$$a^{i_1\ldots i_l\ldots i_m}=t^{[i_1\ldots i_l]i_{l+1}\ldots i_n}\equiv\frac{1}{l!}\sum_{i_1,\ldots,i_l}\pm t^{i_1\ldots i_l\ldots i_n},\qquad(3.24)$$

где сумма распространяется по всем перестановкам индексов $i_1, \ldots, i_l$; причем четные перестановки берутся со знаком плюс, а нечетные — со знаком минус.

Рассмотрим одноточечные тензоры 2-го порядка $\underset{\sim}{T}\in\mathscr{R}\otimes\mathscr{R}$. Обозначим

$$\vec{a}\overset{s}{\otimes}\vec{b}\equiv\frac{1}{2}(\vec{a}\otimes\vec{b}+\vec{b}\otimes\vec{a}).\qquad(3.25)$$

Упражнение 3.8. Доказать, что пространство, порождаемое базисом (3.25), является пространством симметричных тензоров

$$\underset{\sim}{S}=s^{ij}\vec{e}_i\overset{S}{\otimes}\vec{e}_j=s^{ji}\vec{e}_i\overset{S}{\otimes}\vec{e}_j. \bullet\qquad(3.26)$$

Пусть теперь образован базис, для любых двух векторов $\vec{a}, \vec{b}\in\mathscr{R}$ которого справедливо

$$\vec{a}\overset{A}{\otimes}\vec{b}\equiv\frac{1}{2}(\vec{a}\otimes\vec{b}-\vec{b}\otimes\vec{a}).\qquad(3.27)$$

Упражнение 3.9. Доказать, что пространство, порождаемое базисом (3.27), является пространством антисимметричных тензоров

$$\underset{\sim}{A}=a^{ij}\vec{e}_i\overset{A}{\otimes}\vec{e}_j=-a^{ji}\vec{e}_i\overset{A}{\otimes}\vec{e}_j.\qquad(3.28)$$

Упражнеиие 3.10. Проделать все выкладки этого параграфа для случая одноточечных тензоров m-го порядка ($m>2$). $\bullet$

Тензор, получающийся из данного при перестаиовках индексов в базисных полиадах, называется изомером тензора. Например, $\underset{\sim}{\tilde{a}}$ — изомер тензора $\underset{\sim}{a}$.

§ 4. Полилинейные формы

В § 2 мы рассматривали линейные функционалы, действующие в линейном пространстве $\mathscr{R}$. Рассмотрим теперь обобщение линейных функционалов, а имеино полилинейный функционал (или полилинейную форму), которым называется функционал, зависящий от m векторов $\underset{j}{\vec{a}}\in\mathscr{R}_j\,(j=1,\ldots,m)$ и линейный относительно каждого аргумента. Например, для

$$\vec{a}_j = \vec{b}_j + \vec{c}_j;\ \alpha \in \mathcal{K}$$

$$f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_m) = f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{b}_j, \ldots, \vec{a}_m) + \\ + f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{c}_j, \ldots, \vec{a}_m), \tag{4.1}$$

$$f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, (\alpha\vec{a}_j), \ldots, \vec{a}_m) = \alpha f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_m). \tag{4.2}$$

Заметим, что, векторы $\vec{a}$, фигурирующие в формулах (4.1) и (4.2), могут быть выбраны из одного пространства $\mathcal{R}$. В этом случае говорим, что полилинейный функционал задан на $\mathcal{R}$. Другим частным случаем является случай, когда p векторов $\vec{a}_i$ выбираются из пространства $\mathcal{R}$ $(i=1, 2, \ldots, p)$, а остальные q векторов $(q=m-p)$ выбираются из пространства $\mathcal{R}^*$, сопряженного к $\mathcal{R}$:

$$f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p, \overleftarrow{a}_1, \overleftarrow{a}_2, \ldots, \overleftarrow{a}_q). \tag{4.3}$$

Полилинейные функционалы типа (4.3) называют функционалами типа (p, q). В частности, как следует из результатов § 2, функционал типа (1, 0) является линейным функционалом, определенным в пространстве $\mathcal{R}$, т. е. вектором пространства $\mathcal{R}^*$.

