$$\overrightarrow{e}_k = g_{ki}\overleftarrow{e}^i. \tag{2.33}$$

Следовательно, в евклидовом пространстве исчезает разница между взаимными базисами $\overrightarrow{e}_i$ и $\overleftarrow{e}^i$, а значит, пространства R и R^* можно считать тождественными.

Упражиение 2.10. Показать, что в евклидовом пространстве

$$\overleftarrow{e}^i = g^{ij}\overrightarrow{e}_j, \tag{2.34}$$

где g^{ij} — матрица, обратная к фундаментальной.

Упражнение 2.11. Доказать, что

$$g^{ij} = (\overleftarrow{e}^i, \overleftarrow{e}^j). \tag{2.35}$$

Упражнение 2.12. Пусть в пространство $\mathcal{R}$ выбран базис $\overrightarrow{e}_i$ и дан закон перехода к новому базису $\overrightarrow{e}_{i'}$

$$\overrightarrow{e}_{i'} = B_{i'}^{\cdot i}\,\overrightarrow{e}_i. \tag{2.36}$$

Доказать, что в этом случае взаимный базис изменяется по закону

$$\overleftarrow{e}^{i'} = A_{\cdot i}^{i'\cdot}\overleftarrow{e}^i, \tag{2.37}$$

где матрица A (2.37) является транспонированной к матрице, обратной к матрице B (2.36).

§ 3. Миоготочечные тензоры

Пусть $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_m$ — m векторных пространств над полем $\mathcal{K}$. Рассмотрим множество элементов их декартова пронзведення $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \times \ldots \times \mathcal{R}_m$, т. е. множество упорядоченных наборов m элементов $\overrightarrow{a}_i \in \mathcal{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ вида

$$\underset{\sim}{a} = (\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_m). \tag{3.1}$$

Образуем векторное пространство $\mathcal{A}$, базисом которого являются наборы (3.1), т. е. элементы пространства $\mathcal{A}$ будут формальными линейными комбинациями элементов вида (3.1):

$$\underset{\sim}{A} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \underset{\sim}{a}_{(l)}, \quad \alpha_l \in \mathcal{K}. \tag{3.2}$$

Будем говорить, что два элемента $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B} \in \mathscr{A}$ связаны *отношением* $\sim$, если существуют выражения элементов $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$, сводящиеся друг к другу при помощи следующих преобразований.

1°. Если $\vec{c}_i = \vec{a}_i + \vec{b}_i$; $\vec{a}_i, \vec{b}_i, \vec{c}_i \in \mathscr{R}_i$, то

$$\underset{\sim}{C} \equiv (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_i, \ldots, \vec{c}_m) \sim$$
$$\sim (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{c}_m) +$$
$$+ (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{b}_i, \ldots, \vec{c}_m).$$

2°. Если $\vec{b}_i = \alpha \vec{a}_i$, $\vec{a}_i, \vec{b}_i \in \mathscr{R}_i$, $\alpha \in \mathscr{K}$, то

$$\underset{\sim}{B} \equiv (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_i, \ldots, \vec{b}_m) \sim \alpha (\vec{b}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{b}_m).$$

Другими словами, $\underset{\sim}{A} \sim \underset{\sim}{B}$ тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность элементов пространства $\mathscr{A}$, в которой первым элементом является $\underset{\sim}{A}$, а последним — $\underset{\sim}{B}$, причем любые два соседних элемента связаны между собой введенным отношением $\sim$.

Упражнение 3.1. Доказать, что введенное условиями 1° и 2° отношение является отношением эквивалентности (т. е. показать, что выполняются аксиомы 1, 2, 3, введенные в § 1).

Упражнение 3.2. Доказать, что размерность векторного пространства $\mathscr{A}$ равна $n = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m$, где n_i — размерность пространства $\mathscr{R}_i$. ●

Построим фактор-пространство пространства A (см. § 1) и дадим следующее определение:

Тензорным произведением $R_1 \otimes \ldots \otimes R_m$ *векторных пространств* $\mathscr{R}_1, \ldots, \mathscr{R}_m$ *называется фактор-пространство* τ_m *пространства* $\mathscr{A}$ *по отношению введенной* (п. 1° *и* 2°) *эквивалентности.*

Элементы пространства τ_m называются *тензорами* m-го порядка (m-точечными).

