ГЛАВА 2

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Линейное (векторное) пространство

Рассмотрим n-мерные пространства. Но прежде всего напомним определение линейного (векторного, аффинного) пространства, известное из курса линейной алгебры. Пусть дано множество $\mathfrak{R}$ с элементами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., называемыми векторами, и пусть в $\mathfrak{R}$ задана операция сложения, ставящая паре векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ однозначно определенный элемент $\vec{a}+\vec{b}$, и операция умножения на число α из некоторого поля $\mathscr{K}$. Если $\mathscr{K}$ — поле комплексных чисел, то $\mathfrak{R}$ называется комплексным линейным пространством; если $\mathscr{K}$ — поле действительных чисел, то $\mathfrak{R}$ — действительное линейное пространство.

Введенные две операции должны удовлетворять следующим аксиомам:

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность).

2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативность).

3°. Существует элемент $\vec{0}$, называемый нулевым, такой, что для любого $\vec{a}\in\mathfrak{R}$

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

4°. Для каждого вектора $\vec{a}\in\mathfrak{R}$ существует обратный $-\vec{a}$, такой, что

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

5°. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

6°. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

7°. $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$.

8°. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Линейные пространства, определенные аксиомами 1°—8°, могут быть конечномерными, а могут быть и бесконечномерными. Заметим также, что эти аксиомы не используют понятия системы координат.

Упражнение 1.1. Показать, что следующие множества являются линейными пространствами:

а) множество, состоящее из нулевого элемента 0 (нуль-пространство);

б) совокупность всех векторов на плоскости;

в) множество всех непрерывных функций, определенных на отрезке [0, 1].

Упражнение 1.2. Доказать, что следующие множества не образуют линейного пространства:

а) множество конечного числа элементов;

б) совокупность векторов, лежащих на двух взаимно перпендикулярных прямых на плоскости (см. пример Минакова в предисловии);

в) многочлены степени n. ●

Базисом пространства $\mathcal{R}$ называется последовательность элементов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ этого пространства, если любой элемент $\vec{a}\in\mathcal{R}$ однозначно представим в виде

$$\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\vec{e}_i=\alpha^i\vec{e}_i \quad (i=1,\ldots,n), \tag{1.1}$$

где n — любое натуральное положительное число (или ∞), которое называется размерностью пространства $\mathcal{R}$ (правила суммирования см. на с. 10). Числа $\alpha^j\in\mathcal{K}$ называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_i$.

Базисом (1.1) обладает всякое конечномерное пространство (среди бесконечномерных пространств счетным базисом обладают сепарабельные пространства).

Подпространством $\mathcal{R}_1$ линейного пространства $\mathcal{R}(\mathcal{R}_1\subseteq\mathcal{R})$ называется совокупность элементов $\vec{a}\in\mathcal{R}$, таких, что из $\vec{a}_1, \vec{a}_2\in\mathcal{R}_1$ следует $\vec{a}_1+\vec{a}_2\in\mathcal{R}_1$, $\alpha\vec{a}\in\mathcal{R}_1$.

Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — два линейных пространства. Говорят, что на множестве $\mathscr{R} \subset \mathscr{M}$ задан оператор $\mathfrak{f}$ со значениями в $\mathscr{N}$ (оператор, действующий из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{N}$), если каждому элементу $\vec{a} \in \mathscr{R}$ поставлен в соответствие элемент $\vec{b} \in \mathscr{N}$

$$\vec{b} = \mathfrak{f}(\vec{a}). \tag{1.2}$$

Множество $\mathscr{R}$ называется областью определения оператора $\mathfrak{f}$, а совокупность всех элементов $\vec{b} \in \mathscr{N}$, представимых в виде (1.2), называется *областью значений оператора* $\mathfrak{f}$ и обозначается через $\mathscr{R}_1(\mathscr{R})$, $\mathscr{R}_1 \subseteq \mathscr{N}$.

Если множество $\mathscr{R}$ является линейным пространством и для любых $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathscr{R}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{K}$

$$\mathfrak{f}(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2) = \alpha_1\mathfrak{f}(\vec{a}_1) + \alpha\mathfrak{f}(\vec{a}_2), \tag{1.3}$$

то оператор $\mathfrak{f}$ называется линейным и записывается часто в виде

$$\mathfrak{f}(\vec{a}) = \mathfrak{f}\vec{a}. \tag{1.3^1}$$

Если значениями оператора $\mathfrak{f}$ являются числа, то оператор $\mathfrak{f}$ называется *функционалом*, а если при этом его область определения является числовым множеством, то оператор $\mathfrak{f}$ называется *функцией*.

