ГЛАВА 3

ТЕНЗОРЫ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Формы записи тензоров

Рассмотрим прежде всего тензоры второго ранга в трехмерном евклидовом пространстве $\mathscr{R}_3$, ибо именно такие тензоры чаще всего встречаются в приложениях. Пусть в $\mathscr{R}_3$ выбрана система координат α^i ($i=1, 2, 3$) и построена в каждой точке система базисных векторов $\vec{e}_i$, связанная с этой системой координат (см. § 1 гл. 1). Тогда, вводя фундаментальный тензор

$$g_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j,\quad g^{ij}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}, \tag{1.1}$$

можем построить в каждой точке $\mathscr{R}_3$ взаимный репер

$$\vec{e}^i=g^{ij}\vec{e}_j. \tag{1.2}$$

Если теперь в $\mathscr{R}_3$ задан тензор второго ранга $\underset{\sim}{T}$, то его можно в каждой точке представить одним из следующих способов:

$$T=T^{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j=T_{ij}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j=T_i{}^j\vec{e}^i\otimes\vec{e}_j=$$
$$=T^i{}_j\vec{e}_i\otimes\vec{e}^j. \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что

$$T^{ij}=T_{kl}g^{ik}g^{jl}=T_k{}^jg^{ik}=T^i{}_kg^{kj}. \tag{1.4}$$

Разумеется, что в $\mathscr{R}_3$ можно выбрать в каждой точке произвольный локальный базис $\vec{n}_i$, не связанный с системой координат α^i (неголономный базис, примером которого является базис $\vec{e}^i$). При этом предполагается, что заданы функции $Q_i{}^j(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ перехода $\vec{n}_i$ от некоторого голономного базиса:

$$\vec{n}_i = Q_i{}^j \vec{e}_j. \tag{1.5}$$

Тензор 2-го ранга $\underset{\sim}{T}$ может быть представлен и в этом неголономном базисе

$$\underset{\sim}{T} = t^{ij}\vec{n}_i \otimes \vec{n}_j, \tag{1.6}$$

причем

$$t^{ij} Q_i{}^k Q_j{}^l = T^{kl}. \tag{1.7}$$

Мы уже встречались с операцией скалярного произведения тензора $\underset{\sim}{T}$ на вектор $\vec{a}$, в результате чего получается вектор. Если тензор $\underset{\sim}{T}$ не симметричен, то это скалярное произведение некоммутативно

$$\vec{a} \cdot \underset{\sim}{T} \neq \underset{\sim}{T} \cdot \vec{a}. \tag{1.8}$$

В литературе встречается и такая запись указанного скалярного произведения:

$$\underset{\sim}{T} \dot{\ } \vec{a}; \qquad \underset{\sim}{T}.\vec{a}. \tag{1.9}$$

При этом первое выражение в (1.9) означает, что вектор $\vec{a}$ умножается скалярно на первый вектор базисной диады тензора $\underset{\sim}{T}$, а второе — что вектор $\vec{a}$ умножается на второй вектор диады. В такой записи полное скалярное произведение тензоров $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{P}$ имеет вид

$$\underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{P} = t^{ij} p_{ij}. \tag{1.10}$$

При этом верхний значок скалярного умножения указывает на то, что умножаются первые векторы диад тензоров $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{P}$, а нижний — что умножаются вторые векторы этих диад. Точно так же запись

$$\underset{\sim}{T} \underset{\cdot}{\otimes} \underset{\sim}{P} \tag{1.11}$$

означает, что первые векторы диад тензоров $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{P}$ умножаются тензорно, а вторые — скалярно.