Пусть $\underset{i}{\vec{e}_i}$ — базис пространства $\mathscr{R}_i$. Рассмотрим полиады вида

$$\underset{\sim}{E} = \underset{1}{\vec{e}_{i_1}} \otimes \underset{2}{\vec{e}_{i_2}} \otimes \ldots \otimes \underset{m}{\vec{e}_{i_m}}. \qquad (3.3)$$

Очевидно, что эти полиады являются тензорами m-го порядка, так как они принадлежат пространству τ_m.

Упражнение 3.3. Доказать, что тензоры (3.3) линейно независимы. ●

Таким образом, тензоры (3.3) можно принять за базис пространства τ_m (будем говорить, что пространство τ_m «порождается» базисом (3.3)). Тогда всякий тензор $\underset{\sim}{T} \in \tau_m$ может быть представлен в базисе (3.3) следующим образом

$$\underset{\sim}{T} = t^{i_1 i_2 \ldots i_m} \underset{1}{\vec{e}_{i_1}} \otimes \underset{2}{\vec{e}_{i_2}} \otimes \ldots \otimes \underset{m}{\vec{e}_{i_m}}. \tag{3.4}$$

Коэффициенты $t^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ называются компонентами тензора $\underset{\sim}{T}$ (m-точечного) относительно базиса (3.3). Если пространство τ_m является *тензорным произведением*, образованным из m экземпляров одного векторного пространства $\mathscr{R}$: $\mathscr{R} \otimes \ldots \otimes \mathscr{R}$, элементами пространства τ_m являются одноточечные тензоры (в гл. 1 рассматривались только одноточечные тензоры).

Пусть даны векторные пространства $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \ldots, \mathscr{R}_m$ соответственно размерности $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Рассмотрим их сопряженные пространства $\mathscr{R}_1^*, \mathscr{R}_2^*, \ldots, \mathscr{R}_m^*$ и построим тензорное произведение

$$\Gamma_m = \mathscr{R}_1^* \otimes \mathscr{R}_2^* \otimes \ldots \otimes \mathscr{R}_m^*. \tag{3.5}$$

Выберем в каждом из пространств $\mathscr{R}_j^*$ базис $\underset{j}{\overleftarrow{e}^i}$, взаимный к базису $\underset{j}{\vec{e}_i}$ пространства $\mathscr{R}_j$, и рассмотрим полиады вида

$$\underset{\sim}{E}^* = \underset{1}{\overleftarrow{e}^{i_1}} \otimes \underset{2}{\overleftarrow{e}^{i_2}} \otimes \ldots \otimes \underset{m}{\overleftarrow{e}^{i_m}}. \tag{3.6}$$

Тогда каждый элемент $\underset{\sim}{P}$ пространства Γ_m можно представить в виде

$$\underset{\sim}{P} = p_{i_1 \ldots i_m} \underset{1}{\overleftarrow{e}^{i_1}} \otimes \underset{2}{\overleftarrow{e}^{i_2}} \otimes \ldots \otimes \underset{m}{\overleftarrow{e}^{i_m}}. \tag{3.7}$$

Коэффициенты $p_{i_1 \ldots i_m}$ являются компонентами тензора $\underset{\sim}{P}$ (m-точечного) относительно базиса (3.6).

