}$$

**Упражнение 7.3.** Показать, что в качестве диадного базиса можно выбрать девятку диад

$$\vec{e}^k\otimes\vec{e}^l. \tag{7.24}$$

При этом каждая диада (7.21) выражается через базис (7.24) следующим образом:

$$\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j=g_{ik}g_{jl}\vec{e}^k\otimes\vec{e}^l. \tag{7.25}$$

**Упражнение 7.4.** Показать, что в прямоугольной системе координат разложение радиус-вектора $\vec{r}$ по векторам единичного репера $\vec{k}_i$ можно представить как скалярное произведение $\vec{r}$ на единичную диаду $\underset{\sim}{E}$:

$$\vec{r}=\vec{r}\cdot\underset{\sim}{E}=\vec{r}\cdot\vec{k}_i\otimes\vec{k}_i. \quad \bullet \tag{7.26}$$

Рассмотрим снова диаду $\underset{\sim}{D}$ (7.1) в виде разложения ее по диадному базису (7.21):

$$\underset{\sim}{D}=a^i b^j \vec{e}_i\otimes\vec{e}_j. \tag{7.27}$$

Используя формулы (7.25) и правила жонглирования индексами, получим

$$\underset{\sim}{D}=a^i b^j g_{ik} g_{jl}\vec{e}^k\otimes\vec{e}^l=a_k b_l\vec{e}^k\otimes\vec{e}^l. \tag{7.28}$$

Таким образом, диаду $\underset{\sim}{D}$ можно представить ковариантными компонентами, т. е. совокупностью ковариантных компонент векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Такое представление диады $\underset{\sim}{D}$ дается в диадном базисе (7.24).

**Упражнение 7.5.** Доказать, что компоненты диады (7.28) являются компонентами тензора.

**Упражнение 7.6.** Доказать тензорный характер диадных базисов (7.21), (7.22), (7.24).

**Упражнение 7.7.** Показать, что след диады, представленный в базисе (7.22), равен скалярному произведению векторов, составляющих эту диаду, т. е.

$$\langle D\rangle=\vec{a}\cdot\vec{b}. \quad \bullet \tag{7.29}$$

Мы установили, что диада является тензором второго порядка, хотя и очень специальным. Далее мы увидим, что всякий тензор второго порядка можно представить в виде суммы диад, а следовательно, в виде разложения по диадному базису. Сами диады (тензоры) носят инвариантный характер, т. е. не зависят от выбора системы координат, а изменяются только их компоненты, зависящие от выбора диадного базиса.

Понятие диады можно обобщить, определяя совокупность более двух векторов. Так, выражение

$$\underset{\sim}{\tau}=\vec{a}\otimes\vec{b}\otimes\vec{c} \tag{7.30}$$

называется триадой и вообще совокупность $n$ векторов ($n \geqslant 2$) — полиадой

$$\underset{\sim}{\Pi} = \vec{a}_{(1)} \otimes \vec{a}_{(2)} \otimes \ldots \otimes \vec{a}_{(n)}. \tag{7.31}$$

**Упражнение 7.8.** Доказать, что компоненты полиады $\underset{\sim}{\Pi}$

$$a_{(1)}^{i_1} a_{(2)}^{i_2} \ldots a_{(n)}^{i_n} \tag{7.32}$$

являются контравариантными компонентами тензора $n$-го порядка.