$$A = \underset{\sim}{T} \cdot (\overset{\rightarrow}{\underset{1}{a}}, \overset{\rightarrow}{\underset{2}{a}}, \ldots, \overset{\rightarrow}{\underset{m}{a}}) = t^{i_1 i_2 \ldots i_m} \underset{1}{a}_{i_1} \underset{2}{a}_{i_2} \ldots \underset{m}{a}_{i_m}. \quad (4.21)$$

Упражнение 4.4. *Доказать обобщенную теорему Рисса: всякий полилинейный (m-линейный) функционал в n-мерном евклидовом пространстве $\mathfrak{R}$ можно представить в виде полного скалярного произведения*

$$f(\overset{\rightarrow}{\underset{1}{a}}, \ldots, \overset{\rightarrow}{\underset{m}{a}}) = \underset{\sim}{T} \cdot (\overset{\rightarrow}{\underset{1}{a}}, \ldots, \overset{\rightarrow}{\underset{m}{a}}), \quad (4.22)$$

где T — фиксированный тензор m-го порядка, однозначно определяемый полилинейным функционалом f. И обратно, каждый тензор $\underset{\sim}{T}$ определяет полилинейный функционал.

Упражнение 4.5. Доказать, что можно установить взаимно однозначное соответствие между полилинейными (m-линейными) функционалами на $\mathfrak{R}$ и линейными функционалами на пространстве τ, являющемся m-кратным тензорным произведением пространств $\mathfrak{R}$ ($\tau = \mathfrak{R} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{R}$).

§ 5. Внешние формы

Рассмотрим подпространство $\mathcal{A}$ антисимметричных тензоров 2-го порядка пространства $\mathfrak{R}^* \otimes \mathfrak{R}^*$ (упр. 3.9). В этом пространстве произвольно выбранные базисные диады $\overset{\leftarrow}{e^i} \overset{A}{\otimes} \overset{\leftarrow}{e^j}$ обладают свойством

$$\overset{\leftarrow}{e^i} \overset{A}{\otimes} \overset{\leftarrow}{e^j} = -\overset{\leftarrow}{e^j} \overset{A}{\otimes} \overset{\leftarrow}{e^i}. \quad (5.1)$$

Элементы $\underset{\sim}{A}$ этого пространства $\mathcal{A}$ назовем *внешними* формами 2-го порядка (степени), а сами базисные диады (5.1) обозначим следующим образом:

$$\overset{\leftarrow}{e^i} \overset{A}{\otimes} \overset{\leftarrow}{e^j} \equiv \overset{\leftarrow}{e^i} \wedge \overset{\leftarrow}{e^j}.$$

Очевидно,

$$\underset{\sim}{A} = a_{ij} \overset{\leftarrow}{e^i} \wedge \overset{\leftarrow}{e^j} = -a_{ji} \overset{\leftarrow}{e^i} \wedge \overset{\leftarrow}{e^j}. \quad (5.2)$$

Так как внешние формы 2-го порядка являются тензорами, то они обладают всеми свойствами тензоров и дополнительно свойством (5.1) (или (5.2)).

Аналогично рассмотрим подпространство Q_0 пространства Q, образованного m-кратным тензорным произведением n-мерного пространства $\mathcal{R}^*$ на самого себя, т. е.

$$Q=\mathcal{R}^*\otimes\mathcal{R}^*\otimes\ \ldots\ \otimes\mathcal{R}^*. \tag{5.3}$$

При этом считаем, что базисные диады, составленные из любой пары векторов $\mathcal{R}^*$, обладают свойством антикоммутативности (5.1) и записываются в виде (5.2). Элементы $\underset{\sim}{\Phi}$ пространства Q_0 назовем внешними формами m-го порядка (степени)

$$\underset{\sim}{\Phi}=\varphi_{i_1\ldots i_m}\overleftarrow{e}^{i_1}\wedge\overleftarrow{e}^{i_2}\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{e}^{i_m}. \tag{5.4}$$

Назовем внешним умножением (произведением) произвольного числа векторов результат альтернирования тензорного произведения этих векторов (см. (3.24)). Так, внешним умножением двух внешних форм $\underset{\sim}{\Phi}$ и $\underset{\sim}{\Psi}$ m-го и p-го порядка соответственно называется внешняя форма Θ $(m+p)$-го порядка

$$\underset{\sim}{\Theta}=\underset{\sim}{\Phi}\wedge\underset{\sim}{\Psi}=\varphi_{i_1\ldots i_m}\psi_{i_{m+1}\ldots i_{m+p}}\overleftarrow{e}^{i_1}\wedge\overleftarrow{e}^{i_2}\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{e}^{i_{m+p}}. \tag{5.5}$$

Справедливы следующие утверждения.

