§ 6. Дифференциальное кольцо Картана

В предыдущем параграфе при построении Грассмановой алгебры использовалось кольцо (поле) коэффициентов $\mathscr{K}$ (внешние формы нулевого порядка). Рассмотрим теперь в качестве кольца коэффициентов функции n переменных

$$a(x^1, x^2, \ldots, x^n). \qquad (6.1)$$

Эти функции будем считать в некоторой n-мерной области принадлежащими классу C^q $(q \geqslant 1)$, т. е. q раз непрерывно дифференцируемыми, а следовательно, обладающими непрерывными частными производными порядка q включительно.

В качестве базисных элементов выберем дифференциалы независимых переменных

$$dx^1, dx^2, \ldots, dx^n \qquad (6.2)$$

и будем смотреть на них как на абстрактные единицы. Всякую внешнюю форму, построенную на этих единицах, например

$$\omega = a_{i_1 \ldots i_m}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}, \qquad (6.3)$$

назовем *внешней дифференциальной формой* m-го порядка. Очевидно, внешние дифференциальные формы обладают всеми свойствами внешних форм и потому для них справедливы все утверждения, высказанные в предыдущем параграфе. Грассманова алгебра, построенная на базе внешних дифференциальных форм, носит название дифференциального кольца Картана.

В этом кольце введем операцию *внешнего дифференцирования* по следующим правилам.

1°. Внешний дифференциал от функции (6.1) определяется как обычный дифференциал этой функции

$$\mathscr{T}a \equiv da = \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx^i \; (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (6.4)$$

2°. Внешний дифференциал от внешней дифференциальной формы (6.3) определяется так:

$$\mathscr{D}\omega \equiv da_{i_1 \ldots i_m} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m} =$$

$$= \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}. \qquad (6.5)$$

Таким образом, операция внешнего дифференцирования увеличивает порядок внешией дифференциальной формы на единицу.

Легко установить основные свойства внешнего дифференцирования.

1°. Внешний дифференциал алгебраической суммы двух внешних дифференциальных форм равен алгебраической сумме внешних дифференциалов этих форм

$$\mathscr{D}(\omega \pm \theta) = \mathscr{D}\omega \pm \mathscr{D}\theta, \tag{6.6}$$

где форма ω имеет вид (6.3), а

$$\theta = b_{i_1 \ldots i_m}(x^1, \ldots, x^m)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}. \tag{6.7}$$

В самом деле, из (6.3) и (6.7) следует, что

$$\omega \pm \theta = (a_{i_1 \ldots i_m} \pm b_{i_1 \ldots i_m})\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}, \tag{6.8}$$

а из правила 1° внешнего дифференцирования —

$$\mathscr{D}(\omega \pm \theta) = (da_{i_1 \ldots i_m} + db_{i_1 \ldots i_m}) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}. \tag{6.9}$$

Отсюда и следует форма (6.6).

2°. Пусть внешняя дифференциальная форма ω имеет порядок m (6.3). Тогда внешний дифференциал от внешнего произведения формы ω на некоторую другую φ подсчитывается по формуле

$$\mathscr{D}(\omega \wedge \varphi) = \mathscr{D}\omega \wedge \varphi + (-1)^m \omega \wedge \mathscr{D}\varphi. \tag{6.10}$$

В самом деле, пусть для определенности внешняя дифференциальная форма φ имеет порядок q

$$\varphi = c_{j_1 \ldots j_q}\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}. \tag{6.11}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}(a_{i_1 \ldots i_m} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m} \wedge c_{j_1 \ldots j_q} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} = \\
&= [(da_{i_1 \ldots i_m} c_{j_1 \ldots j_q} + a_{i_1 \ldots i_m} dc_{j_1 \ldots j_q}) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m} \wedge \\
&\quad \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}] = da_{i_1 \ldots i_m} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m} \wedge \\
&\quad \wedge c_{j_1 \ldots j_q} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} + (-1)^m a_{i_1 \ldots i_m} dx^{i_1} \wedge \ldots \\
&\quad \ldots \wedge dx^{i_m} \wedge dc_{j_1 \ldots j_q} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

3°. Второй внешний дифференциал от внешней дифференциальной формы тождественно равен нулю (теорема Пуанкаре).

$$\mathscr{D}\mathscr{D}\omega \equiv 0. \tag{6.13}$$

Пусть ω имеет вид (6.3). Тогда ее внешний дифференциал подсчитывается по формуле (6.5). Дифференцируем выражение (6.5) внешним образом:

$$\mathscr{D}\mathscr{D}\omega = \frac{\partial^2 a_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x^j \partial x^k} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}. \tag{6.14}$$

В силу предполагаемой гладкости функций (6.1)

$$\frac{\partial^2 a_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 a_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x^k \partial x^j}. \tag{6.15}$$

Однако внешняя форма $dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \ldots \wedge dx^{i_m}$ кососимметрична по индексам k и j. Отсюда следует (6.13).