В частности, если $\mathscr{M}$ — множество всевозможных систем из n чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, составляющих пространство $\mathscr{E}_n$, то $\mathfrak{f}$ называется функцией n переменных. Пространство $\mathscr{E}_n$ называется n-мерным *арифметическим пространством.*

Упражнение 1.3. Доказать, что для всякого линейного оператора $\mathfrak{f}$, действующего из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{R}_1$

$$\mathfrak{f}(\vec{0}) = \vec{0}. \quad \bullet \tag{1.4}$$

Всякому линейному оператору, действующему из n-мерного векториого пространства $\mathscr{R}$ в себя в некотором базисе

$$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \tag{1.5}$$

пространства $\mathscr{R}$, можно поставить в соответствие матрицу. В самом деле, пусть линейный оператор $\mathfrak{f}$ переводит каждый из векторов базиса (1.5) в некоторый вектор

$$\vec{b}_i = \mathfrak{f}(\vec{e}_i). \tag{1.6}$$

Так как каждый вектор $\vec{b}_i \in \mathscr{R}$, то он однозначно разлагается по векторам базиса $\vec{e}_i$ (1.5):

$$\check{f}(\vec{e}_i) \equiv \vec{b}_i = B_i{}^j \vec{e}_j. \qquad (1.7)$$

Следовательно, для любого вектора $\vec{a} \in \mathscr{R}$

$$\vec{b} = \check{f}(\vec{a}) = \check{f}(a^i \vec{e}_i) = a^i \check{f}(\vec{e}_i) = a^i B_i{}^j \vec{e}_j, \qquad (1.8)$$

откуда для вектора $\vec{b} = b^j \vec{e}_j$

$$b^j = B_i{}^j a^i. \qquad (1.9)$$

Значит, оператор $\check{f}$ в базисе (1.5) представляется в виде матрицы $B_i{}^j$ (1.9).

Пусть даны множества $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ (совпадающие или нет). Множество упорядоченных пар элементов (т. е. взятых в определенном порядке), из которых первый принадлежит $\mathscr{M}$, а второй — $\mathscr{N}$, называется *декартовым произведением множеств* $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ и обозначается $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$. Назовем *отношением эквивалентности* между элементами одного и того же множества $\mathscr{M}$ отношение $\sim \subset \mathscr{M} \times \mathscr{M}$, обладающее следующими свойствами для любых $a, b, c \in \mathscr{M}$:

1) $a \sim a$ (рефлексивность);

2) $a \sim b = b \sim a$ (симметричность);

3) из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует $a \sim c$ (транзитивность).

Пусть R — векторное пространство над полем чисел $\mathscr{K}$. Введем в нем отношение эквивалентности $\sim$, обладающее следующими свойствами. Если два вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2 \in \mathscr{R}$ эквивалентны, т. е. $a_1 \sim a_2$, то для любого $\vec{b} \in \mathscr{R}$ и числа $\alpha \in \mathscr{K}$

$$\vec{a}_1 + \vec{b} \sim \vec{a}_2 + \vec{b}, \qquad (1.10)$$

$$\alpha \vec{a}_1 \sim \alpha \vec{a}_2. \qquad (1.11)$$

Множество всех элементов, эквивалентных вектору $\vec{a}$, образует класс $\{\vec{a}\}$, который обозначим через τ_a. Множество всех таких классов обозначим через τ и назовем класс τ_{a+b} (т. е. множество всех векторов, эквивалентных вектору $\vec{a} + \vec{b}$) суммой классов τ_a и τ_b, а класс $\tau_{\alpha a}$ (т. е. множество всех векторов, эквивалентных вектору $\alpha \vec{a}$) — произведением класса τ_a на число α.

Упражнение 1.4. Доказать, что множество τ является векторным пространством.

Пространство τ называется фактор-пространством пространства $\mathcal{R}$ по отношению эквивалентности $\sim$.

Упражнение 1.5. Пусть $\mathcal{L}$ является подпространством векторного пространства $\mathcal{R}$. Говорят, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сравнимы по модулю $\mathcal{L}$ и пишут

$$\vec{a} \equiv \vec{b} \pmod{\mathcal{L}}, \tag{1.12}$$

если $\vec{a} - \vec{b} \in \mathcal{L}$. Доказать, что сравнимость по модулю $\mathcal{L}$ является отношением эквивалентности и пространство $\mathcal{R}$ распадается на классы векторов, сравнимых по модулю $\mathcal{L}$.