В результате умножения (1.11) получится тензор $\underset{\sim}{S}$:

$$s^{ij} = t^i{}_k p^{jk}. \tag{1.12}$$

Для того чтобы записать скалярное произведение двух тензоров $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{P}$, в котором участвует первый вектор диады $\underset{\sim}{P}$ и второй вектор диады $\underset{\sim}{T}$, нужно сначала транспонировать тензор $\underset{\sim}{T}$, а затем воспользоваться записью (1.9): $\tilde{\underset{\sim}{T}} \dot{\ } \underset{\sim}{P}$. Знак тензорного умножения при этом часто опускают:

$$\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{P}=t^{ik}\vec{e_i}\vec{e_k}\cdot p^{jl}\vec{e_j}\vec{e_l}=t^i{}_k p^{jk}\vec{e_i}\vec{e_j}. \qquad (1.13)$$

Заметим, что записью (1.8) можно воспользоваться, чтобы одному вектору $\vec{a}$ поставить в соответствие другой вектор $\vec{b}$:

$$\vec{b}=\underset{\sim}{T}.\vec{a}. \qquad (1.14)$$

Тем самым *тензор второго ранга* $\underset{\sim}{T}$ (1.3) можно рассматривать как преобразование вектора в вектор. Это третье определение тензора (считая первым определение с помощью преобразования его компонент (3.14) главы 1, а вторым «бескоординатное» определение, данное в § 3 гл. 2).

Заметим также, что запись (1.14) носит инвариантный характер и не зависит от координат. В ней тензор $\underset{\sim}{T}$ — не матрица его компонент, как было в записи (5.2) гл. 1, а инвариантный объект, не связанный с выбором того или иного базиса.

Поэтому такая запись, так же как и (1.8), (1.9), (1.11), называется *безындексной записью.* При такой форме записи не нужно обращаться к выбору системы координат, что и определяет ее инвариантный характер.

Замечание. В дифференциальной геометрии построение уравнения структуры в методе подвижного репера заключается в следующем. В произвольной точке M пространства $\mathscr{R}_3$ выбирается репер $\vec{n_i}$ (тройка некомпланарных векторов). Определяется инфинитезимально близкий к этому реперу трехгранник приращением радиус-вектора вершины $d\vec{r}$ и векторов репера $d\vec{n_i}$.

Таким образом, имеем систему уравнений

$$d\vec{r}=\omega^i\vec{n_i};\quad d\vec{n_i}=\omega_i{}^j\vec{n_j}. \qquad (1.15)$$

В частности, для голономного репера, связанного с системой координат α^i,

$$d\vec{r}=\vec{e_i}d\alpha^i;\quad d\vec{e_i}=\Gamma^j{}_{ik}d\alpha^k\vec{e_j}. \qquad (1.16)$$

Пусть теперь справедливы формулы (1.5) связи неголономного репера $\vec{n_i}$ с голономным $\vec{e_i}$. Подставляя (1.5) в (1.15) и сравнивая с (1.16), получим

$$\begin{aligned} d\alpha^j&=\omega^iQ_i{}^j;\\ dQ_i{}^k&=\omega_i{}^jQ_j{}^k-Q_i{}^nQ_j{}^m\Gamma^k_{nm}\omega^j. \end{aligned} \qquad (1.17)$$

Если система координат α^i является прямоугольной декартовой, то

$$d\alpha^j=\omega^iQ_i{}^j;\quad dQ_i{}^k=\omega_i{}^jQ_j{}^k. \qquad (1.18)$$

Пусть дан тензор $\underset{\sim}{T}$. Для него справедливы формулы (1.7), причем $T^{ij}=\mathrm{const}$. Дифференцируя выражение (1.7), получим уравнение

$$dT^{ij}+\omega_k{}^iT^{kj}+\omega_k{}^jT^{ik}=0, \qquad (1.19)$$

которое носит название структурного уравнения тензора.

Упражнение 1.1. Доказать, что для матрицы $P_i{}^j$, обратной к $Q_i{}^j$, справедливо уравнение

$$dP_i{}^j=-P_i{}^m\omega_m{}^j. \qquad (1.20)$$

Упражнение 1.2. Вывести структурные уравнения

$$dT_{ij}-\omega_i{}^kT_{kj}-\omega_j{}^kT_{ik}=0, \qquad (1.21)$$

$$dT_i{}^j-\omega_i{}^kT_k{}^j+\omega_k{}^jT_i{}^k=0. \qquad (1.22)$$

Упражнение 1.3. Доказать, что интегралом уравнений (1.19) является (1.7).

