§ 2. Сопряженные пространства

Пусть $\mathscr{R}$ — векторное пространство. Рассмотрим множество всех линейных функционалов, заданных на $\mathscr{R}$. Часто эти функционалы называют *линейными формами* на $\mathscr{R}$. Выберем в пространстве $\mathscr{R}$ произвольный базис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. Каждый вектор $\vec{a} \in \mathscr{R}$ можно представить в виде (1.1)

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i, \tag{2.1}$$

где a^i — некоторые числа ($a^i \in \mathscr{K}$). Тогда в силу линейности каждого функционала f (1.3) имеем

$$f(\vec{a}) = f(a^i \vec{e}_i) = a^i f(\vec{e}_i). \tag{2.2}$$

Обозначим числа, являющиеся значениями функционала f на векторах базиса $\vec{e}_i$, через

$$x_i = f(\vec{e}_i). \tag{2.3}$$

Разумеется, эти числа зависят от выбора базиса пространства $\mathscr{R}$.

Упражнение 2.1. Показать, что если в $\mathscr{R}$ задан другой базис $\vec{e}_{i'}$, причем

$$\vec{e}_{i'} = A^i_{i'} \vec{e}_i, \tag{2.4}$$

то значения линейного функционала f на новых базисных векторах выражаются через его значения на старых базисных векторах по тем же формулам

$$x_{i'} = A^i_{i'} x_i. \; \bullet \tag{2.5}$$

Итак, всякий линейный функционал f, заданный на $\mathscr{R}$, может быть представлен в базисе $\{\vec{e}_i\}$ по формуле

$$f(\vec{a}) = x_i a^i, \tag{2.6}$$

где a^i — компоненты вектора $\vec{a}$ в этом базисе, а x_i — некоторые числа, определяющие функционал f в этом же базисе. Следовательно, правая часть (2.6) представляет собой значение функционала f на векторе a.

Назовем суммой двух линейных функционалов f^1

и f^2 функционал, ставящий в соответствие каждому вектору $\vec{a}$ число $f^1(\vec{a})+f^2(\vec{a})$, а произведением линейного функционала f на число α — функционал, ставящий в соответствие каждому вектору $\vec{a}$ число $\alpha f(\vec{a})$.

Упражнение 2.2. Доказать, что множество $\mathfrak{R}^*$ всех линейных функционалов, определенных на $\mathfrak{R}$, образует векторное пространство. ●

Это пространство $\mathfrak{R}^*$ называется *сопряженным* (или дуальным) к пространству $\mathfrak{R}$.

Упражнение 2.3. Доказать, что если пространство $\mathfrak{R}$ является n-мерным, то пространство $\mathfrak{R}^*$ тоже n-мерное. ●

Будем обозначать элементы сопряженного пространства $\mathfrak{R}^*$ через $\overleftarrow{a}$, $\overleftarrow{b}$, ... Эти векторы часто называют ковариантными, а векторы пространства $\mathfrak{R}$ — контравариантными. Само пространство $\mathfrak{R}$ можно назвать контравариантным векторным пространством, а сопряженное к нему пространство $\mathfrak{R}^*$ — ковариантным векторным пространством. Если в пространстве $\mathfrak{R}^*$ выбрать какой-либо базис $\overleftarrow{e}^i$ $(i=1, \ldots, n)$, то всякий ковариантный вектор $\overleftarrow{a}$ может быть однозначно представлен в виде

$$\overleftarrow{a}=a_i\overleftarrow{e}^i. \tag{2.7}$$

Однако мы сейчас найдем специальный базис пространства $\mathfrak{R}^*$, связанный определенным образом с выбранным базисом пространства $\mathfrak{R}$.

