Упражнение 1.5. Доказать, что всякий тензор 2-го ранга $\underset{\sim}{T}$ можно представить в виде суммы двух тензоров симметричного $\underset{\sim}{S}$ и антисимметричного $\underset{\sim}{A}$

$$\underset{\sim}{T}=\underset{\sim}{S}+\underset{\sim}{A}. \quad \bullet \tag{1.27}$$

Очевидно, что в евклидовом пространстве можно выбрать ортонормированный базис $\vec{k}_i$, в котором различие между ковариантными и контравариантными компонентами векторов и тензоров исчезает. Поэтому в таком базисе тензорные соотношения могут быть записаны, как уже указывалось, только при помощи одних нижних индексов. Например, для вектора $\vec{a}$ в ортонормированном базисе $\vec{k}_i$ можно записать

$$\vec{a}=a_i\vec{k}_i, \tag{1.28}$$

а тензор, скажем, 2-го ранга $\underset{\sim}{a}$

$$\underset{\sim}{a}=a_{ij}\vec{k}_i\otimes\vec{k}_j, \tag{1.29}$$

где суммирование производится по повторяющимся нижним индексам. Фундаментальная матрица, соответствующая этому базису, будет единичной и записывается с помощью символов Кронекера δ_{ij}.

§ 2. Псевдотензоры

В главе 2 были установлены свойства ϵ-объектов, согласно которым, например, определитель матрицы a_{ij} (обозначим его через $|a|$) имеет вид

$$|a|=\epsilon_{ijk}a_1^i\,a_2^j\,a_3^k; \quad |a|\epsilon_{mnl}=\epsilon_{ijk}\,a_m^i\,a_n^j\,a_l^k$$

$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3). \tag{2.1}$$

Умножая второе соотношение (2.1) на ϵ^{mnl} и суммируя по индексам m, n, l от 1 до 3, получим

$$|a|=\frac{1}{6}\epsilon^{mnl}\epsilon_{ijk}\,a_m^i\,a_n^j\,a_l^k\equiv\frac{1}{6}\,\delta_{ijk}^{mnl}\,a_m^i a_n^j a_l^k. \tag{2.2}$$

Из формул (5.29) гл. 2 имеем для трехмерного случая

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{lmk}=\delta_{lmk}^{ijk}=\delta_{lm}^{ij}=(\delta_l^i\delta_m^j-\delta_m^i\,\delta_l^j),$$

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ljk}=\delta_{lj}^{ij}=2\delta_l^i,$$

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk}=2\delta_i^{\,i}=6. \qquad (2.3)$$

Обозначим через $A_i^{\,m}$ алгебраическое дополнение к элементу $a_m^{\,i}$. Так как по определению

$$A_i^m=\frac{\partial|a|}{\partial a_m^i}, \qquad (2.4)$$

то из формулы (2.2) имеем

$$A_i^m=\frac{1}{2}\epsilon^{mnl}\epsilon_{ijk}\,a_n^j a_l^k. \qquad (2.5)$$

Умножая (2.5) на $a_s^{\,i}$, суммируя по i и воспользовавшись второй формулой (2.1), получим теорему Крамера

$$A_i^m a_s^i=\frac{1}{2}\epsilon^{mnl}\epsilon_{ijk}\,a_n^j a_l^k a_s^i=\frac{1}{2}\epsilon^{mnl}|a|\epsilon_{snl}=\delta_s^m|a|. \qquad (2.6)$$