Упражнение 4.1. Доказать, что каждому линейному оператору из $\mathcal{R}$ в $\mathcal{R}$ однозначно соответствует билинейный функционал типа (1, 1) и, обратно, каждому билинейному функционалу типа (1, 1) соответствует линейный оператор, действующий из $\mathcal{R}$ в $\mathcal{R}$. ●

Выберем в каждом из пространств $\mathcal{R}_i$ произвольный базис

$$\vec{e}_{1i}, \vec{e}_{2i}, \ldots, \vec{e}_{n_i i}\ (i=1, 2, \ldots, m). \tag{4.4}$$

Каждый вектор $\vec{a}_i \in \mathcal{R}_i$ можно представить в виде

$$\vec{a}_i = a_i^k \vec{e}_{ki}\ (k=1, 2, \ldots, n_i),\ \langle i=1, 2, \ldots, m\rangle. \tag{4.5}$$

Тогда в силу свойств (4.1) и (4.2) полилинейный (m-линейный) функционал f можно представить в виде

$$f(\underset{1}{\vec{a}}, \underset{2}{\vec{a}}, \ldots, \underset{m}{\vec{a}}) = \underset{1}{a}^{k_1}\underset{2}{a}^{k_2} \ldots \underset{m}{a}^{k_m} f(\underset{1}{\vec{e}}_{k_1}, \underset{2}{\vec{e}}_{k_2}, \ldots, \underset{m}{\vec{e}}_{k_m})$$

$$(k_i = 1, 2, \ldots, n_i). \tag{4.6}$$

Числа, являющиеся значениями полилинейного функционала f на векторах базиса (4.4), обозначим через

$$x_{k_1k_2\ldots k_m} = f(\underset{1}{\vec{e}}_{k_1}; \underset{2}{\vec{e}}_{k_2}, \ldots, \underset{m}{\vec{e}}_{k_m}). \tag{4.7}$$

Упражиеиие 4.2. Показать, что при переходе к другому базису (4.4)

$$\underset{i}{\vec{e}}_{k'} = \underset{i}{B}_{k'}{}^{k} \underset{i}{\vec{e}}_k \; (k', k = 1, 2, \ldots, n_i), \; \langle i = 1, 2, \ldots, m \rangle \tag{4.8}$$

система величин (4.7), определяющая значения полилинейного функционала f иа новых векторах базиса, выражается через значеиия этого полилинейного функционала на старых векторах базиса по закону

$$x_{k'_1k'_2\ldots k'_m} = x_{k_1k_2\ldots k_m} \underset{1}{B}{}^{k_1}_{k'_1} \underset{2}{B}{}^{k_2}_{k'_2} \ldots \underset{m}{B}{}^{k_m}_{k'_m}. \bullet \tag{4.9}$$

Таким образом, всякий полилинейный функционал f (4.6) может быть представлеи по формуле

$$f(\underset{1}{\vec{a}}, \underset{2}{\vec{a}}, \ldots, \underset{m}{\vec{a}}) = \underset{1}{a}^{k_1}\underset{2}{a}^{k_2} \ldots \underset{m}{a}^{k_m} x_{k_1k_2\ldots k_m}, \tag{4.10}$$

где $\underset{i}{a}^{k_i}$ — компоненты вектора $\underset{i}{\vec{a}}$ в базисе (4.4), а $x_{k_1k_2\ldots k_m}$ — некоторые числа, определяющие полилинейный функционал f в базисе (4.4), выбранном в каждом $\mathcal{R}_i$, т. е. правая часть (4.10) представляет собой значение полилинейного функционала на векторах $\underset{1}{\vec{a}}, \underset{2}{\vec{a}}, \ldots, \underset{m}{\vec{a}}$.

В частности, если полилинейный (m-лииейный) функциоиал задан на $\mathcal{R}$, то значения такого функционала можно записать также в виде (4.10), при этом $\underset{i}{a}^{k_i}$ — компоненты вектора $\underset{i}{\vec{a}}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, общем для всех $\underset{i}{\vec{a}}$.