Рассмотрим всевозможные наборы из n-линейных функционалов f^i $(i=1, \ldots, n)$ и обозначим значения, принимаемые этими функционалами на векторном базисе пространства $\mathfrak{R}$, через

$$b^i_j=f^i(\vec{e}_j). \tag{2.8}$$

Очевидно, что если определитель матрицы $\| b^i_j \|$ отличен от нуля, то в качестве векторов базиса пространства $\mathfrak{R}^*$ можно принять векторы $e^i=\{b^i_1, b^i_2, \ldots, b^i_n\}$. Рассмотрим теперь такой набор линейных функционалов f^i, для которых $b^i_j=\delta^i_j$, т. е.

$$f^i(\vec{e}_j)=\delta^i_j. \qquad (2.9)$$

Назовем эти функционалы *базисными.* Базис пространства $\mathscr{R}^*$ $\overleftarrow{e}^1=\{1, 0, \ldots, 0\}, \ldots, \overleftarrow{e}^n=\{0, 0, \ldots, 1\}$, определенный базисными функционалами, назовем взаимным к базису $\{\vec{e}_i\}$ пространства $\mathscr{R}$.

Базисные функционалы ставят в соответствие каждому вектору $\vec{a}\in\mathscr{R}$ его соответствующую координату. В самом деле,

$$f^j(\vec{a})=f^j(a^i\vec{e}_i)=a^if^j(\vec{e}_i)=a^i\delta_i{}^j=a^j. \qquad (2.10)$$

Каждому линейному функционалу f соответствует некоторый вектор $\overleftarrow{x}$. В самом деле, значения этого функционала x_i на векторах базиса $\vec{e}_i$

$$x_i=f(\vec{e}_i) \qquad (2.11)$$

определяют единственный вектор $\overleftarrow{x}$, являясь его компонентами разложения по векторам взаимного базиса $\overleftarrow{e}^i$:

$$\overleftarrow{x}=x_i\overleftarrow{e}^i. \qquad (2.12)$$

Покажем, что каждому линейному функционалу φ на $\mathscr{R}^*$ соответствует линейный функционал f на $\mathscr{R}$. В самом деле, пусть $\overleftarrow{x}\in\mathscr{R}^*$ и φ — некоторый линейный функционал на $\mathscr{R}^*$:

$$\varphi(\overleftarrow{x})=\varphi(x_i\overleftarrow{e}^i)=x_i\varphi(\overleftarrow{e}^i)=x_ia^i. \qquad (2.13)$$

Определим вектор $\vec{a}\in\mathscr{R}$, компонентами которого в базисе $\vec{e}_i$ являются числа a^i. Тогда из (2.6) и (2.13) видим, что

$$\varphi(\overleftarrow{x})=f(\vec{a}). \qquad (2.14)$$

Если теперь выберем в пространстве $\mathscr{R}^*$ произвольный базис $\overleftarrow{e}^i$ и рассмотрим n линейных функционалов φ_i, определенных на $\mathscr{R}^*$, таких, что

$$\varphi_i(\overleftarrow{e}^j)=\delta_i{}^j, \qquad (2.15)$$

то видим, что базису $\vec{e}^i$ в пространстве $\mathscr{R}^*$ соответствует $\vec{e}_i$ в $\mathscr{R}$. Поэтому базисы $\vec{e}_i$ и $\vec{e}^i$ называются взаимными по отношению друг к другу, или *каноническими*, а пространства $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}^*$ — *взаимно сопряженными.* Таким образом, всякий линейный функционал в пространствах $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}^*$ можно представить в виде (2.6) и (2.13), где a^i — компоненты вектора $\vec{a}\in\mathscr{R}$, а x_i — компоненты вектора $\overleftarrow{x}\in\mathscr{R}^*$ во взаимных базисах.

Упражнение 2.4. Доказать, что если $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\overleftarrow{e}^j\}$ — произвольные базисы в $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}^*$, то линейные функционалы f и φ представляются в виде

$$f(\vec{a})=b_j{}^i a^j x_i;\quad \varphi(\overleftarrow{x})=c_i{}^j x_j a^i, \tag{2.16}$$

где величины $b_j{}^i$ определены формулами (2.8), а

$$c_i{}^j=\varphi_i(\overleftarrow{e}^j). \quad \bullet$$

Значением вектора $\overleftarrow{x}\in\mathscr{R}^*$ на векторе $\vec{a}\in\mathscr{R}$ называется значение линейного функционала f, соответствующего вектору $\overleftarrow{x}$, на этом векторе $\vec{a}$ (и обозначается $\overleftarrow{x}(\vec{a})$). Нетрудно видеть, что если выбраны каноические базисы, то

$$\overleftarrow{x}(\vec{a})=x_i a^i. \tag{2.17}$$

Упражнение 2.5. Пусть в $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}^*$ выбраны канонические базисы. Вычислить значение вектора $\overleftarrow{x}=(1, 1, \ldots, 1)$ на векторе $\vec{a}=(1, 1, \ldots, 1)$.