Пусть в каждом пространстве $\mathscr{R}_\alpha$ выбран новый базис $\underset{\alpha}{\vec{e}_{i'}}$, причем (см. упр. 2.12)

$$\underset{\alpha}{\vec{e}_{i'}} = \underset{\alpha}{B_{i'}^{i}} \underset{\alpha}{\vec{e}_i}; \quad \underset{\alpha}{\overleftarrow{e}^{i'}} = \underset{\alpha}{A^{i'}{}_{i}} \underset{\alpha}{\overleftarrow{e}^{i}}, \tag{3.8}$$

где

$$\underset{\alpha}{B}_{i'}{}^{i}\underset{\alpha}{A}^{i'}{}_{j}=\delta^{i}{}_{j};\quad \underset{\alpha}{A}^{i'}{}_{i}\underset{\alpha}{B}_{j'}{}^{i}=\underset{\alpha}{\delta}^{i'}{}_{j'}. \tag{3.9}$$

Тогда из (3.4) и (3.7) видно, что

$$t^{i'_1 i'_2 \ldots i'_m}=\underset{1}{A}{}^{i'_1}_{i_1}\underset{2}{A}{}^{i'_2}_{i_2}\ldots\underset{m}{A}{}^{i'_m}_{i_m}t^{i_1 i_2\ldots i_m} \tag{3.10}$$

$$p_{i'_1 i'_2\ldots i'_m}=\underset{1}{B}{}^{i_1}_{i'_1}\underset{2}{B}{}^{i_2}_{i'_2}\ldots\underset{m}{B}{}^{i_m}_{i'_m}p_{i_1 i_2\ldots i_m}, \tag{3.11}$$

т. е. компоненты тензора $\underset{\sim}{T}$ преобразуются по каждому индексу как контравариантные компоненты вектора в каждом пространстве $\mathcal{R}_\alpha$, а компоненты тензора $\underset{\sim}{P}$ — как ковариантные компоненты вектора в каждом пространстве $\mathcal{R}_\alpha^*$. Поэтому тензоры $\underset{\sim}{T}$ иногда называются контравариантными, а тензоры $\underset{\sim}{P}$ — ковариантными тензорами m-го порядка. Если тензоры $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{P}$ являются одноточечными (все пространства $\mathcal{R}_\alpha$, $\alpha=1,\ldots,m$ совпадают), то компоненты тензора $\underset{\sim}{T}$ называются контравариантными, компоненты тензора $\underset{\sim}{P}$ — ковариантными.

Можно рассмотреть смешанные тензоры, т. е. тензоры, являющиеся элементами тензорного произведения пространств, часть из которых является основными векторными пространствами $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, …, $\mathcal{R}_l$, а другая часть — сопряженными к соответствующим векторным пространствам $\mathcal{R}^*_{l+1}$, …, $\mathcal{R}^*_m$.

В качестве базисных тензоров таких пространств можно выбрать полиады вида

$$\underset{\sim}{E}=\underset{1}{\vec{e}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\underset{l}{\vec{e}}_{i_l}\otimes\underset{l+1}{\overleftarrow{e}}{}^{i_{l+1}}\otimes\ldots\otimes\underset{m}{\overleftarrow{e}}{}^{i_m}. \tag{3.12}$$

Очевидно, что среди одноточечных тензоров m-го порядка при выбранных взаимных базисах $\vec{e}_i$ и $\overleftarrow{e}^i$ существует 2^m различных наборов базисных полиад.

Упражнение 3.4. Подсчитать, сколько будет различных наборов таких полиад среди многоточечных тензоров m-го порядка. (*Ответ:* $m!2^m$) ●

Определим алгебраические операции, производимые над тензорами. Прежде всего заметим, что самим определением тензоров как элементов некоего векторного пространства вводятся операции сложения тензоров и умножения их на число.

1. Произведение тензоров. Если $\tilde{T}$ — элемент тензорного произведения l пространств $\mathcal{R}_1, \ldots$ $\ldots, \mathcal{R}_l$, а $\underset{\sim}{P}$ — элемент тензорного произведения $(m-l)$ пространств $\mathcal{R}_{l+1}, \ldots, \mathcal{R}_m$, то произведение

$$\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{P} \tag{3.13}$$

есть тензор $\underset{\sim}{S}$, принадлежащий тензорному произведению m пространств $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_m$. Таким образом, если

$$\underset{\sim}{T}=t^{i_1\ldots i_l}\underset{1}{\vec{e}}_{i_1}\otimes\ldots\underset{l}{\vec{e}}_{i_l}, \tag{3.14}$$

$$\underset{\sim}{P}=p^{i_{l+1}\ldots i_m}\underset{l+1}{\vec{e}}_{i_{l+1}}\otimes\ldots\otimes\underset{m}{\vec{e}}_{i_m}, \tag{3.15}$$