1°. Внешнее произведение m векторов, среди которых хотя бы два совпадают, равно нулю.

2°. Если $\underset{\sim}{\Phi}$ — внешняя форма p-го порядка, а $\underset{\sim}{\Psi}$ — внешняя форма q-го порядка, то

$$\underset{\sim}{\Phi}\wedge\underset{\sim}{\Psi}=(-1)^{pq}\underset{\sim}{\Psi}\wedge\underset{\sim}{\Phi}. \tag{5.6}$$

3°. При перестановке двух любых векторов, участвующих во внешнем произведении, знак внешнего произведения изменяется на противоположный.

4°. Каждая внешняя форма порядка больше чем n равна нулю (т. е. имеет компоненты, равные нулю).

5°. Число базисных элементов порядка m в n-мерном пространстве равно числу сочетаний из n элементов по m : C_n^m.

Упражнение 5.1. Доказать справедливость высказанных выше утверждений 1°—5°. ●

Существуют различные формы записи внешних форм. Так, кроме записи внешней формы в виде (5.4) в литературе встречается следующая запись:

$$\underset{\sim}{\Phi}=\varphi_{i_1\ldots i_m}\ [\overleftarrow{e}^{i_1}\ \ldots\ \overleftarrow{e}^{i_m}]. \tag{5.7}$$

Рассмотрим для примера внешнюю форму 3-го порядка

$$\underset{\sim}{B} = b_{ijk}\overleftarrow{e}^i \wedge \overleftarrow{e}^j \wedge \overleftarrow{e}^k. \tag{5.8}$$

Пользуясь свойством (5.3), произведем объединение подобных членов в (5.8):

$$\underset{\sim}{B} = b_{123}\overleftarrow{e}^1 \wedge \overleftarrow{e}^2 \wedge \overleftarrow{e}^3 + b_{213}\overleftarrow{e}^2 \wedge \overleftarrow{e}^1 \wedge \overleftarrow{e}^3 + b_{231}\overleftarrow{e}^2 \wedge \overleftarrow{e}^3 \wedge \overleftarrow{e}^1 +$$

$$+ b_{321}\overleftarrow{e}^3 \wedge \overleftarrow{e}^2 \wedge \overleftarrow{e}^1 + b_{312}\overleftarrow{e}^3 \wedge \overleftarrow{e}^1 \wedge \overleftarrow{e}^2 + b_{132}\overleftarrow{e}^1 \wedge \overleftarrow{e}^3 \wedge \overleftarrow{e}^2 =$$

$$= (b_{123} + b_{312} + b_{231} - b_{213} - b_{321} - b_{132})\, \overleftarrow{e}^1 \wedge \overleftarrow{e}^2 \wedge \overleftarrow{e}^3. \tag{5.9}$$

Воспользовавшись операцией альтернирования (см. гл. 1, § 3), запишем (5.9) в виде

$$\underset{\sim}{B} = 3!\, b_{[123]}\, \overleftarrow{e}^1 \wedge \overleftarrow{e}^2 \wedge \overleftarrow{e}^3 = b_{[ijk]}\, \overleftarrow{e}^i \wedge \overleftarrow{e}^j \wedge \overleftarrow{e}^k, \tag{5.10}$$

где $b_{[ijk]}$ — *альтернированный коэффициент* внешней формы $\underset{\sim}{B}$, антисимметричный относительно всех индексов. Таким образом, всякую внешнюю форму (5.7) можно представить с помощью альтернированного коэффициента в виде

$$\underset{\sim}{\Phi} = m!\, \varphi_{[12\ldots m]}\, \overleftarrow{e}^1 \wedge \overleftarrow{e}^2 \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{e}^m =$$

$$= \varphi_{[i_1 \ldots i_m]}\, \overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{e}^{i_m}. \tag{5.11}$$