Введенные ϵ-объекты позволяют проводить аналитические выкладки с определителями. Так, например, пусть нам нужно подсчитать определитель разности двух матриц $a\{a_j^{\,i}\}$ и $b\{b_j^{\,i}\}$. Как и прежде, обозначим след матрицы a через $\langle a\rangle$. Воспользовавшись формулой (2.2), запишем

$$|a-b|=\frac{1}{6}\delta_{lmn}^{ijk}(a_i^l-b_i^l)(a_j^m-b_j^m)(a_k^n-b_k^n)=$$

$$=\frac{1}{6}\delta_{lmn}^{ijk}[a_i^l a_j^m a_k^n-3a_i^l a_j^m b_k^n+3a_i^l b_j^m b_k^n-b_i^l b_j^m b_k^n]=$$

$$=|a|-\langle Ab\rangle+\langle aB\rangle-|b|. \qquad (2.7)$$

Здесь B — алгебраическое дополнение матрицы b. Обозначим значение внешней формы $\vec a\wedge\vec b\wedge\vec c$ на векторах базиса $\vec e_1$, $\vec e_2$, $\vec e_3$ через

$$S(\vec a\wedge\vec b\wedge\vec c). \qquad (2.8)$$

Рассмотрим два вектора $\vec a$, $\vec b$. Их *векторным произведением* называется такой вектор $\vec c$,

$$\vec c=\vec a\times\vec b, \qquad (2.9)$$

что для любого вектора $\vec x\in\mathscr{R}_3$ значение внешнего произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$

$$S(\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{x})=\vec{c}\cdot\vec{x}. \tag{2.10}$$

Пусть, например, в качестве векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выбраны векторы ортонормированного репера $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$, а в качестве $\vec{x}$ — вектор $\vec{k}_3$. Тогда из формулы (2.10) получим

$$\vec{c}\cdot\vec{k}_3=1. \tag{2.11}$$

Таким образом, вектор $\vec{c}$ совпадает с вектором $\vec{k}_3$,

$$\vec{k}_3=\vec{k}_1\times\vec{k}_2. \tag{2.12}$$

Если вектор $\vec{x}$ выбрать лежащим в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то правая часть (2.10) обратится в нуль. Следовательно, вектор $\vec{c}$ (2.9) ортогонален к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ранее было установлено, что при переходе от одного базиса к другому по формуле

$$\vec{e}_{i'}=X^i_{i'}\vec{e}_i;\quad \vec{e}_i=Y^{i'}_i\vec{e}_{i'} \tag{2.13}$$

внешнее произведение векторов базиса преобразуется по закону

$$\vec{e}_{1'}\wedge\vec{e}_{2'}\wedge\vec{e}_{3'}=\det|X^i_{i'}|\,\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3. \tag{2.14}$$

Если в качестве $\vec{e}_i$ взять ортонормированный репер $\vec{k}_i$, то

$$S(\vec{e}_{i'}\wedge\vec{e}_{j'}\wedge\vec{e}_{k'})=\sqrt{g}\,\epsilon_{i'j'k'}, \tag{2.15}$$

так как

$$g=\det|\vec{e}_{i'}\cdot\vec{e}_{j'}|=\{\det|X^i_{i'}|\}^2 \tag{2.16}$$

(см. гл. 1, (6.44)). Поэтому значение внешней формы $\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{x}$ на векторах ортонормированного репера $\vec{k}_i$ имеет вид

$$S(\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{x})=\epsilon_{ijk}a^ib^jx^k, \tag{2.17}$$

а на векторах репера $\vec{e}_i$, полученного из ортонормированного преобразованием (2.13), —

$$S(\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{x}) = \sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}a^i b^j x^k. \tag{2.18}$$

Сравнивая (2.18) с правой частью (2.10), получим

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}a^i b^j \vec{e}^k; \tag{2.19}$$

так как

$$\vec{c}\cdot\vec{x} = c_k x^k; \quad \vec{c} = c_k\vec{e}^k. \tag{2.20}$$

Упражнение 2.1. Определив значение внешней формы (2.8) на векторах взаимного репера $\vec{e}^i$, доказать, что из определения (2.9), (2.10) следует

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}a_i b_j \vec{e}_k. \tag{2.21}$$

Упражнение 2.2. Пользуясь определениями (2.19), (2.21) и формулами (2.3), доказать, что

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}), \tag{2.22}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) \quad \bullet$$