Упражнение 6.1. Доказать, что если внешний дифференциал некоторой внешней дифференциальной формы ω равен нулю, то форма ω сама является внешним дифференциалом другой внешней дифференциальной формы.

Упражнение 6.2. Пусть задано невырожденное преобразование

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n) \; (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.16}$$

Доказать, что базисные внешние формы

$$dx^{i'_1} \wedge dx^{i'_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i'_n} \tag{6.17}$$

преобразуются из старых базисных внешних форм

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n} \tag{6.18}$$

с помощью якобиана преобразования (6.16)

$$dx^{1'} \wedge \ldots \wedge dx^{n'} = \det \left| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right| dx^1 \wedge \ldots dx^n. \; \bullet$$

Дифференциалы независимых переменных мы рассматриваем как функции независимых переменных

$$dx^i = \xi^i(x^1, \ldots, x^n). \tag{6.19}$$

Это означает, что мы рассматриваем векторные и тензорные поля, определенные в некоторой точке арифметического пространства с координатами $x^1, \ldots$ $\ldots, x^n$. Точнее говоря, мы имеем дело с многообразием, строгое определение которого будет дано позже.

Введем m символов дифференцирования

$$\underset{1}{d}, \ldots, \underset{m}{d}. \tag{6.20}$$

Каждый из этих символов определяет направление смещения. Условимся, что два символа дифференцирования перестановочны

$$\underset{\alpha\beta}{dd}x^k = \underset{\beta\alpha}{dd}x^k. \tag{6.21}$$

Тогда дифференциал функции (6.1) имеет вид

$$\underset{\alpha}{d}a = \frac{\partial a}{\partial x^k}\underset{\alpha}{d}x^k. \tag{6.22}$$

Рассмотрим выражение $\underset{\alpha}{d}\,\underset{\beta}{d}a(x^1, \ldots, x^k)$. Очевидно,

$$\underset{\alpha}{d}\,\underset{\beta}{d}a = \underset{\alpha}{d}\left(\frac{\partial a}{\partial x^k}\underset{\beta}{d}x^k\right) = \frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^l}\underset{\alpha}{d}x^k\underset{\beta}{d}x^l + \\ + \frac{\partial a}{\partial x^k}\underset{\alpha}{d}\,\underset{\beta}{d}x^k. \tag{6.23}$$

Отсюда видно, что если символы дифференцирования (6.21) перестановочны для независимых переменных (6.19), то они перестановочны и для функций.

Упражнение 6.3. Показать, что свойство перестановочности для символов дифференцирования не зависит от выбора независимых переменных. ●

Значением внешнего произведения

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m} \tag{6.24}$$

на дифференциалах

$$\underset{1}{d}x^i, \underset{2}{d}x^i, \ldots, \underset{m}{d}x^i \tag{6.25}$$

естественно назвать выражение (см. упр. 5.5)

$$\underset{[1}{d}x^{i_1} \ldots \underset{m]}{d}x^{i_m} = \frac{1}{m!}\begin{vmatrix} \underset{1}{d}x^{i_1} & \ldots & \underset{1}{d}x^{i_m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \underset{m}{d}x^{i_1} & \ldots & \underset{m}{d}x^{i_m} \end{vmatrix}, \tag{6.26}$$

а значением внешней дифференциальной формы ω (6.3) на дифференциалах (6.25) —

$$\omega(\underset{1}{d}, \ldots, \underset{m}{d}) = a_{i_1 \ldots i_m} \underset{[1}{d}x^{i_1} \ldots \underset{m]}{d}x^{i_m}. \tag{6.27}$$

Вычислим значение внешней дифференциальной формы (6.5) на дифференциалах (6.25)

$$\mathscr{D}\omega(\underset{1}{d}, \ldots, \underset{m}{d}) = \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x^j} \underset{0}{d} x^j \wedge \underset{1}{d} x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underset{m}{d} x^{i_m} =$$

$$= \underset{[0}{d} a_{i_1 \ldots i_m} \underset{1}{d}x^{i_1} \underset{2}{d}x^{i_2} \ldots \underset{m]}{d} x^{i_m} = \underset{[0}{d} (a_{i_1 \ldots i_m} \underset{1}{d}x^{i_1} \ldots \underset{m]}{d}x^{i_m}). \tag{6.28}$$