Назовем внешними формами нулевого порядка элементы произвольного поля чисел $\mathscr{K}$ (скаляров), а внешними формами первого порядка — векторы пространства $\mathfrak{R}$. Так как множество линейных функционалов (линейных форм) векторного пространства $\mathfrak{R}^*$ образует векторное пространство $\mathfrak{R}$ (см. § 2), то внешние формы первого порядка называют линейными формами. Систему гиперкомплексных единиц *алгебры Грассмана* образуют единицы нулевого порядка — числа поля $\mathscr{K}$, единицы первого порядка — линейные формы, единицы второго порядка — внешние формы второго порядка и т. д. В качестве элементов алгебры Грассмана принимаются формально построенные полиномы вида

$$a + a_i\overleftarrow{e}^i + a_{i_1 i_2}\overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \overleftarrow{e}^{i_2} + \ldots + a_{i_1 \ldots i_m}\, \overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{e}^{i_m}. \tag{5.12}$$

Над этими полиномами устанавливаются кольцевые операции сложения (почленного) и внешнего умножения (прочленное с сохранением порядка членов).

Упражнение 5.2. Доказать, что алгебра Грассмана конечна (т. е. содержит конечное число элементов).

Упражнение 5.3. Доказать, что алгебра Грассмана содержит 2^n базисиых элемента, где n — размерность векторного пространства $\mathcal{R}^*$.

Упражнение 5.4. Пусть имеются три внешние формы $\underset{\sim}{\Phi}$, $\underset{\sim}{\Theta}$, $\underset{\sim}{\Psi}$ соответственно порядка p, q, r. Доказать, что

$$\underset{\sim}{\Phi}\wedge\underset{\sim}{\Theta}\wedge\underset{\sim}{\Psi}=(-1)^{pr+qr+qp}\underset{\sim}{\Psi}\wedge\underset{\sim}{\Theta}\wedge\underset{\sim}{\Phi}. \quad ● \tag{5.13}$$

Рассмотрим внешнюю форму $\underset{\sim}{A}$, образоваииую внешним произведением двух векторов $\overleftarrow{x}$ и $\overleftarrow{y}$:

$$\underset{\sim}{A}=\overleftarrow{x}\wedge\overleftarrow{y}=x_iy_j\overleftarrow{e^i}\wedge\overleftarrow{e^j}=x_{[i}y_{j]}\overleftarrow{e^i}\wedge\overleftarrow{e^j}. \tag{5.14}$$

Значением внешней формы $\underset{\sim}{A}$ на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является, очевидно, значение билинейного функционала f, соответствующего $\underset{\sim}{A}$ на этих векторах (см. § 4):

$$f(\vec{a},\ \vec{b})=a^ib^jf(\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j)=a^{[i}b^{j]}x_{[i}y_{j]}, \tag{5.15}$$

но

$$a^ib^jx_{[i}y_{j]}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a^i x_i & b^i x_i \\ a^j y_j & b^j y_j \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \overleftarrow{x}(\vec{a}) & \overleftarrow{x}(\vec{b}) \\ \overleftarrow{y}(\vec{a}) & \overleftarrow{y}(\vec{b}) \end{vmatrix}. \tag{5.16}$$

Следовательно, значение внешней формы, составленной из внешнего умножения векторов $\overleftarrow{x}$ и $\overleftarrow{y}$, на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно определителю, составленному из значений векторов $\overleftarrow{x}$ и $\overleftarrow{y}$ на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\underset{\sim}{A}(\vec{a},\vec{b})=\overleftarrow{x}\wedge\overleftarrow{y}(\vec{a}\,\vec{b})=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \overleftarrow{x}(\vec{a}) & \overleftarrow{x}(\vec{b}) \\ \overleftarrow{y}(\vec{a}) & \overleftarrow{y}(\vec{b}) \end{vmatrix}. \tag{5.17}$$

Аналогнчно, значение любой внешней формы

$$\underset{\sim}{\Phi}=\overleftarrow{x}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{x}_{i_m} \tag{5.18}$$

на вектроах $\vec{a}_{i_1}, \ldots, \vec{a}_{i_m}$ имеет вид

$$a^{[i_1}a^{i_2}\ldots a^{i_m]}x_{[i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m]}=\frac{1}{m!}\begin{vmatrix}\overleftarrow{x}_1(\vec{a}_1)\ldots\overleftarrow{x}_1(\vec{a}_m)\\ \ldots\qquad\ldots\\ \overleftarrow{x}_m(\vec{a}_1)\ldots\overleftarrow{x}_m(\vec{a}_m)\end{vmatrix}. \tag{5.19}$$