Упражнение 1.6. Доказать, что если

$$\vec{a} \equiv \vec{b} \pmod{\mathcal{L}}, \quad \vec{a}_1 \equiv \vec{b}_1 \pmod{\mathcal{L}}, \tag{1.13}$$

то

$$\vec{a} + \vec{a}_1 \equiv (\vec{b} + \vec{b}_1) \pmod{\mathcal{L}}; \quad \alpha\vec{a} \equiv \alpha\vec{b} \pmod{\mathcal{L}}. \tag{1.14}$$

Упражнение 1.7. Доказать, что фактор-пространство τ пространства $\mathcal{R}$ по модулю $\mathcal{L}$, где $\mathcal{L}=0$ (т. е. $\mathcal{L}$ является нуль-пространством), совпадает с пространством $\mathcal{R}$, а фактор-пространство τ пространства $\mathcal{R}$ по модулю $\mathcal{R}$ является нуль-пространством. ●

Векторное пространство $\mathcal{R}$ называется *алгеброй*, если в нем определена операция умножения векторов $\perp$, дистрибутивная и перестановочная с операцией умножения на число:

$$\vec{a} \perp (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \perp \vec{b}_1 + \vec{a} \perp \vec{b}_2, \tag{1.15}$$

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \perp \vec{b} = \vec{a}_1 \perp \vec{b} + \vec{a}_2 \perp \vec{b}, \tag{1.16}$$

$$\vec{a} \perp (\alpha\vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \perp \vec{b} = \alpha(\vec{a} \perp \vec{b}). \tag{1.17}$$

Если умножение подчиняется ассоциативному закону

$$\vec{a} \perp (\vec{b} \perp \vec{c}) = (\vec{a} \perp \vec{b}) \perp \vec{c}, \tag{1.18}$$

то алгебра называется *ассоциативной*.

Упражнение 1.8. Доказать, что трехмерное векторное евклидово пространство с введенной операцией векторного умножения является алгеброй, причем неассоциативной. ●

Итак, если множество $\mathcal{M}$ наделяется некоторой *структурой*, т. е. операциями над элементами самого множества (*внутренние операции*) или над элементами множества $\mathscr{M}$ и некоторого другого множества $\mathscr{N}$ (*внешние операции*), а также определенными правилами, которым подчиняются эти операции, то множество $\mathscr{M}$ превращается в некоторое *пространство*.

Бинарной внутренней операцией называется закон (обозначим его символом $\perp$), дающий возможность по произвольным элементам $a \in \mathscr{M}$, $b \in \mathscr{M}$, взятым в определенном порядке, однозначно определить их произведение $c \in \mathscr{M}$

$$a \perp b = c. \tag{1.19}$$

Множество $\mathscr{M}$ с заданной на нем бинарной операцией $\perp$ называется *группоидом*. Другими словами, структура группоида состоит во введении в множестве $\mathscr{M}$ внутренней операции (1.19). Структура *полугруппы* заключается во введении в множестве $\mathscr{M}$ ассоциативной внутренней бинарной операции (1.19).

Наряду с бинарной операцией можно ввести *нульарную*, которая ставит в соответствие каждому элементу $a \in \mathscr{M}$ один и тот же элемент e из $\mathscr{M}$ (называемый единичным элементом)

$$a^0 = e, \tag{1.20}$$

обладающий таким свойством, что для произвольного $a \in \mathscr{M}$

$$a \perp e = e \perp a = a. \tag{1.21}$$

Полугруппа с единичным элементом называется *моноидом*.

Унарная внутренняя операция ставит в соответствие каждому элементу $a \in \mathscr{M}$ так называемый обратный элемент a^{-1}, такой, что

$$a^{-1} \perp a = a \perp a^{-1} = e. \tag{1.22}$$

Моноид с унарной операцией, обладающей свойством (1.22), называется *группой*. (В § 3 предыдущей главы структуру группы мы ввели несколько иначе.)

Бинарной операцией $\perp$, обладающей свойствами (1.15)—(1.17), мы ввели *структуру алгебры*.

Для введения *структуры векторного пространства* нам понадобилось наряду с внутренней операцией (сложением векторов) ввести еще внешнюю операцию (умножения вектора на число), причем эти операции обладают свойствами 1°—8°.