то

$$\underset{\sim}{S}=s^{i_1\ldots i_m}\underset{1}{\vec{e}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\underset{m}{\vec{e}}_{i_m}. \tag{3.16}$$

Упражнение 3.5. Доказать, что произведение двух тензоров дистрибутивно относительно сложения и ассоциативно, т. е.

$$\left.\begin{aligned}\underset{\sim}{T}\otimes(\underset{\sim}{P}+\underset{\sim}{S})&=\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{P}+\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{S}\\(\underset{\sim}{T}+\underset{\sim}{P})\otimes\underset{\sim}{S}&=\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{S}+\underset{\sim}{P}\otimes\underset{\sim}{S}\end{aligned}\right\}, \tag{3.17}$$

$$(\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{P})\otimes\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{T}\otimes(\underset{\sim}{P}\otimes\underset{\sim}{S}).\ \bullet \tag{3.18}$$

Пользуясь свойствами (3.17), (3.18), можно определить произведение k тензоров

$$\underset{\sim}{T}_1\otimes\underset{\sim}{T}_2\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{T}_k. \tag{3.19}$$

В частности, полиада (3.3) есть не что иное, как тензорное произведение векторов $\underset{1}{\vec{e}}_{i_1}, \ldots, \underset{m}{\vec{e}}_{i_m}$. Это и позволяет записывать любой тензор m-го порядка в виде (3.4).

2. Подстановка индексов. Операция, согласно которой каждому тензору m-го порядка

$$\underset{\sim}{T}\in\mathcal{R}_1\otimes\mathcal{R}_2\otimes\ldots\otimes\mathcal{R}_k\otimes\ldots\otimes\mathcal{R}_l\otimes\ldots\otimes\mathcal{R}_m$$

$$(1\leqslant k<l\leqslant m),$$

$$\underset{\sim}{T}=t^{i_1\ldots i_k\ldots i_l\ldots i_m}\underset{1}{\vec{e}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\underset{k}{\vec{e}}_{i_k}\otimes\ldots\otimes\underset{l}{\vec{e}}_{i_l}\otimes\ldots\otimes\underset{m}{\vec{e}}_{i_m} \tag{3.20}$$

ставится в соответствие тензор m-го порядка

$$\underset{\sim}{P} \in \mathcal{R}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{R}_l \otimes \ldots \otimes \mathcal{R}_k \otimes \ldots \otimes \mathcal{R}_m,$$

$$\underset{\sim}{P} = t^{i_1 \ldots i_l \ldots i_k \ldots i_m} \underset{1}{\vec{e}_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \underset{l}{\vec{e}_{i_l}} \otimes \ldots \otimes \underset{k}{\vec{e}_{i_k}} \otimes \ldots \otimes \underset{m}{\vec{e}_{i_m}}, \tag{3.21}$$

называется *операцией подстановки индексов* $\{k, l\}$. Если пространства $\mathcal{R}_k$ и $\mathcal{R}_l$ имеют одну размерность и при операции подстановки индексов $\{k, l\}$ $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{P}$, то тензор $\underset{\sim}{T}$ называется симметричным по индексам k и l; если же при операции подстановки индексов $\{k, l\}$ $\underset{\sim}{T} = -\underset{\sim}{P}$, то тензор $\underset{\sim}{T}$ называется антисимметричным (или кососимметричным) по индексам k и l.

Упражнение 3.6. Пусть векторные пространства $\mathcal{R}_k$ и $\mathcal{R}_l$ имеют одинаковую размерность ($n_k = n_l$). Доказать, что всякому тензору m-го порядка $\underset{\sim}{T}$ (3.20) может быть поставлен в соответствие тензор m-го порядка $\underset{\sim}{S}$, симметричный по индексам $\{k, l\}$. Построить этот тензор.