Рассмотрим базисные кососимметричные полиады в пространстве Q (5.3), образованном n-мерным векторным пространством $\mathcal{R}^*$:

$$\overleftarrow{e}^1\wedge\overleftarrow{e}^2\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{e}^n. \tag{5.20}$$

Пусть теперь в $\mathcal{R}^*$ выбран другой базис $\overleftarrow{e}^{i'}$, причем

$$\overleftarrow{e}^{i'}=A^{i'}_{i}\overleftarrow{e}^{i}\ (i,i'=1,2,\ldots,n). \tag{5.21}$$

Тогда

$$\overleftarrow{e}^{i'_1}\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{e}^{i'_n}=A^{i'_1}_{i_1}\ldots A^{i'_n}_{i_n}\overleftarrow{e}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{e}^{i_n}=$$

$$=A^{i'_1}_{[i_1}A^{i'_2}_{i_2}\ldots A^{i'_n}_{i_n]}\overleftarrow{e}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{e}^{i_n}, \tag{5.22}$$

но

$$A^{i'_1}_{[i_1}\ldots A^{i'_n}_{i_n]}=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix}A^{i'_1}_{i_1}\ldots A^{i'_1}_{i_n}\\ \cdots\cdots\\ A^{i'_n}_{i_1}\ldots A^{i'_n}_{i_n}\end{vmatrix}. \tag{5.23}$$

Упражнение 5.5. Доказать, что значением внешней формы, составленной из внешнего умножения векторов $\vec{e}^{i'}$ $(i'=1,\ldots,n)$ на векторах $\overleftarrow{e}_i$, является определитель матрицы $A^{i_1}_{i'}$ (5.21).

Следовательно, при переходе от одного базиса к другому (5.21) в $\mathcal{R}^*$ базисные полиады пространства Q преобразуются с помощью определителя матрицы перехода (5.21). ●

Назовем ε — объектом совокупность величин

$$\varepsilon^{i_1i_2\ldots i_m};\ \ \varepsilon_{i_1i_2\ldots i_m}\ \langle i_1,i_2\ldots,i_m=1,2,\ldots,n\rangle \tag{5.24}$$

со следующим свойством: $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ (или $\epsilon^{i_1 \ldots i_m}$) равны нулю, если хотя бы два индекса совпадают; равны $+1$, если все индексы различны и образуют четную подстановку; равны -1, если все индексы различны и образуют нечетную подстановку.

В силу свойства косой симметрии полиад (5.20) имеем тождество

$$\overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{e}^{i_m} = \epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_m} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} \overleftarrow{e}^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{e}^{\alpha_m}, \quad (5.25)$$

или по-другому

$$\overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{e}^{i_m} = \frac{1}{m!} \epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_m} \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_m} \overleftarrow{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{e}^{j_m}. \quad (5.26)$$

С другой стороны, ввиду очевидного тождества

$$\overleftarrow{e}^{i} = \delta^{i}{}_{j} \overleftarrow{e}^{j} \quad (5.27)$$

согласио (5.22) имеем

$$\overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{e}^{i_m} = \delta^{i_1}{}_{[j_1} \ldots \delta^{i_m}{}_{j_m]} \overleftarrow{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{e}^{j_m}. \quad (5.28)$$

Сравнивая (5.26) и (5.28) и учитывая формулу (5.23), получим

$$\epsilon^{i_1 \ldots i_m} \epsilon_{j_1 \ldots j_m} = \begin{vmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \ldots & \delta^{i_1}_{j_m} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \delta^{i_m}_{j_1} & \ldots & \delta^{i_m}_{j_m} \end{vmatrix} \equiv \delta^{i_1 \ldots i_m}_{j_1 \ldots j_m}. \quad (5.29)$$

Упражнение 5.6. Доказать, что

$$\delta^{i_1 \ldots i_m}_{j_1 \ldots j_m} \equiv 0 \text{ при } m > n. \quad (5.30)$$

Упражнение 5.7. Доказать, что при $m \leqslant n$

$$\delta^{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_m}_{j_1 j_2 \ldots j_{m-1} i_m} = (n - m + 1)\, \delta^{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}}_{j_1 j_2 \ldots j_{m-1}}$$

$$(i_m = 1, 2, \ldots, n). \quad (5.31)$$

Упражнение 5.8. Доказать, что при $m \leqslant n$

$$\delta^{i_1 i_2 \ldots i_m}_{i_1 i_2 \ldots i_m} = n(n-1) \ldots (n - m + 1)$$

$$(i_1, i_2, \ldots i_m = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.32}$$