Рассмотрим тройку некомпланарных векторов $\vec{a}_i$. Построим другую тройку векторов $\vec{a}^i$ по формулам

$$\vec{a}^i = \frac{\epsilon^{ijk}\vec{a}_j\times\vec{a}_k}{2S(\vec{a}_1\wedge\vec{a}_2\wedge\vec{a}_3)}, \tag{2.23}$$

или

$$\vec{a}^1 = \frac{\vec{a}_2\times\vec{a}_3}{V}; \quad \vec{a}^2 = \frac{\vec{a}_3\times\vec{a}_1}{V}; \quad \vec{a}^3 = \frac{\vec{a}_1\times\vec{a}_2}{V}; \tag{2.24}$$

где

$$V \equiv S(\vec{a}_1\wedge\vec{a}_2\wedge\vec{a}_3). \tag{2.25}$$

Умножим скалярно обе части равенства (2.23) на $\vec{a}_l$:

$$\vec{a}^i\cdot\vec{a}_l = \frac{\epsilon^{ijk}S(\vec{a}_j\wedge\vec{a}_k\wedge\vec{a}_l)}{2S(\vec{a}_1\wedge\vec{a}_2\wedge\vec{a}_3)} = \frac{V\epsilon^{ijk}\epsilon_{jkl}}{2V} = \delta^i_l. \tag{2.26}$$

Тройки векторов, обладающие свойством (2.26), называются взаимными. В частности, если $\vec{e}_i$ — тройка векторов репера, то из формул (2.19) и (2.23) вытекает

$$\vec{e}^i = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \vec{e}_j \times \vec{e}_k. \qquad (2.27)$$

Упражнение 2.3. Доказать справедливость формулы

$$\vec{e}_i = \frac{\sqrt{g}}{2} \epsilon_{ijk} \vec{e}^j \times \vec{e}^k. \quad \bullet \qquad (2.28)$$

Умножим (2.27) на ϵ_{imn} и просуммируем по i. Воспользовавшись второй формулой (2.3), получим

$$\vec{e}^i \epsilon_{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} \vec{e}_j \times \vec{e}_k, \qquad (2.29)$$

отсюда

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sqrt{g}\, \epsilon_{ijk} \vec{e}^k. \qquad (2.30)$$

Упражнение 2.4. Доказать, что

$$\vec{e}^i \times \vec{e}^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \vec{e}_k. \quad \bullet \qquad (2.31)$$

Сравнивая формулы (2.19) и (2.20), видим

$$c_k = \sqrt{g}\, \epsilon_{ijk} a^i b^j. \qquad (2.32)$$

Умножим теперь (2.32) на ϵ^{klm} и просуммируем по k. Тогда, воспользовавшись формулой (2.3), получим

$$a^l b^m - a^m b^l = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{klm} c_k. \qquad (2.33)$$

Следовательно, векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ можно представить в виде кососимметричного тензора 2-го ранга, компонентами которого являются величины, стоящие в левой части соотношений (2.33). Вообще, любой кососимметричный тензор 2-го ранга можно представить в виде вектора и, обратно, каждому вектору соответствует кососимметричный тензор 2-го ранга.

Пусть a^{ij} — компоненты кососимметричного тензора 2-го ранга $(a^{ij}=-a^{ji})$. Тогда

$$a^{ij}=\frac{1}{2}(a^{ij}-a^{ji})=\frac{1}{2}(\delta^i_l\delta^j_m-\delta^j_l\delta^i_m)a^{lm}=$$

$$=\frac{1}{2}\epsilon^{kij}\epsilon_{klm}a^{lm}. \tag{2.34}$$

Обозначим

$$a_k=\sqrt{g}\,\epsilon_{klm}a^{lm}. \tag{2.35}$$

Тогда из (2.34) следует

$$a^{ij}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{kij}a_k. \tag{2.36}$$

Следовательно, взаимно обратное соотношение между вектором $\vec{a}$ и кососимметричным тензором второго ранга $\underset{\sim}{a}$ представлено соотношениями (2.35) и (2.36). Правда, нужно еще доказать, что величины (2.36) являются компонентами тензора $\underset{\sim}{a}$ и всякий ли вектор можно представить в виде (2.35). (Ведь в векторном анализе вектор, который является векторным произведением двух полярных векторов, называют осевым (аксиальным) вектором.) В самом деле, вопрос о тензориальности величин (2.35), (2.36) нуждается в уточнении.