Упражнение 2.6. Пусть дано множество линейных операторов $\breve{A}$, действующих из одного векторного пространства $\mathscr{R}_1$ в другое $\mathscr{R}_2$. Зафиксируем некоторый линейный функционал f_2, которому соответствуют векторы $\overleftarrow{x}_2\in\mathscr{R}_2{}^*$. Очевидно, что можно рассмотреть линейный функцнонал f_1 (которому соответствуют векторы $\overleftarrow{x}_1\in\mathscr{R}_1{}^*$), такой, что

$$f_2(\breve{A}\vec{a}_1)=f_1(\vec{a}_1). \tag{2.18}$$

Оператором $\breve{A}^*$, *сопряженным* к оператору $\breve{A}$, называется оператор, определяющий отображение $\mathscr{R}_2{}^*$ в $\mathscr{R}_1{}^*$ по закону

$$\overleftarrow{x}_1=\breve{A}^*\overleftarrow{x}_2. \tag{2.19}$$

Пусть имеются два линейных оператора $\check{A}^*$ (из $\mathscr{R}_1$ в $\mathscr{R}_2$) и $\check{B}^*$ (из $\mathscr{R}_2$ в $\mathscr{R}_3$). Доказать, что

$$(\check{B}\check{A})^* = \check{A}^*\check{B}^*. \tag{2.20}$$

Упражнение 2.7. Пусть в некотором базисе $\vec{e}_i$ пространства $\mathscr{R}$ линейный оператор $\check{A}$ представляется матрицей $A^{i}_{\cdot j}$. Доказать, что сопряженный оператор $\check{A}^*$ в этом же базисе представляется матрицей $A_{j}^{\cdot i}$. ●

Рассмотрим теперь евклидово пространство, т. е. действительное векторное пространство, в котором определено скалярное произведение, — каждой паре векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathscr{R}$ поставлено в соответствие число, которое обозначается через $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$, при этом удовлетворяются аксиомы:

1°. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$,

2°. $(\vec{a}\alpha, \vec{b}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$,

3°. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) = (\vec{a}_1, \vec{b}) + (\vec{a}_2, \vec{b})$,

4°. $(\vec{a}, \vec{a}) \equiv \|\vec{a}\|^2 \geqslant 0$,

причем длина вектора $\vec{a}$ равна нулю ($\|\vec{a}\| = 0$) только при $\vec{a} = \vec{0}$.

Упражнение 2.8. Доказать неравенство Коши—Буняковского

$$(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant \|\vec{a}\|\, \|\vec{b}\|. \tag{2.21}$$

Упражнение 2.9. Доказать неравенство треугольника

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leqslant \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|. \quad ● \tag{2.22}$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ортогональными, если

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0. \tag{2.23}$$

Если $\{\vec{e}_i\}$ — базис пространства $\mathscr{R}$, то матрица g_{ij}, составленная из попарных скалярных произведений векторов базиса

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \equiv (\vec{e}_i, \vec{e}_j), \tag{2.24}$$

называется *фундаментальной*. В курсе линейной алгебры доказывается, что во всяком n-мерном евклидовом пространстве существуют ортонормированные базисы, т. е. базисы, для которых

$$g_{ij}=\delta_{ij}\equiv\begin{cases}0, & \text{если } i\neq j,\\ 1, & \text{если } i=j.\end{cases} \tag{2.25}$$

Теорема Рисса. *Всякий линейный функционал $\mathfrak{f}$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{R}$ можно представить в виде скалярного произведения*

$$\mathfrak{f}(\vec{a})=(\vec{b}, \vec{a}), \tag{2.26}$$

где $\vec{b}$ — фиксированный вектор $\in\mathcal{R}$, однозначно определяемый функционалом $\mathfrak{f}$. И обратно, каждый вектор $\vec{b}\in\mathcal{R}$ определяет линейный функционал $\mathfrak{f}$.