Выберем в каждом из пространств $\mathfrak{R}_i^*$ базис

$$\underset{i}{\overleftarrow{e}^1}, \underset{i}{\overleftarrow{e}^2}, \ldots, \underset{i}{\overleftarrow{e}^{n_i}} \ \langle i=1, 2, \ldots, m\rangle. \tag{4.11}$$

Каждый вектор $\underset{i}{\overleftarrow{a}} \in \mathfrak{R}_i^*$ запишем в виде

$$\underset{i}{\overleftarrow{a}} = \underset{i}{a_k} \underset{i}{\overleftarrow{e}^k} (k=1, 2, \ldots, n_i) \ \langle i=1, 2, \ldots, m\rangle. \tag{4.12}$$

Опять-таки в силу свойств (4.1) и (4.2) полилинейный функционал f представим следующим образом:

$$f(\underset{1}{\overleftarrow{a}}, \underset{2}{\overleftarrow{a}}, \ldots, \underset{m}{\overleftarrow{a}}) = \underset{1}{a_{k_1}} \underset{2}{a_{k_2}} \ldots \underset{m}{a_{k_m}} f(\underset{1}{\overleftarrow{e}^{k_1}}, \underset{2}{\overleftarrow{e}^{k_2}}, \ldots, \underset{m}{\overleftarrow{e}^{k_m}})$$

$$(k_i = 1, 2, \ldots, n_i). \tag{4.13}$$

Числа, являющиеся значениями полилинейного функционала f на векторах базиса (4.11), обозначим через

$$x^{k_1 k_2 \ldots k_m} = f(\underset{1}{\overleftarrow{e}^{k_1}}, \underset{2}{\overleftarrow{e}^{k_2}}, \ldots, \underset{m}{\overleftarrow{e}^{k_m}}). \tag{4.14}$$

Упражнение 4.3. Показать, что при переходе к другому базису (4.11)

$$\underset{\alpha}{\overleftarrow{e}^{i'}} = \underset{\alpha}{A^{i'}}{}_i \underset{\alpha}{\overleftarrow{e}^i} (i, i' = 1, 2, \ldots, n_\alpha), \ \langle \alpha = 1, 2, \ldots, m\rangle \tag{4.15}$$

система величин (4.14), определяющая значения полилинейного функционала f на новых векторах базиса (4.15), выражается через значения этого полилинейного функционала на старых векторах базиса (4.11) по закону

$$x^{i_1' i_2' \ldots i_m'} = x^{i_1 i_2 \ldots i_m} \underset{1}{A^{i_1'}}{}_{i_1} \underset{2}{A^{i_2'}}{}_{i_2} \ldots \underset{m}{A^{i_m'}}{}_{i_m}. \ \bullet \tag{4.16}$$

Используем теперь определение многоточечного тензора, данное в § 3. Сравнивая выражения (4.16) с (3.10), а (4.9) с (3.11), заключаем, что величины (4.7) являются ковариантными компонентами, а величины (4.14) — контравариантными компонентами m-точечного тензора. Тем самым каждому полилинейному (m-линейному) функционалу (4.10) или (4.13) соответствует многоточечный тензор m-го порядка

$$\underset{\sim}{F} = x^{i_1 i_2 \dots i_m} \underset{1}{\vec{e}_{i_1}} \otimes \underset{2}{\vec{e}_{i_2}} \otimes \dots \otimes \underset{m}{\vec{e}_{i_m}} =$$

$$= x_{i_1 i_2 \dots i_m} \underset{1}{\overleftarrow{e}^{i_1}} \otimes \underset{2}{\overleftarrow{e}^{i_2}} \otimes \dots \otimes \underset{m}{\overleftarrow{e}^{i_m}}. \qquad (4.17)$$

В частности, каждому полилинейному (m-линейному) функционалу, заданному на $\mathcal{R}$, соответствует тензор (одноточечный) m-го порядка

$$\underset{\sim}{F} = x^{i_1 i_2 \dots i_m} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}^{i} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_m} =$$

$$= x_{i_1 i_2 \dots i_m} \overleftarrow{e}^{i_1} \otimes \overleftarrow{e}^{i_2} \otimes \dots \otimes \overleftarrow{e}^{i_m}. \qquad (4.18)$$