Прежде всего заметим, что соотношение (2.1)

$$\epsilon_{ijk}a^i_{i'}a^j_{j'}a^k_{k'}=|a|\epsilon_{i'j'k'} \tag{2.37}$$

можно рассматривать как преобразование компонент ϵ-экстенсива ϵ_{ijk} при переходе от одной системы координат к другой (2.13). Поэтому ϵ-объект, вообще говоря, тензором не является. Однако ввиду большого распространения величин типа (2.37) в физике придумано специальное название — *относительные тензоры.*

Предположим, что $\det|X^i_{i'}|>0$, тогда экстенсив 2-го ранга

$$\underset{\sim}{Q}=Q_i{}^j\vec{e}^i\otimes\vec{e}_j \tag{2.38}$$

называется *относительным тензором веса p, если* при переходе от одной системы координат к другой (2.13) компоненты этого тензора преобразуются по закону

$$Q^{j'}_{i'}=\{\det|X^i_{i'}|\}^p X^i_{i'}Y^{j'}_j Q^j_i. \tag{2.39}$$

Относительный тензор веса нуль называется *истинным тензором* или просто тензором. Нетрудно дать обобщение этого определения на относительные тензоры любого ранга и произвольной размерности пространства $\mathcal{R}_n$. Таким образом, ϵ-объект является относительным псевдотензором 3-го ранга веса — 1.

Упражнение 2.5. Доказать, что экстенсив, компонентами которого являются величины ϵ^{ijk}, является относительным псевдотензором 3-го ранга веса $+1$. ●

Легко видеть, что для метрического тензора g_{ij}

$$g_{i'j'}=X^i_{i'}X^j_{j'}g_{ij}, \tag{2.40}$$

поэтому

$$\det|g_{i'j'}|=\{\det|X^{i'}_i|\}^2\det|g_{ij}|, \tag{2.41}$$

откуда следует, что величина $\sqrt{g}$ — относительный скаляр веса 1.

Упражнение 2.6. Доказать, что тензорное произведение двух относительных тензоров, один из которых имеет вес $+p$, а другой $-p$, является истинным тензором.

Упражнение 2.7. Доказать, что величины $\sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}$ и $\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}$ являются компонентами истинных тензоров 3-го ранга, которые называются *тензорами Леви-Чивиты*. ●

Всюду ранее мы предполагали, что преобразование (2.13) — непрерывное, т. е. непрерывно может быть получено из тождественного. Если же это не так, то $\det|X^i_{i'}|$ может быть и отрицательным. Обозначим через $|X^i_{i'}|$ абсолютное значение $\det|X^i_{i'}|$:

$$|X^i_{i'}|\equiv|\det|X^i_{i'}||. \tag{2.42}$$

Пусть $\varkappa$ — знак определителя $\det|X^i_{i'}|$

$$\varkappa\equiv\operatorname{sign}\det|X^i_{i'}|. \tag{2.43}$$

Дадим определение, обобщающее (2.39). Пусть дан экстенсив

$$\underset{\sim}{P}=\{P^{i_1\ldots i_m}{}_{j_1\ldots j_n}\}. \tag{2.44}$$

Экстенсив $\underset{\sim}{P}$ (2.44) называется *относительным псевдотензором* $(\widetilde{m}+n)$*-го ранга веса* p, если при переходе от одной системы координат к другой (2.13) компоненты этого экстенсива преобразуются по закону*

$$P^{i'_1 \dots i'_m}{}_{j'_1 \dots j'_n} = \varkappa |X^i_{i'}|^p X^{j_1}_{j'_1} \dots X^{j_n}_{j'_n} Y^{i'_1}_{i_1} \dots$$

$$\dots Y^{i'_m}_{i_m} P^{i_1 \dots i_m}{}_{j_1 \dots j_n}. \qquad (2.45)$$

Если $\varkappa = 1$, то $\underset{\sim}{P}$ называется *относительным тензором* $(m+n)$*-го ранга веса* p.