Упражнение 1.4. Доказать, что интегралом уравнений (1.21) и (1.22) являются соответственно выражения

$$t_{ij}P_k{}^iP_l{}^j=T_{kl}, \qquad (1.23)$$

$$t_i{}^jP_k{}^iQ_j{}^l=T_k{}^l. \; ● \qquad (1.24)$$

При исследовании различных физических вопросов, связанных с исследованием алгебраических свойств тензора 4-го ранга, часто бывает удобно перейти от трехмерного тензора 4-го ранга к матрице 9-го порядка, элементы которой, как у всякой матрицы, зависят от двух индексов. Этот переход осуществляется путем замены пары индексов ij ($i, j=1, 2, 3$) одним индексом α ($\alpha=1, 2, \ldots, 9$). Тем самым каждому трехмерному тензору 2-го ранга ставится в соответствие девятимерный вектор. Если тензор 2-го ранга симметричен, то ему соответствует шестимерный вектор, а тензору 4-го ранга, симметричному по первой и второй паре индексов, — шестимерный тензор 2-го ранга. При этом стараются сохранить соответствие между одним из инвариантов тензора T_{ij} и инвариантом шестимерного вектора $\vec{t}$:

$$T_{ij}T^{ji}=t_qt^q \quad (i, j=1, 2, 3; \; q=1, \ldots, 6); \qquad (1.25)$$

поэтому полагают

$$t_1=T_{11},\; t_2=T_{22},\; t_3=T_{33},$$

$$t_4=\sqrt{2}\,T_{23},\; t_5=\sqrt{2}\,T_{31},\; t_6=\sqrt{2}\,T_{12}. \qquad (1.26)$$

Упражнение 1.5. Доказать, что всякий тензор 2-го ранга $\underset{\sim}{T}$ можно представить в виде суммы двух тензоров симметричного $\underset{\sim}{S}$ и антисимметричного $\underset{\sim}{A}$

$$\underset{\sim}{T}=\underset{\sim}{S}+\underset{\sim}{A}. \quad \bullet \tag{1.27}$$

Очевидно, что в евклидовом пространстве можно выбрать ортонормированный базис $\vec{k}_i$, в котором различие между ковариантными и контравариантными компонентами векторов и тензоров исчезает. Поэтому в таком базисе тензорные соотношения могут быть записаны, как уже указывалось, только при помощи одних нижних индексов. Например, для вектора $\vec{a}$ в ортонормированном базисе $\vec{k}_i$ можно записать

$$\vec{a}=a_i\vec{k}_i, \tag{1.28}$$

а тензор, скажем, 2-го ранга $\underset{\sim}{a}$

$$\underset{\sim}{a}=a_{ij}\vec{k}_i\otimes\vec{k}_j, \tag{1.29}$$

где суммирование производится по повторяющимся нижним индексам. Фундаментальная матрица, соответствующая этому базису, будет единичной и записывается с помощью символов Кронекера δ_{ij}.

§ 2. Псевдотензоры

В главе 2 были установлены свойства ϵ-объектов, согласно которым, например, определитель матрицы a_{ij} (обозначим его через $|a|$) имеет вид

$$|a|=\epsilon_{ijk}a_1^i\, a_2^j\, a_3^k; \quad |a|\epsilon_{mnl}=\epsilon_{ijk}\, a_m^i\, a_n^j\, a_l^k$$

$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3). \tag{2.1}$$

Умножая второе соотношение (2.1) на ϵ^{mnl} и суммируя по индексам m, n, l от 1 до 3, получим

$$|a|=\frac{1}{6}\epsilon^{mnl}\epsilon_{ijk}\, a_m^i a_n^j a_l^k\equiv\frac{1}{6}\,\delta_{ijk}^{mnl}\, a_m^i a_n^j a_l^k. \tag{2.2}$$

Из формул (5.29) гл. 2 имеем для трехмерного случая

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{lmk}=\delta_{lmk}^{ijk}=\delta_{lm}^{ij}=(\delta_l^i\delta_m^j-\delta_m^i\delta_l^j),$$

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ljk}=\delta_{lj}^{ij}=2\delta_l^i,$$