Отсюда видно, что значение формы $\mathscr{D}\omega$ на дифференциалах (6.25) равно значению формы ω на дифференциалах $\underset{0}{d}, \underset{1}{d}, \ldots, \underset{m}{d}$

$$\mathscr{D}\omega(\underset{1}{d}, \ldots, \underset{m}{d}) = \omega(\underset{0}{d}, \underset{1}{d}, \ldots, \underset{m}{d}) = d\omega(\underset{[0}{d}, \underset{1}{d}, \ldots, \underset{m]}{d}). \tag{6.29}$$

Пример 6.1. Рассмотрим линейную дифференциальную форму

$$\omega = P dx + Q dy. \tag{6.30}$$

Подсчитаем ее внешний дифференциал

$$\mathscr{D}\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx +$$

$$+ \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \tag{6.31}$$

Значением формы (6.30) на дифференциале δ является выражение

$$\omega(\delta) = P\delta x + Q\delta y. \tag{6.32}$$

Из формулы (6.29) имеем

$$\mathscr{D}\omega(\delta) = \omega(\underset{1}{\delta}, \underset{2}{\delta}) = 2\underset{[1}{\delta}\omega(\underset{2]}{\delta}) = \underset{1}{\delta}\omega(\underset{2}{\delta}) - \underset{2}{\delta}\omega(\underset{1}{\delta}) =$$

$$= \underset{1}{\delta}P\underset{2}{\delta}x + \underset{1}{\delta}Q\underset{2}{\delta}y - \underset{2}{\delta}P\underset{1}{\delta}x - \underset{2}{\delta}Q\underset{1}{\delta}y =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(\underset{1}{\delta}x\underset{2}{\delta}y - \underset{2}{\delta}x\underset{1}{\delta}y). \tag{6.33}$$

Упражнение 6.4. Доказать, что внешняя дифференциальная форма равна нулю тогда и только тогда, когда тождественно равно нулю ее значение.

Упражнение 6.5. Доказать, что при значении формы ω, равном нулю, интеграл

$$\int_{M_0}^{M} \omega(d) \tag{6.34}$$

между двумя точками $M_0(x_0^1, \ldots, x_0^m)$ и $M_1(x_1^1, \ldots \ldots, x_1^n)$ не зависит от выбора пути интегрирования. ●

Большое значение имеют внешние дифференциальные формы при изучении многократных интегралов. Ввиду того что замена переменных в интеграле приводит к умножению подынтегральной функции на якобиан матрицы соответствующего преобразования, естественно записывать многократные интегралы в виде

$$\int_{\Omega} a_{i_1 \ldots i_m}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m} = \int_{\Omega} \omega. \tag{6.35}$$

С помощью внешних дифференциальных форм можно доказать

Теорему:

Пусть в n-мерном пространстве задан n-мерный объем V, ограниченный замкнутой поверхностью Σ с выбранной ориентацией. Пусть дана внешняя дифференциальная форма n-го порядка

$$\omega = a_{i_1 \ldots i_n}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}. \tag{6.36}$$

Тогда справедлива формула Стокса

$$\int_{V} \mathscr{D}\omega = \int_{\Sigma} \omega. \tag{6.37}$$

Упражнение 6.6. Убедиться, что из (6.37) следует формула Грина

$$\int_{L} P dx + Q dy = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \tag{6.38}$$

(положив ω по формуле (6.30)).

Упражнение 6.7. Убедиться, что из (6.37) следует формула Остроградского

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial P_2}{\partial y}+\frac{\partial P_3}{\partial z}\right) dxdydz=$$

$$=\iint\limits_\Sigma (P_1 dydz+P_2 dzdx+P_3 dxdy), \tag{6.39}$$

(положив

$$\omega=P_1dx+P_2dy+P_3dz). \quad ● \tag{6.40}$$

С помощью внешнего дифференцирования легко объяснить, почему криволинейные координаты мы снабжаем верхним индексом α^i. Рассмотрим евклидово пространство $\mathscr{R}_n$. Дифференциалы независимых переменных $d\alpha^i$ являются контравариантными компонентами вектора (гл. 1, упр. 2.3). Поэтому по определению

$$d\alpha_i=g_{ij}d\alpha^j \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{6.41}$$

Для того чтобы наряду с системой координат α^i существовала система координат α_i, необходимо, чтобы левая часть (6.41) была полным дифференциалом, т. е. второй внешний дифференциал от α_i по теореме Пуанкаре должен обращаться в нуль

$$dg_{ij}\wedge d\alpha^j=0. \tag{6.42}$$

Отсюда по лемме Картана

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^k}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial\alpha^j} \tag{6.43}$$

или (см. гл. 1, упр. 2.11)

$$\Gamma_{ki,j}=\Gamma_{ji,k}. \tag{6.44}$$

Итак, условия (6.43) или (6.44) — необходимые и достаточные условия существования координат α_i.