Упражнение 3.7. Доказать, что при условиях, высказанных в предыдущем упражнении, каждому $\underset{\sim}{T}$ может быть поставлен в соответствие тензор m-го порядка $\underset{\sim}{A}$, антисимметричный по индексам $\{k, l\}$. Построить этот тензор. ●

Пусть дан одноточечный тензор m-го порядка $\underset{\sim}{T}$, т. е. определенный в пространстве $\mathcal{R} \otimes \mathcal{R} \otimes \ldots \otimes \mathcal{R}$. Говорят, что тензор $\underset{\sim}{S}$ получен операцией симметрирования, например, по первым l индексам ($l \leqslant m$), если в базисе

$$\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_m} \tag{3.22}$$

его компоненты имеют вид

$$s^{i_1 \ldots i_l \ldots i_m} = t^{(i_1 \ldots i_l) i_{l+1} \ldots i_m} \equiv \frac{1}{l!} \sum_{i_1, \ldots, i_l} t^{i_1 \ldots i_l \ldots i_m}, \tag{3.23}$$

где сумма распространяется по всем перестановкам индексов $i_1, \ldots, i_l$. Аналогично определяется операция альтернирования, например, по первым l индексам (см. § 3 гл. 1). Компоненты тензора $\underset{\sim}{A}$, полученного этой операцией, имеют в базисе (3.22) вид

$$a^{i_1\ldots i_l\ldots i_m} = t^{[i_1\ldots i_l]i_{l+1}\ldots i_n} \equiv \frac{1}{l!} \sum_{i_1,\ldots,i_l} \pm t^{i_1\ldots i_l\ldots i_n}, \quad (3.24)$$

где сумма распространяется по всем перестановкам индексов $i_1, \ldots, i_l$; причем четные перестановки берутся со знаком плюс, а нечетные — со знаком минус.

Рассмотрим одноточечные тензоры 2-го порядка $\underset{\sim}{T} \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}$. Обозначим

$$\vec{a} \overset{s}{\otimes} \vec{b} \equiv \frac{1}{2} (\vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{b} \otimes \vec{a}). \quad (3.25)$$

Упражнение 3.8. Доказать, что пространство, порождаемое базисом (3.25), является пространством симметричных тензоров

$$\underset{\sim}{S} = s^{ij} \vec{e}_i \overset{S}{\otimes} \vec{e}_j = s^{ji} \vec{e}_i \overset{S}{\otimes} \vec{e}_j. \quad ● \quad (3.26)$$

Пусть теперь образован базис, для любых двух векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{R}$ которого справедливо

$$\vec{a} \overset{A}{\otimes} \vec{b} \equiv \frac{1}{2} (\vec{a} \otimes \vec{b} - \vec{b} \otimes \vec{a}). \quad (3.27)$$

Упражнение 3.9. Доказать, что пространство, порождаемое базисом (3.27), является пространством антисимметричных тензоров

$$\underset{\sim}{A} = a^{ij} \vec{e}_i \overset{A}{\otimes} \vec{e}_j = -a^{ji} \vec{e}_i \overset{A}{\otimes} \vec{e}_j. \quad (3.28)$$

Упражнеиие 3.10. Проделать все выкладки этого параграфа для случая одноточечных тензоров m-го порядка ($m>2$). ●

Тензор, получающийся из данного при перестаиовках индексов в базисных полиадах, называется изомером тензора. Например, $\underset{\sim}{\tilde{a}}$ — изомер тензора $\underset{\sim}{a}$.

§ 4. Полилинейные формы

В § 2 мы рассматривали линейные функционалы, действующие в линейном пространстве $\mathcal{R}$. Рассмотрим теперь обобщение линейных функционалов, а имеино полилинейный функционал (или полилинейную форму), которым называется функционал, зависящий от m векторов $\underset{j}{\vec{a}} \in \mathcal{R}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ и линейный относительно каждого аргумента. Например, для