Относительный псевдотензор веса нуль называется истинным псевдотензором или просто псевдотензором, а относительный тензор веса нуль — абсолютным тензором (или истинным, или тензором).

Упражнение 2.8. Доказать, что величины δ^{ijk}_{lmn} являются компонентами абсолютного тензора шестого ранга, трижды ковариантного и трижды контравариантного. ●

В случае, если допускается значение $\varkappa = -1$, считаем, что

$$g = |\det|g_{ij}||. \qquad (2.46)$$

Упражнение 2.9. Доказать, что величины $\sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}$ и $\frac{1}{\sqrt{g}}\,\epsilon^{ijk}$ являются компонентами псевдотензора 3-го ранга ковариантного и контравариантного соответственно. ●

С помощью полученных формул (2.23) можно доказать следующую теорему (см. гл. 1, § 6).

Теорема. *Всякий тензор 2-го ранга* $\underset{\sim}{T}$ *можно представить в* $\mathscr{R}_3$ *суммой трех диад, в которых в качестве первых или вторых векторов диад можно выбрать три произвольных линейно-независимых вектора.*

Для доказательства выберем три произвольных некомпланарных вектора $\vec{a}_i$ и положим

$$\underset{\sim}{T} \cdot \vec{a}_i = \vec{b}_i. \qquad (2.47)$$

Построим три вектора $\vec{a}^j$ по формулам (2.23) или (2.24). Тогда тензор $\underset{\sim}{T}$ можно представить в виде

* При этом вид самого экстенсива $\underset{\sim}{P}$ также меняется.

$$\underset{\sim}{T}=\vec{b}_j\otimes\vec{a}^j. \qquad (2.48)$$

В самом деле, умножая скалярно (2.48) на $\vec{a}_i$ справа, получим в силу (2.26) выражение (2.47). Но тензор, удовлетворяющий условию (2.47) для двух фиксированных троек векторов $\vec{a}_i$ и $\vec{b}_i$, может быть только один. Предполагая противное, для $\underset{\sim}{T}'$ имеем

$$\underset{\sim}{T}'\cdot\vec{a}_i=\vec{b}_i. \qquad (2.49)$$

Следовательно,

$$(\underset{\sim}{T}-\underset{\sim}{T}')\cdot\vec{a}_i=0. \qquad (2.50)$$

Но тогда тензор $\underset{\sim}{T}-\underset{\sim}{T}'$ при скалярном умножении справа на произвольный вектор $\vec{c}$ даст нулевой вектор, ибо всякий вектор $\vec{c}$ можно единственным образом разложить по векторам $\vec{a}_i$. Поэтому тензор $\underset{\sim}{T}-\underset{\sim}{T}'$ является нулевым, что и требовалось доказать.

Упражнение 2.10. Доказать последнее утверждение, а именно: если при скалярном умножении заданного тензора $\underset{\sim}{T}$ на произвольный вектор $\vec{c}$

$$\underset{\sim}{T}\cdot\vec{c}=0, \qquad (2.51)$$

то $\underset{\sim}{T}\equiv 0$.

Упражнение 2.11. Провести доказательство теоремы, умножая векторы $\vec{a}_i$ слева на тензор $\underset{\sim}{T}$. ●

§ 3. Инварианты тензора второго ранга

Из соотношения (2.6) следует, что для произведения матриц A и a справедливо соотношение

$$Aa=\mathcal{I}\,|a|. \qquad (3.1)$$

При этом формулу (2.4) в матричном виде можно представить так:

$$A=\frac{\partial|a|}{\partial a}. \qquad (3.2)$$

Упражнение 3.1. Доказать, что для симметричной матрицы справедливы соотношения

$$\frac{\partial\langle a\rangle}{\partial a}=\mathcal{I}, \qquad (3.3)$$