откуда, в частности, следует

$$\delta^{i_1 \ldots i_n}_{i_1 \ldots i_n} = n! \quad \bullet \tag{5.33}$$

Рассмотрим теперь m $(m \leqslant n)$ произвольных векторов $\overleftarrow{a}^k$:

$$\overleftarrow{a}^k = a_i{}^k \overleftarrow{e}^i \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots, m). \tag{5.34}$$

Образуем внешнее произведение этих векторов. Тогда

$$\underset{\sim}{A} = \overleftarrow{a}^1 \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{a}^m = a^1_{i_1} a^2_{i_2} \ldots a^m_{i_m} \overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \overleftarrow{e}^{i_2} \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge \overleftarrow{e}^{i_m} = a^1_{[i_1} \ldots a^m_{i_m]} \overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{e}^{i_m}. \tag{5.35}$$

Альтернированный коэффициент внешней формы A представляет собой определитель

$$a^1_{[i_1} \ldots a^m_{i_m]} = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} a^1_{i_1} \ldots a^1_{i_m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a^m_{i_1} \ldots a^m_{i_m} \end{vmatrix}. \tag{5.36}$$

При этом элементы этого определителя взяты из матрицы

$$\begin{pmatrix} a^1_{i_1} \ldots a^1_{i_m} \ldots a^1_{i_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a^m_{i_1} \ldots a^m_{i_m} \ldots a^m_{i_n} \end{pmatrix}, \tag{5.37}$$

т. е. из матрицы (5.37) выбрано m столбцов.

Покажем, что справедлива

Теорема. *Необходимым и достаточным условием линейной зависимости векторов является равенство нулю их внешнего произведения.*

В самом деле, пусть векторы $\vec{a}^k$ (5.34) линейно зависимы. Тогда матрица (5.37) является вырожденной, так как все определители порядка m равны нулю. Следовательно, внешнее произведение (5.35) равно нулю.

Пусть, обратно, внешнее произведение векторов (5.34) равно нулю

$$\overleftarrow{a}^1 \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{a}_m = 0. \qquad (5.38)$$

Тогда коэффициенты в (5.35) после приведения подобных членов должны равняться нулю. Следовательно, все определители m-го порядка равны нулю, а значит, матрица (5.37) — вырожденная и векторы (5.34) линейно зависимы.

Из этой теоремы вытекает

следствие:

необходимым и достаточным условием линейной независимости векторов является отличие от нуля их внешнего произведения.

Упражнение 5.9. Доказать, что всякую систему линейно независимых векторов (5.34) можно дополнить до базиса, т. е. если имеется m линейно независимых векторов $\overleftarrow{a}^1, \ldots, \overleftarrow{a}^m$ и $m<n$, то можно найти $(n-m)$ векторов $\overleftarrow{a}^{m+1}, \ldots, \overleftarrow{a}^n$, таких, что

$$\overleftarrow{a}^1 \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{a}^n \neq 0. \ \bullet \qquad (5.39)$$

Как следует из результатов § 2, множество линейных форм, определенных на векторном пространстве $\mathcal{R}^*$, образует векторное пространство $\mathcal{R}$. Очевидно, что все высказанные утверждения этого параграфа остаются справедливыми, если в качестве исходного векторного пространства выбрать $\mathcal{R}$. Так, например, внешнюю форму m-го порядка $\underset{\sim}{\Phi}$, определенную на $\mathcal{R}$, можно записать в виде

$$\underset{\sim}{\Phi} = \varphi^{i_1 i_2 \ldots i_m} \vec{e}_{i_1} \wedge \vec{e}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_m}. \qquad (5.40)$$

Упражнение 5.10. Доказать следующее утверждение (лемма Картана).

Пусть $\vec{e}^1, \ldots, \vec{e}^m$ — линейно независимые векторы. Линейные формы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ удовлетворяют уравнению

$$\vec{a}_i \wedge \vec{e}^i = 0 \qquad (5.41)$$

тогда и только тогда, когда они имеют вид

$$\vec{a}_i = a_{ij} \overleftarrow{e}^j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (5.42)$$

причем коэффициенты a_{ij} удовлетворяют условиям

$$a_{ij} = a_{ji}. \qquad (5.43)$$