В самом деле, выберем в $\mathcal{R}$ ортонормированный базис $\{\vec{e}_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и рассмотрим вектор b, имеющий компоненты в этом базисе $x^i=x_i$ (в ортонормированной системе координат ковариантиые и контравариантные компоненты совпадают). Тогда

$$(\vec{a}, \vec{b})=a^i\vec{e}_i x^j\vec{e}_j=a^i x_i. \tag{2.27}$$

Сравнивая (2.27) с (2.6), заключаем, что в $\mathcal{R}$ найдется такой вектор $\vec{b}$, что выполняется равенство (2.26). Для доказательства единственности этого представления предположим противное, т. е. существуют b_1 и $\vec{b}_2$, такие, что

$$\mathfrak{f}(\vec{a})=(\vec{a}, \vec{b}_1);\ \mathfrak{f}(\vec{a})=(\vec{a}, \vec{b}_2). \tag{2.28}$$

Следовательно, для любого $\vec{a}$

$$(\vec{a}, \vec{b}_1-\vec{b}_2)=0, \tag{2.29}$$

откуда

$$\vec{b}_1=\vec{b}_2. \tag{2.30}$$

Теорема доказана.

Умножим обе части равенства (2.9) на g_{ki} и просуммируем по i от 1 до n:

$$g_{ki}\mathfrak{f}^i(\vec{e}_j)=g_{kj}. \tag{2.31}$$

Сравнивая это выражение с (2.24), имеем

$$(\vec{e}_k, \vec{e}_j)=g_{ki}\mathfrak{f}^i(\vec{e}_j). \tag{2.32}$$

Применяя к (2.32) теорему Рисса и используя определение взаимного базиса $\overleftarrow{e}^i$, получим

$$\vec{e}_k = g_{ki}\overleftarrow{e}^i. \qquad (2.33)$$

Следовательно, в евклидовом пространстве исчезает разница между взаимными базисами $\vec{e}_i$ и $\overleftarrow{e}^i$, а значит, пространства R и R^* можно считать тождественными.

Упражнение 2.10. Показать, что в евклидовом пространстве

$$\overleftarrow{e}^i = g^{ij}\vec{e}_j, \qquad (2.34)$$

где g^{ij} — матрица, обратная к фундаментальной.

Упражнение 2.11. Доказать, что

$$g^{ij} = (\overleftarrow{e}^i, \overleftarrow{e}^j). \qquad (2.35)$$

Упражнение 2.12. Пусть в пространство $\mathscr{R}$ выбран базис $\vec{e}_i$ и дан закон перехода к новому базису $\vec{e}_{i'}$

$$\vec{e}_{i'} = B_{i'}^{\cdot i}\,\vec{e}_i. \qquad (2.36)$$

Доказать, что в этом случае взаимный базис изменяется по закону

$$\overleftarrow{e}^{i'} = A_{\cdot i}^{i'\cdot}\,\overleftarrow{e}^i, \qquad (2.37)$$

где матрица A (2.37) является транспонированной к матрице, обратной к матрице B (2.36).

§ 3. Миоготочечные тензоры

Пусть $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \ldots, \mathscr{R}_m$ — m векторных пространств над полем $\mathscr{K}$. Рассмотрим множество элементов их декартова пронзведення $\mathscr{R}_1 \times \mathscr{R}_2 \times \ldots \times \mathscr{R}_m$, т. е. множество упорядоченных наборов m элементов $\vec{a}_i \in \mathscr{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ вида

$$\underset{\sim}{a} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m). \qquad (3.1)$$

Образуем векторное пространство $\mathscr{A}$, базисом которого являются наборы (3.1), т. е. элементы пространства $\mathscr{A}$ будут формальными линейными комбинациями элементов вида (3.1):

$$\underset{\sim}{A} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \underset{\sim}{a}_{(l)}, \quad \alpha_l \in \mathscr{K}. \qquad (3.2)$$