В евклидовом пространстве $\mathcal{R}$ всякий тензор $\underset{\sim}{T}$ m-го порядка может быть скалярно умножен на вектор $\vec{a}$. При этом под $[i]$-скалярным произведением тензора $\underset{\sim}{T}$ m-го порядка на вектор $\vec{a}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ будем понимать тензор $(m-1)$-го порядка $\underset{\sim}{A}$, образованный из тензора $\underset{\sim}{T}$ скалярным произведением i-го вектора базисной полиады на вектор $\vec{a}$. Например, [2]-скалярным произведением тензора $\underset{\sim}{T}$

$$T = t^{ijk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \qquad (4.19)$$

на вектор $\vec{a} = a^l \vec{e}_l$ называется тензор $\underset{\sim}{A}$

$$\underset{\sim}{A} = [2]\, \underset{\sim}{T} \cdot \vec{a} = t^{ijk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k (\vec{e}_j \cdot \vec{a}) = t^{ijk} q_{jl} a^l \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k. \qquad (4.20)$$

Аналогично под $[i, j]$-скалярным произведением тензора m-го порядка $\underset{\sim}{T}$ на векторы $(\vec{a}, \vec{b})$ $(1 \leqslant i < j \leqslant m)$ понимаем тензор $(m-2)$-го порядка $\underset{\sim}{A}$, полученный из тензора $\underset{\sim}{T}$ скалярным произведением i-го вектора базисной полиады на вектор $\vec{a}$ и j-го вектора полиады на вектор $\vec{b}$. Под полным скалярным произведением тензора m-го порядка $\underset{\sim}{T}$ на совокупность векторов $(\underset{1}{\vec{a}}, \underset{2}{\vec{a}}, \dots, \underset{m}{\vec{a}})$ понимается скаляр, образованный из тензора $\underset{\sim}{T}$ скалярным умножением каждого i-го вектора полиады на вектор $\underset{i}{\vec{a}}$:

$$A = \underset{\sim}{T} \cdot (\underset{1}{\vec{a}}, \underset{2}{\vec{a}}, \ldots, \underset{m}{\vec{a}}) = t^{i_1 i_2 \ldots i_m} \underset{1}{a}_{i_1} \underset{2}{a}_{i_2} \ldots \underset{m}{a}_{i_m}. \quad (4.21)$$

Упражнение 4.4. *Доказать обобщенную теорему Рисса: всякий полилинейный (m-линейный) функционал в n-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{R}$ можно представить в виде полного скалярного произведения*

$$f(\underset{1}{\vec{a}}, \ldots, \underset{m}{\vec{a}}) = \underset{\sim}{T} \cdot (\underset{1}{\vec{a}}, \ldots, \underset{m}{\vec{a}}), \quad (4.22)$$

где $\underset{\sim}{T}$ — фиксированный тензор m-го порядка, однозначно определяемый полилинейным функционалом f. И обратно, каждый тензор $\underset{\sim}{T}$ определяет полилинейный функционал.

Упражнение 4.5. Доказать, что можно установить взаимно однозначное соответствие между полилинейными (m-линейными) функционалами на $\mathscr{R}$ и линейными функционалами на пространстве τ, являющемся m-кратным тензорным произведением пространств $\mathscr{R}$ ($\tau = \mathscr{R} \otimes \ldots \otimes \mathscr{R}$).

§ 5. Внешние формы

Рассмотрим подпространство $\mathscr{A}$ антисимметричных тензоров 2-го порядка пространства $\mathscr{R}^* \otimes \mathscr{R}^*$ (упр. 3.9). В этом пространстве произвольно выбранные базисные диады $\overleftarrow{e}^i \overset{A}{\otimes} \overleftarrow{e}^j$ обладают свойством

$$\overleftarrow{e}^i \overset{A}{\otimes} \overleftarrow{e}^j = -\overleftarrow{e}^j \overset{A}{\otimes} \overleftarrow{e}^i. \quad (5.1)$$

Элементы $\underset{\sim}{A}$ этого пространства $\mathscr{A}$ назовем *внешними* формами 2-го порядка (степени), а сами базисные диады (5.1) обозначим следующим образом:

$$\overleftarrow{e}^i \overset{A}{\otimes} \overleftarrow{e}^j \equiv \overleftarrow{e}^i \wedge \overleftarrow{e}^j.$$

Очевидно,

$$\underset{\sim}{A} = a_{ij} \overleftarrow{e}^i \wedge \overleftarrow{e}^j = -a_{ji} \overleftarrow{e}^i \wedge \overleftarrow{e}^j. \quad (5.2)$$

Так как внешние формы 2-го порядка являются тензорами, то они обладают всеми свойствами тензоров и дополнительно свойством (5.1) (или (5.2)).

Аналогично рассмотрим подпространство Q_0 прост-